УДК 535.317.1

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

В. Н. Курашов и *Ю. В. Хорошков*

В задачах оптического распознавания объекта существенную роль играет анализ геометрических признаков, основанный на выделении элементов симметрии, и его изображение. Если под термином «изображение» понимать распределение интенсивности излучения исходного объекта в плоскости наблюдения линейной оптической системы общего типа, то очевидно, что геометрические свойства объекта и изображения могут быть существенно различными. Естественно ожидать, однако, что элементы симметрии объекта трансформируются в определенные элементы симметрии изображения, которые могут анализироваться системой без выполнения обратного преобразования. К сожалению, этот принцип неприменим непосредственно к распределению интенсивности излучения, поскольку в общем случае отсутствует линейная связь между соответствующими функциями $I(\rho)$ и $I(\mathbf{r})$ в плоскости объекта и изображения. Такая связь имеется, однако, между корреляционными функциями $G(\rho_1, \rho_2)$ и $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, удовлетворяющими волновым уравнениям при распространении излучения в свободном пространстве [1] и преобразующихся некоторым интегральным оператором при прохождении оптической линейной системы общего вида. Поскольку, кроме того, $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = I(\mathbf{r})$, выделение геометрических признаков объекта может быть проведено на основании анализа элементов симметрии корреляционной функции его изображения.

В общем случае анализ симметрии корреляционных функций в плоскости объекта и изображения можно провести следующим образом. Пусть задана корреляционная функция в плоскости объекта $G(\rho_1, \rho_2) = G(\mu)$, где $\mu = \{\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2\}$ — четырехмерный вектор в конфигурационном пространстве, который определяет корреляционную функцию в плоскости изображения $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g(\lambda)$, $\lambda = \{x_1, y_1; x_2, y_2\}$ с помощью интегрального преобразования

$$g(\lambda) = \int K(\lambda;\ \mu)\, G(\mu)\, d\mu \tag{1}$$

с ядром $K(\lambda, \mu)$. Рассмотрим линейное преобразование пространственных координат $\mu = \mu' = R(H, \mathbf{a})\,\mu = H\mu + \mathbf{a}$, где H — ортогональная матрица. Операторы $R(H, \mathbf{a})$ образуют группу движений (вращения и трансляции) четырехмерного пространства М (4). Выделим из этой группы шестипараметрическую подгруппу Ω_6, которая изоморфна клеточной матрице

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $R_i = R(H_i, \mathbf{a}_i)$ $(i = 1, 2)$ определяют преобразования $\rho_i' = R_i(H_i, \mathbf{a}_i)\,\rho_i = H_i\rho_i + \mathbf{a}_i$ и являются элементами группы М (2), представлением которой может служить матрица [2]

$$Q(R) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Операция называется операцией симметрии функции пространственных координат, если выполняется равенство

$$G(R\mu) = G(\mu). \tag{4}$$

Если равенство (4) выполняется для всех поворотов (группа SO (4)), то такое поле является изотропным; если равенство (4) выполняется для всех трансляций, то такое поле является однородным. При геометрических преобразованиях объекта (его поворотах и сдвигах) точки ρ_1 и ρ_2 преобразуются одинаково, так, что $R_1 = R_2$. Это является частным случаем более общей симметрии корреляционных функций, определяемой выделенной подгруппой Ω_6 из группы М (4). Нас, однако, будут интересовать операции симметрии (4), справедливые только для конкретных элементов R_i группы М (2), связанных с геометрической симметрией объектов.

Предположим теперь, что с помощью линейного преобразования R из функции $G(\mu)$ получена новая функция $G'(\mu) = G(R\mu)$. Подстановка этой функции в (1) дает некоторую новую функцию в плоскости изображения

$$g'(\lambda) = \int K(\lambda,\ \mu)\, G(R\mu)\, d\mu. \tag{5}$$

Найдем условия, при которых линейному преобразованию координат R функции $G(\mu)$ соответствует линейное преобразование T_R координат функции $g(\lambda)$ в плоскости изображения, т. е. $g'(\lambda)=g(T_R\lambda)$. Осуществляя замену переменных под знаком интеграла (5), получим

$$g'(\lambda)=\int K(\lambda,\ R^{-1}\mu)\,G(\mu)\,|R^{-1}|\,d\mu, \tag{6}$$

где $|R^{-1}|$ — определитель обратного оператора R^{-1}. С другой стороны,

$$g(T_R\lambda)=\int K(T_R\lambda,\ \mu)\,G(\mu)\,d\mu, \tag{7}$$

так что равенство выражений (6) и (7) возможно при

$$K(T_R\lambda,\ \mu)=|R^{-1}|\,K(\lambda,\ R^{-1}\mu). \tag{8}$$

Таким образом, условие (8) образует класс линейных систем, у которых линейному преобразованию координат на входе системы соответствует определенное линейное преобразование на выходе. Аналогично доказывается условие для обратного преобразования

$$K^{-1}(R\mu,\ \lambda)=|T_R^{-1}|\,K^{-1}(\mu,\ T_R^{-1}\lambda). \tag{9}$$

Если, далее, для корреляционной функции $G(\mu)$ в плоскости объекта справедлива операция симметрии (4), то из (5) непосредственно следует, что при выполнении (8) для корреляционной функции $g(\lambda)$ также справедлива операция симметрии $g(T_R\lambda)=g(\lambda)$. Таким образом, при выполнении (8) каждому элементу симметрии R в плоскости объекта соответствует элемент симметрии в плоскости изображения T_R.

Рассмотрим в качестве примера корреляционную функцию монохроматического излучения в дальней зоне, связанную с функцией плоскости объекта $G(\mu)$ интегральным преобразованием с ядром [3]

$$K(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2;\ \rho_1,\ \rho_2)=A\exp\left\{i\frac{\omega_0}{2cz}\left[(\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_2)-(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1)+2(\mathbf{r}_1\rho_1)-2(\mathbf{r}_2\rho_2)\right]\right\}. \tag{10}$$

С учетом условия (8) вид оператора T_R непосредственно следует из свойств операторов преобразования координат. Действительно, по определению сопряженного оператора, $r(R^{-1}\rho)=(R^{+-1}r)\,\rho$ и, предполагая унитарность R, т. е. $R^{-1}=R^{+}$, $(R\mathbf{r})(R\mathbf{r})=\mathbf{rr}$ и $|R|=1$, получим, что $T_R=R$. Таким образом, симметрии корреляционной функции в плоскости объекта относительно унитарных преобразований соответствуют в дальней зоне те же преобразования.

Рассмотрим теперь связь свойств симметрии интенсивностей в плоскости объекта и изображения. Пусть корреляционная функция $G(\rho_1,\ \rho_2)$ обладает свойством симметрии R, т. е. $G(R\rho_1,\ R\rho_2)=G(\rho_1,\ \rho_2)$, тогда, очевидно, $I(R\rho)=G(R\rho,\ R\rho)=G(\rho,\ \rho)=I(\rho)$ так, что это же свойство симметрии имеет и распределение интенсивности. В плоскости изображения, если выполняется (8), имеем также $g(T_R\rho_1;\ T_R\rho_2)=g(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ и, очевидно, $I(T_R\mathbf{r})=I(\mathbf{r})$. Таким образом, соответствие операции симметрии $R_1=R_2=R$ корреляционной функции в плоскости объекта операции T_R в плоскости изображения является достаточным для существования такого же соотношения для интенсивностей. Обратное, однако, в общем случае неверно, так как выполнение некоторой операции симметрии для интенсивностей не влечет за собой соответствующую симметрию корреляционной функции. Действительно, условие (4) предполагает одинаковую симметрию как для модуля корреляционной функции, так и для ее фазы, тогда как аналогичное условие для $I(\rho)$ связано только с симметрией $|G(\rho,\ \rho)|$. Поскольку формирование изображения в плоскости наблюдения при частично когерентном освещении обусловлено как амплитудными, так и фазовым распределением, ясно, что последнее недостаточно для выполнения равенства $I(T_R\mathbf{r})=I(\mathbf{r})$. Анализ симметрии корреляционных функций является, таким образом, более общим аппаратом для выявления элементов геометрической симметрии объекта.

Литература

[1] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, гл. 10. «Наука», М., 1970.
[2] Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. «Наука», М., 1965.
[3] A. Jaiswal, G. Agarwal, C. Mehta. Nuovo Cimento, *15B*, 2, 295, 1973.

Поступило в Редакцию 18 августа 1976 г.