Н.А. Ахраменко, А.П. Павленко

УО «Белорусский государственный университет транспорта»,
Гомель, Беларусь

ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ МАССИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Введение

Гравитационная масса в теории тяготения Ньютона является источником гравитационного поля. Напряженность гравитационного поля, представляет собой его силовую характеристику. В теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей на покоящееся тело единичной массы, помещенное в это поле [1-2]. В настоящее время существуют разнообразные теории тяготения, обобщающие теорию тяготения Ньютона, доминирующее положение среди которых занимает общая теория относительности (ОТО). Имеются среди них и теории гравитации, учитывающие как массу вещества, так и массу поля. Например, по предположению Бриллюэна [3] в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна учитываться и масса самого поля. В [4] также учитывается масса гравитационного поля.

В данной работе определяются характеристики гравитационного поля массивной плоскости с учетом его массы. При этом используются некоторые положения классической механики.

1. Определение напряженности гравитационного поля плоскости

В известной аналогичной задаче электростатики напряженность электрического поля равномерно заряженной плоскости определяется выражением

$$E = \frac{\sigma_{эл}}{2\varepsilon_0}, \tag{1.1}$$

где $\sigma_{эл}$ – поверхностная плотность электрических зарядов, ε_0 – электрическая постоянная.

Сопоставляя закон Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.2}$$

(где q_1 и q_2 – точечные заряды, r – расстояние между ними) и закон всемирного тяготения

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.3}$$

(где G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – точечные массы) замечаем, что коэффициенту $1/4\pi\varepsilon_0$ (в соотношении (1.2)) можно поставить в соответствие $-G$ (в соотношении (1.3)).

Тогда величине $1/2\varepsilon_0$ будет соответствовать $-2\pi G$ и напряженность гравитационного поля плоскости в классической механике (с учетом выражения (1.1)) можно записать в виде

$$g = -2\pi G\sigma, \qquad (1.4)$$

где σ – поверхностная плотность массы плоскости.

В выражении (1.4) знак минус указывает на то, что вектор **g** направлен к плоскости.

Пусть существующее в пространстве поле напряженности **g** формируется как этой плоскостью, так и самим полем. Ввиду симметрии это поле будет зависеть только от одной переменной *x* (рисунок 1).

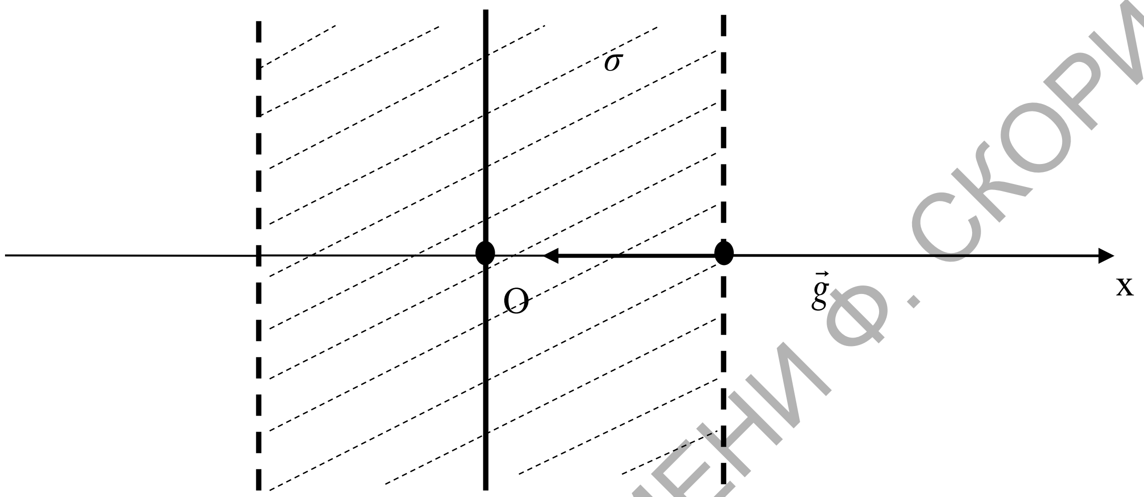

Рисунок 1 – Массивная плоскость с поверхностной плотностью массы σ (*x*=0)

Напряженность гравитационного поля в точке с координатой *x* будет определяться самой плоскостью и частью поля, заштрихованного на рисунке 1.1. На единицу площади поверхности с поверхностной плотностью массы σ будет приходиться масса поля $\sigma_п$. Величину $\sigma_п$ можно выразить через объемную плотность массы этого поля *ρ*.

$$\sigma_п = 2\int_0^x \rho dx. \qquad (1.5)$$

В выражении (1.5) коэффициент два введен ввиду симметрии и учитывает поле в интервале от минус *x* до нуля.

С учетом массы поля выражение (1.4) преобразуется к виду

$$g = -2\pi G(\sigma + \sigma_п). \qquad (1.6)$$

Подставив в (1.6) величину $\sigma_п$ из выражения (1.5), получим

$$g = -2\pi G\left(\sigma + 2\int_0^x \rho dx\right). \qquad (1.7)$$

Объемную плотность энергии гравитационного поля запишем в следующем виде [5, с. 437]

$$w = -\frac{g^2}{8\pi G}. \tag{1.8}$$

Соответствующая ей плотность массы с учетом (1.8) запишется в виде

$$\rho = \frac{w}{c^2} = -\frac{g^2}{8\pi G c^2}, \tag{1.9}$$

где c – скорость света в вакууме.

Подставив ρ из выражения (1.9) в соотношение (1.7), получим уравнение

$$g = -2\pi G\left(\sigma - 2\int_0^x \frac{g^2}{8\pi G c^2}dx\right). \tag{1.10}$$

Дифференцируя соотношение (1.10) можно получить

$$\frac{dg}{dx} = \frac{g^2}{2c^2}. \tag{1.11}$$

После разделения переменных получим

$$\frac{dg}{g^2} = \frac{dx}{2c^2}. \tag{1.12}$$

Решение уравнения (1.12) можно записать в виде

$$-\frac{1}{g} = \frac{x}{2c^2} + const. \tag{1.13}$$

Константу в выражении (1.13) выбираем такой, чтобы при стремлении x к нулю напряженность поля стремилась к величине $-2\pi\sigma G$.

С учетом этого соотношение (1.13) преобразуется к виду

$$g = -\frac{2c^2}{x + \frac{c^2}{\pi\sigma G}}. \tag{1.14}$$

Выражение (1.14) определяет напряженность поля при $x > 0$.

Окончательно для напряженности гравитационного поля запишем

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2c^2}{x - \dfrac{c^2}{\pi\sigma G}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\dfrac{2c^2}{x + \dfrac{c^2}{\pi\sigma G}}, & x > 0 \end{cases}. \tag{1.15}$$

В выражении (1.15) напряженность гравитационного поля при $x = 0$ записана из соображений симметрии. Из выражения (1.15) следует, что при $x \to \infty$ напряженность гравитационного поля стремится к нулю в отличие ньютоновского поля тяготения.

2. Приближение для слабых гравитационных полей

Для слабых гравитационных полей (при $c \to \infty$) напряженность гравитационного поля можно представить в виде

$$g(x) = \begin{cases} 2\pi\sigma G, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2\pi\sigma G, & x > 0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

которое является ньютоновским полем тяготения.

Выражения (1.15) и (2.1) показывают, что напряженность гравитационного поля претерпевает разрыв при переходе через плоскость с распределенной на ней массой.

Заключение

Таким образом, определена напряженность гравитационного поля массивной плоскости с учетом предположения Бриллюэна о том, что в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать и масса самого поля. Полученные соотношения являются обобщением для величины напряженности гравитационного поля в нерелятивистском случае. Из этих соотношений для случая слабых гравитационных полей следуют выражения напряженности, соответствующие ньютоновскому полю тяготения.

Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики в 5-ти т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 560 с.

2. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности. / А.Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.

3. Бриллюэн, Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. – М.: Мир, 1972. – 143 с.

4. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля. / А.Н. Сердюков. – Гомель, изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

5. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. Наука, 1988. – 512 с.