Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины"

Задорожнюк Елена Андреевна

Критерии p-сверхразрешимости и p-нильпотентности конечных групп

Июнь 2002 Препринт № 32

Гомель

1. Введение

Все рассматриваемые нами в данной работе группы конечны. Напомним, что группа называется сверхразрешимой, если она обладает нормальным рядом с циклическими факторами. Группа называется нильпотентной, если она обладает центральным рядом. Согласно Хупперту [1] группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её максимальных подгрупп являются простыми числами. Этот красивый и весьма нетривиальный результат положил начало большому числу исследований, связанных с нахождением критериев сверхразрешимости группы [3] и изучением различных обобщений сверхразрешимых групп. Одним из таких обобщений является понятие p-сверхразрешимой группы.

Напомним, что группа называется p-сверхразрешимой (p — простое число), если каждый её главный фактор является либо p'-группой, либо циклической группой. Группа G называется p-нильпотентной, если она имеет нормальную p'-холловскую подгруппу.

В данной работе мы также будем иметь дело со специальным типом сверхразрешимых групп — со строго p-замкнутыми группами. Напомним это определение. Группа G называется строго p-замкнутой, если силовская p-подгруппа G_p этой группы нормальна в ней, а факторгруппа G/G_p является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$ [3].

Запись $G = [A]B$ будет обозначать полупрямое произведение подгрупп A и B группы G, где $A \triangleleft G, A \cap B = 1$. Остальные определения и обозначения можно найти в [5].

2. Некоторые предварительные результаты

Согласно теореме Фробениуса группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой p-подгруппы P из G факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ является p-группой. Её модификацией для класса сверхразрешимых групп является следующая

Теорема 1. *Если для любой нециклической p-подгруппы P из G факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ является p-группой, то G — сверхразрешима.*

Доказательство. Допустим, что теорема не верна, т.е. существуют несверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди этих групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть H — произвольная собственная подгруппа группы G. Тогда для любой её нециклической p-подгруппы P из равенства

$$|N_H(P)/C_H(P)| = |N_G(P)\cap H/C_G(P)\cap H| = |(N_G(P)\cap H)C_G(P)/C_G(P)|$$

следует, что факторгруппа $N_H(P)/C_H(P)$ является p-группой. Так как группа H удовлетворяет условию теоремы и $|H| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H сверхразрешима.

Итак, G — минимальная несверхразрешимая группа. По теореме 26.2 [5] группа G имеет единственную неединичную нормальную силовскую p-подгруппу B. Предположим, что B — циклическая. Тогда из сверхразрешимости факторгруппы G/B следует, что группа G сверхразрешима. Противоречие. Поэтому B — нециклическая подгруппа.

Согласно условию теоремы факторгруппа $N_G(B)/C_G(B) = G/C_G(B)$ является p-группой. Так как G/B — p'-группа, то по лемме 1.6 [2] $G = C_G(B)B$. Из того, что для p'-группы G/B справедливо

$$G/B = BC_G(B)/B \simeq C_G(B)/B\cap C_G(B) = C_G(B)/Z(B),$$

следует, что $C_G(B)/Z(B)$ тоже является p'-группой. По теореме Шура-Цассенхауза $B\cap C_G(B) = Z(B)$ имеет дополнение S в $C_G(B)$, т.е.

$$C_G(B) = [Z(B)]S.$$

Тогда

$$G = (S[Z(B)])B = SB.$$

Из очевидных включений

$$S \subseteq N_G(S),\ B \subseteq C_G(S) \subseteq N_G(S)$$

следует, что

$$BS = G \subseteq N_G(S),$$

а значит, $G = N_G(S)$, т.е. S нормальна в G. Так как

$$B\cap S \leq B,\ B\cap S \leq S$$

и порядки B и S взаимно просты, то $B\cap S = 1$. Значит, $G = B\times S$. Группа G, являясь прямым произведением сверхразрешимых подгрупп

B и S, сама является сверхразрешимой. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть p — наименьшее простое число из $\pi(G)$. Если для любой нециклической p-подгруппы P группы G факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ является p-группой, то группа G — p-нильпотентна.*

Доказательство. Допустим, что теорема не верна, т.е. существуют не p-нильпотентные группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть H — произвольная собственная подгруппа группы G. Тогда для любой её нециклической p-подгруппы P из равенства

$$|N_H((P)/C_H(P)| = |N_G(P)\cap H/C_G(P)\cap H| = |(N_G(P)\cap H)C_G(P)/C_G(P)|$$

следует, что $N_H(P)/C_H(P)$ — p-группа, где p — наименьшее простое число из $\pi(G)$.

Так как группа H удовлетворяет условию теоремы и $|H| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H является p-нильпотентной.

Итак, G — минимальная не p-нильпотентная группа. Тогда по теореме 5.4 [1] в G существует нормальная силовская p-подгруппа B. По теореме 10.1.9 [] она нециклическая. Согласно условию теоремы $N_G(B)/C_G(B) = G/C_G(B)$ является p-группой. Так как G/B — p'-группа, то по лемме 1.6 [2] $G = C_G(B)B$. Из того, что для p'-группы G/B справедливо

$$G/B = BC_G(B)/B \simeq C_G(B)/B\cap C_G(B) = C_G(B)/Z(B),$$

следует, что $C_G(B)/Z(B)$ тоже является p'-группой.

По теореме Шура-Цассенхауза $B\cap C_G(B) = Z(B)$ имеет дополнение S в $C_G(B)$, т.е. $C_G(B) = [Z(B)]S$. Тогда

$$G = (S[Z(B)])B = SB.$$

Из того, что

$$S \subseteq N_G(S),\ B \subseteq C_G(S) \subseteq N_G(S)$$

следует, что $BS = G \subseteq N_G(S)$, а значит, $G = N_G(S)$, т.е. $S \triangleleft G$.

Так как

$$B\cap S \leq B,\ B\cap S \leq S,$$

и порядки B и S взаимно просты, то $B \cap S = 1$. Значит,

$$G = B \times S.$$

Группа G является прямым произведением p-нильпотентных групп, поэтому она p-нильпотентна. Противоречие. Теорема доказана.

Напомним, что $\mathfrak{N}_p$ обозначает формацию всех p-групп, $\mathfrak{A}(p-1)$ — формацию абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Теорема 3. *Если для любой нециклической p-подгруппы P группы G факторгруппа $N_G(P)/C_G(P) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$, то группа G — сверхразрешима.*

Доказательство. Допустим, что теорема не верна, т.е. существуют несверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок.

Пусть H — произвольная собственная подгруппа группы G. Для любой её нециклической p-подгруппы P имеет место

$$N_H(P)/C_H(P) = (N_G(P) \cap H)/(C_G(H) \cap H) = (N_G(P) \cap H)/$$

$$((N_G(P) \cap H) \cap C_G(P) \simeq (N_G(P) \cap H)C_G(P)/C_G(P) \leq N_G(P)/C_G(P).$$

Так как H удовлетворяет условию теоремы и $|H| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H сверхразрешима.

Итак, G — минимальная несверхразрешимая группа. По теореме 24.2 [5] $G^{\mathfrak{U}}$ является p-группой для некоторого простого p и $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — $\mathfrak{U}$-эксцентральный главный фактор группы G. По лемме Хупперта

$$G/C_G(G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \notin \mathfrak{A}(p-1).$$

По условию теоремы

$$N_G(G^{\mathfrak{U}})/C_G(G^{\mathfrak{U}}) = G/C_G(G^{\mathfrak{U}}) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1).$$

Так как при этом

$$C_G(G^{\mathfrak{U}}) \subseteq C_G(G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})),$$

то

$$(G/C_G(G^{\mathfrak{U}}))/C_G(G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}}))/C_G(G^{\mathfrak{U}}) \simeq G/C_G(G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1),$$

т.е. корадикал $(G/C_G(G^{\mathfrak{A}}/\Phi(G^{\mathfrak{A}})))^{\mathfrak{A}(p-1)}$ является нормальной p-подгруппой в $G/C_G(G^{\mathfrak{A}}/\Phi(G^{\mathfrak{A}}))$. Но по лемме 3.9 [1] факторгруппа $G/C_G(G^{\mathfrak{A}}/\Phi(G^{\mathfrak{A}}))$ не содержит неединичных p-подгрупп. Значит,

$$(G/C_G(G^{\mathfrak{A}}/\Phi(G^{\mathfrak{A}})))^{\mathfrak{A}(p-1)} = 1,$$

т.е.

$$G/C_G(G^{\mathfrak{A}}/\Phi(G^{\mathfrak{A}})) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Противоречие доказывает теорему.

3. Основные результаты

Прежде, чем перейти к основному результату данной работы, докажем следующие две леммы.

Лемма 1. *Подгруппа и фактогруппа строго p-замкнутой группы являются строго p-замкнутыми.*

Доказательство. Пусть G строго p-замкнутая группа, H произвольная её подгруппа, H_p силовская p-подгруппа в H. Покажем, что H строго p-замкнута. По теореме Силова H_p содержится в силовской p-подгруппе G_p группы G. Так как $G_p \triangleleft G$, то $H_p = H \cap G_p \triangleleft H$.

Ввиду изоморфизма

$$H/H_p = H/H \cap G_p \simeq HG_p/G_p$$

и того, что $G/G_p \in \mathfrak{A}(p-1)$, видим, что $H/H_p \in \mathfrak{A}(p-1)$.

Таким образом, группа H строго p-замкнута.

Пусть теперь N нормальная подгруппа группы G. Покажем,что факторгруппа G/N строго p-замкнута. Так как G_p силовская p-подгруппа группы G и $N \triangleleft G$, то по теореме 6.4 работы [2] G_pN/N является силовской p-подгруппой группы G/N.

Так как произведение нормальных подгрупп является нормальной подгруппой, то $G_pN \triangleleft G$ и поэтому $G_pN/N \triangleleft G/N$.

Ввиду изоморфизмов

$$(G/N)/(G_pN/N) \simeq G/G_pN \simeq (G/G_p)/(G_pN/G_p)$$

следует, что

$$(G/N)/(G_pN/N) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Таким образом, факторгруппа G/N строго p-замкнута. Лемма доказана.

Лемма 2.([7]) *Пусть P — такая p-подгруппа группы G, что факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ строго p-замкнута. Если H — подгруппа группы G, причём $P \leq H$, тогда факторгруппа $N_H(P)/C_H(P)$ также строго p-замкнута.*

Доказательство. Очевидно, что

$$N_H(P) = H \cap N_G(P) \text{ и } C_H(P) = H \cap C_G(P).$$

Тогда мы имеем

$$N_H(P)/C_H(P) = (H \cap N_G(P))/(H \cap C_G(P)) \simeq ((H \cap N_G(P))C_G(P)/C_G(P).$$

Из того, что подгруппа строго p-замкнутой группы является строго p-замкнутой, следует, что факторгруппа $N_H(P)/C_H(P)$ строго p-замкнута. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть G — p-разрешимая группа, N — нормальная в G подгруппа, такая, что G/N — p-сверхразрешимая факторгруппа. Если $N_G(P)/C_G(P)$ строго p-замкнута для каждой нециклической p-подгруппы P из N, то G — p-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, т.е. существуют не p-сверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Поскольку по условию группа G p-разрешима, то K — либо элементарная абелевая группа, либо p'-группа. Обозначим $\overline{G} = G/K$, $\overline{N} = N/K$.

Если K — элементарная абелевая группа, то для каждой нециклической p-подгруппы $\overline{P} = P/K$ из $\overline{N}$ подгруппа P является нециклической p-подгруппой в N, и поэтому факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ согласно условию теоремы является строго p-замкнутой.

Так как факторгруппа строго p-замкнутой группы сама является строго p-замкнутой, то $(N_G(P)/K)/(C_G(P)K/K)$ — строго p-замкнута. Из того, что

$$N_G(P)/K = N_{G/K}(P/K) \text{ и } C_{G/K}(P/K) \geq C_G(P)K/K$$

следует, что $N_{\overline{G}}(\overline{P})/C_{\overline{G}}(\overline{P})$ — строго p-замкнута.

Если K — p'-группа, то для каждой нециклической p-подгруппы $\overline{P} = H/K$ из $\overline{N}$ верно $H = PK$, где P — нециклическая силовская p-подгруппа из H. По условию факторгруппа $N_G(P)/C_G(P)$ строго p-замкнута, поэтому и $N_G(P)K/C_G(P)K$ также строго p-замкнута. Очевидно, что

$$C_{\overline{G}}(\overline{P}) \geq C_G(P)K/K.$$

Значит, и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{P})/C_{\overline{G}}(\overline{P})$ строго p-замкнута. Так как $\overline{G}$ удовлетворяет условию теоремы, и $|\overline{G}| < |G|$, то ввиду выбора группы G группа G/K p-сверхразрешима.

Если K — p'-группа, то G — p-сверхразрешима. Противоречие. Значит, K — элементарная абелевая p-группа. По условию $G/C_G(K)$ строго p-замкнута, т.е. $G/C_G(K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Тогда $(G/C_G(K))^{\mathfrak{A}(p-1)}$ нормальная p-подгруппа в $G/C_G(K)$.

Так как по лемме 3.9 [5] $G/C_G(K)$ не содержит неединичных p-подгрупп, то

$$(G/C_G(K))^{\mathfrak{A}(p-1)} = 1, \text{ т.е. } G/C_G(K) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

По теореме 1.4 [3] $|K| = p$. Отсюда следует, что группа G p-сверхразрешима. Вновь полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 5. *Пусть G — p-разрешимая группа, где $p \neq 2$, и N — нормальная в G подгруппа, такая, что G/N — p-сверхразрешимая факторгруппа. Предположим, что для любой нециклической p-подгруппы A из N все её минимальные подгруппы пронормальны в G. Тогда G — p-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Пусть A — некоторая нециклическая p-подгруппа группы N. Покажем сначала, что факторгруппа $N_G(A)/C_G(A)$ строго p-замкнута. Пусть x — элемент из A порядка p. Подгруппа $< x >$ субнормальна в $N_G(A)$. По условию $< x >$ пронормальна в G, а значит, и в $N_G(A)$. По лемме 6.3 [2] из субнормальности и пронормальности подгруппы $< x >$ в $N_G(A)$ следует, что $< x >$ нормальна в $N_G(A)$. Так как $\Omega_1(A)$ char A, и так как A нормальна в $N_G(A)$, то $\Omega_1(A)$ нормальна в $N_G(A)$. Отсюда $C_H(\Omega_1(A))$ нормальна в $N_G(A) = H$. Очевидно, что

$$C = C_G(A) \leq C_H(\Omega_1(A)).$$

Покажем, что факторгруппа $C_H(\Omega_1(A))/C$ является p-подгруппой группы H/C.

Предположим противное, т.е. допустим, что порядок некоторого неединичного элемента $gC \in C_H(\Omega_1(A))/C$ является p'-числом. Группа $< gC >$ действует сопряжениями на A, причём действие $< gC >$ на $\Omega_1(A)$ тривиально. Значит, ввиду теоремы 2.4 [6] $< gC >$ действует тривиально и на A, т.е. $gC = C$, что противоречит выбору элемента gC. Поэтому $C_H(\Omega_1(A))/C$ является p-группой. Так как $|x| = p$, то по теореме 1.4 [3]

$$N_H(< x >)/C_H(< x >) \leq Aut(< x >) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Значит по лемме 3 [7] и

$$(\bigcap_{x \in \Omega_1(A)} N_H(< x >))/(\bigcap_{x \in \Omega_1(A)} C_H(< x >)) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Любая подгруппа последней факторгруппы является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Поскольку, очевидно, что

$$C_H(\Omega_1(A)) = \bigcap_{x \in \Omega_1(A)} C_H(< x >) \text{ и } H \leq \bigcap_{x \in \Omega_1(A)} N_H(< x >),$$

то

$$H/\bigcap_{x \in \Omega_1(A)} C_H(< x >) = H/C_H(\Omega_1(A)) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Но так как

$$H/C_H(\Omega_1(A)) \simeq (H/C)/(C_H(\Omega_1(A))/C),$$

то факторгруппа H/C строго p-замкнута.

Докажем теперь, что группа G p-сверхразрешима. Предположим, что теорема не верна, т.е. существуют не p-сверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть K минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Поскольку по условию группа G p-разрешима, то K либо элементарная абелевая p-группа, либо p'-группа. Обозначим

$$\overline{G} = G/K, \ \overline{N} = N/K.$$

Если K элементарная абелевая p-группа, то для каждой нециклической p-подгруппы $\overline{A} = A/K$ из $\overline{N}$ подгруппа A является нециклической p-подгруппой в N и поэтому факторгруппа $N_G(A)/C_G(A)$

является строго p-замкнутой по доказанному выше. Так как фактор-группа строго p-замкнутой группы сама является строго p-замкнутой, то $(N_G(A)/K)/(C_G(A)K/K)$ строго p-замкнута. Из того, что

$$N_G(A)/K = N_{G/K}(A/K) \text{ и } C_{G/K}(A/K) \geq C_G(A)K/K$$

следует, что $N_{\overline{G}}(\overline{A})/C_{\overline{G}}(\overline{A})$ строго p-замкнута.

Если K — p'-группа, то для каждой нециклической p-подгруппы $\overline{A} = H/K$ из $\overline{N}$ имеет место $H = AK$, где A — нециклическая силовская p-подгруппа из H. Так как $N_G(A)/C_G(A)$ строго p-замкнута, то и $N_G(A)K/C_G(A)K$ также строго p-замкнута. Очевидно, что

$$C_{\overline{G}}(\overline{A}) \geq C_G(A)K/K.$$

Согласно теореме 3.16 [5]

$$N_{\overline{G}}(\overline{A}) = N_G(A)K/K.$$

Значит, и $N_{\overline{G}}(\overline{A})/C_{\overline{G}}(\overline{A})$ строго p-замкнута.

Так как $|\overline{G}| < |G|$, то ввиду выбора группы G группа G/K p-сверхразрешима. Если K — p'-группа, то G — p-сверхразрешима. Противоречие. Значит, K — элементарная абелевая p-группа. По доказанному выше $G/C_G(K)$ — строго p-замкнута, т.е.

$$G/C_G(K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1).$$

Тогда $(G/C_G(K))^{\mathfrak{A}(p-1)}$ — нормальная p-подгруппа в $G/C_G(K)$. Так как по лемме 3.9 [5] $G/C_G(K)$ не содержит неединичных p-подгрупп, то

$$(G/C_G(K))^{\mathfrak{A}(p-1)} = 1, \text{ т.е. } G/C_G(K) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Ввиду теоремы 1.4 [3] $|K| = p$. Отсюда следует, что G — p-сверхразрешима. Вновь полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Аналогично можно было бы доказать и следующую теорему, однако мы дадим другое её доказательство, апеллирующее к теории критических групп.

Теорема 6. *Пусть G — разрешимая группа, N — нормальная в G подгруппа, такая что G/N — 2-нильпотентная факторгруппа. Предположим, что для любой нециклической 2-подгруппы A из N выполняется одно из следующих двух условий:*

1) A — абелевая группа и все её минимальные подгруппы пронормальны в G;

2) A — неабелевая группа и все её минимальные подгруппы порядка 4 пронормальны в G.

Тогда G — 2-нильпотентная группа.

Доказательство. Допустим, что теорема не верна, т.е. существуют не 2-нильпотентные группы, удовлетворяющие условию теоремы. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть H — произвольная собственная подгруппа группы G. Ввиду разрешимости G её подгруппа H также разрешима. Так как N нормальна в G, то и группа $N \cap H$ нормальна в H. Подгруппа 2-нильпотентной группы является 2-нильпотентной, поэтому факторгруппа $H/(N \cap H) \simeq$ $\simeq HN/N$ — 2-нильпотентна.

Пусть A — любая нециклическая 2-подгруппа из $N \cap H$. Тогда по предположению, что условия теоремы выполняются для группы G, и ввиду того, что подгруппа, пронормальная в группе, пронормальна и в любой её подгруппе, группа A удовлетворяет одному из следующих двух условий:

1) A — абелевая группа и все её минимальные подгруппы пронормальны в H;

2) A — неабелевая группа и все её минимальные подгруппы и подгруппы порядка 4 пронормальны в H.

Так как группа H удовлетворяет условиям теоремы и $|H| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H — 2-нильпотентна. Итак, G — минимальная не 2-нильпотентная группа. По теореме 5.4 [1] следует, что G — группа Шмидта, т.е. минимальная ненильпотентная группа. Для группы Шмидта G справедливы следующие утверждения [5]:

1) G — разрешимая бипримарная группа;

2) $G^{\mathfrak{N}}$ является силовской q-подгруппой в G, q — простое число;

3) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор группы G;

4) если $G^{\mathfrak{N}}$ абелева, то $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$;

5) если $G^{\mathfrak{N}}$ неабелева, то её центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;

6) если $p = 2$, то экспонента $G^{\mathfrak{N}}$ не превышает 4.

Уточним строение группы G. Если порядок G не делится на 2, то G — 2-нильпотентная группа, что противоречит предыдущему. Значит, 2 делит порядок группы G, т.е. $\pi(G) = \{2, p\}$. Если силовская p-подгруппа

G_p нормальна в G, то группа G — 2-нильпотентна, что невозможно. Значит, G_2 нормальна в G. Таким образом, $G = [G_2]G_p$. Из того, что группа G/N 2-нильпотентна, следует, что факторгруппа NG_p/N нормальна в G/N. Кроме того, ясно, что NG_2/N нормальна в G/N. Итак, G/N нильпотентна. Тогда $G_2 = G^{\mathfrak{N}} \subseteq N$.

Если G_2 абелева, то по теореме 26.1 [5] $\Phi(G_2) = 1$ и $G_2/\Phi(G_2) = G_2/1$ — главный фактор группы G. Но так как в G_2 любая подгруппа субнормальна и по условию теоремы все минимальные подгруппы из G_2 пронормальны, то они нормальны в G. Значит, так как

$$G_2 = Z_1 \times ... \times Z_t, \text{ где } Z_1 \simeq ... \simeq Z_t \text{ — группа порядка 2,}$$

то $Z_1, ..., Z_t$ нормальны в G. Таким образом, $t = 1$ и $G_2 = Z_1$ — группа порядка 2. Но тогда по теореме 1.4 [3]

$$G/C_G(G_2) \in \mathfrak{A}(p-1) = (1), \text{ т.е. } G = C_G(G_2).$$

Значит, $G_2 \subseteq Z(G)$. Но G/G_2 — нильпотентная группа и поэтому G является нильпотентной группой. Противоречие.

Следовательно, G_2 — неабелева группа. Тогда по теореме 26.2 [5] её центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту 2, а экспонента G_2 равна 4.

Пусть x — любой элемент порядка 4 из G_2 и $T = \langle x \rangle$. Тогда $|T| = 4$. Понятно, что T нормальна в G. А так как

$$\Phi(G_2) \subseteq T\Phi(G_2) \subseteq G_2$$

и $G_2/\Phi(G_2)$ — главный фактор группы G, то либо

$$\Phi(G_2) = T\Phi(G_2), \text{ т.е. } T \subseteq \Phi(G_2),$$

либо $T\Phi(G_2) = G_2$. Ввиду того, что T — группа экспоненты 4, а экспонента группы $\Phi(G_2)$ равна 2, первое равенство невозможно. Значит, $T\Phi(G_2) = G_2$ и мы имеем

$$T/T \cap \Phi(G_2) \simeq T\Phi(G_2)/\Phi(G_2) = G_2/\Phi(G_2).$$

Так как T — циклическая группа, то $G_2/\Phi(G_2)$ — циклическая группа порядка 2. Значит,

$$G_2/\Phi(G_2) \subseteq Z(G_2/\Phi(G_2)),$$

и поэтому, $G_2/\Phi(G_2)$ — нильпотентная группа, что противоречит равенству $G_2 = G^{\mathfrak{N}}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, такая, что факторгруппа G/N сверхразрешима. Если каждая минимальная подгруппа любой нециклической p-подгруппы A из N пронормальна в G, а при $p = 2$ и каждая подгруппа из A порядка 4 пронормальна в G, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Допустим, что утверждение не верно, т.е. существуют не сверхразрешимые группы, удовлетворяющие условию следствия. Выберем среди таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть H — произвольная собственная подгруппа группы G. Из того, что подгруппа N нормальна в G, следует, что $N \cap H$ нормальна в H. Так как подгруппа сверхразрешимой группы сверхразрешима, то факторгруппа

$$H/(N \cap H) \simeq HN/N$$

также сверхразрешима. Пусть A — некоторая нециклическая p-подгруппа из группы $N \cap H$. Тогда по предположению, что группа G удовлетворяет условию следствия, и ввиду того, что подгруппа, пронормальная в группе, пронормальна также и в любой её подгруппе, группа A пронормальна в H, а для $p = 2$ каждая подгруппа из A порядка 4 пронормальна в H. Из того, что группа H удовлетворяет условиям следствия и $|H| < |G|$ и ввиду выбора группы G подгруппа H сверхразрешима Тогда и факторгруппа

$$H/(N \cap H) \simeq HN/N$$

сверхразрешима. Таким образом, G — минимальная несверхразрешимая группа. Согласно [1] группа G разрешима. Поэтому по теореме 1 и теореме 2 группа G сверхразрешима. Следствие доказано.

Литература

1. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr. 1954. Bd. 60. S. 409 434.

2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter. Berlin. New York. 1992. 889 p.

3. Weinstein M. Between Nilpotent and Solvable, Polygonal Publishing House, 1982.

4. Kurzweil H. Endliche Gruppen, Chelsea Publishing Company, New York, 1980.

5. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 С.

6. Gorenstein D. Finite Groups, Harper and Row, New York, reprinted by Chelsea, New York. 1980.

7. A Frobenius-type theorem for supersolvable groups // Publ. Math. Debrecen. 1996. 49 / 3-4. P. 321-326.

8. Robison D. A Course in the Theory of Groups, Springer Verlag, New York, 1982.

Задорожнюк Елена Андреевна

Критерии p-сверхразрешимости и p-нильпотентности конечных групп

Препринты Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины"

Подписано в печать 4.07.2002 г. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 0.9 Уч.-изд. л. 0.6 Тираж 15 экз.

Отпечатано на полиграфической технике ГГУ им. Ф.Скорины.
Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999.
246019 г.Гомель. ул.Советская 104