С.С. Гиргель
УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ ВЕБЕРА – ГАУССА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Введение

В настоящее время по-прежнему актуальны поиск и исследование новых типов световых пучков [1-6]. Вместе с тем решения волнового уравнения в параболической системе координат, описывающие волновые поля Вебера [2] и пучки Вебера – Гаусса (W-G) (иначе: параболические гауссовые пучки) [2-5], изучены недостаточно. Поэтому в настоящей работе получены аналитические выражения в замкнутой форме, описывающие пучки *W-G*. Установлены физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Проведено графическое моделирование пучков *W-G* и показано, что комплексные значения свободного параметра *a* являются физически приемлемыми.

1. Нормированные пучки Вебера – Гаусса

Для монохроматических волн вида $f(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r})\exp(ik_z z-i\omega t)$ скалярное параболическое уравнение для огибающей $f(\boldsymbol{r})$, описывающее параксиальные световые пучки, имеет вид $(\Delta_\perp+2ik_\perp\partial_z)f(\boldsymbol{r})=0$. Перейдем к параболической цилиндрической системе координат, производя подстановку $[x=(\eta^2-\xi^2)/2;\ y=\xi\eta]$ [7, 2]. Решая затем параболическое уравнение, получим выражения для параксиальных пучков Вебера.

Поперечные картины распределения интенсивности в полученных параксиальных пучках Вебера представляют наложение системы софокусных парабол. Поэтому такие пучки называются параболическими. Эти поля, как и поля Бесселя, являются бездифракционными [1, 2, 6], так как их амплитуды в поперечной плоскости не зависят от продольной координаты *z*. Как и поля Бесселя, параболические поля обладают свойством самовосстановления после взаимодействия с препятствием.

Параболические пучки или, что то же самое, пучки Вебера переносят бесконечную энергию и поэтому физически не реализуемы во всём пространстве. Пучки Вебера – Гаусса (*W-G)*, энергия которых конечна, проще всего получить из параксиальных пучков Вебера, применяя преобразование Аппеля [7] в форме [6] $f(x,y,q)\to G\,f\big(x/(\beta q),\,y/(\beta q),\,-1/(\beta^2 q)\big)$, где G – гауссиан, $\beta=i/z_0$.

Чтобы уменьшить число свободных параметров и записать выражения в более общем виде, перейдем к безразмерным величинам, используя характерные продольный и поперечный линейные размеры пучка: рэлеевскую длину $z_0=kw_0^2/2$ и размер перетяжки w_0. Далее введём безразмерные переменные и параметры: $X=x/w_0$; $Y=y/w_0$; $Z=z/z_0$; $Q=Z-iQ_0$; $R=\sqrt{X^2+Y^2}$.

Явные выражения в безразмерной замкнутой форме для четных и нечетных пучков *W-G* соответственно имеют вид:

$$f_e = \frac{1}{Q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_\perp (R+X)}{Q}\right) \cdot M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_\perp (R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_\perp}{2}\right)^2\right], \quad (1)$$

$$f_o = \frac{Y}{Q^2} M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_\perp (R+X)}{Q}\right) \cdot M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_\perp (R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_\perp}{2}\right)^2\right]. \quad (2)$$

Здесь $K_\perp$ и a – соответственно безразмерные поперечная составляющая волнового вектора и постоянная разделения переменных. М.А. Бэндрес и др. [2] предложили использовать вещественные решения уравнения Гельмгольца в параболических координатах; такие решения представимы в виде рядов с вещественными членами. Однако явные замкнутые аналитические выражения для функций Бэндреса P_e и P_o и для пучков *W-G* в литературе, насколько нам известно [3-5], не приводятся. Уравнения пучков *W-G* в безразмерной форме являются функциями трех пространственных переменных (X,Y,Z) и только трех свободных параметров $(K_\perp, a, Q_0)$. Такие пучки должны быть физически реализуемыми, т.е. переносить конечную мощность. Используя подход [6] для нахождения ограничений на параметры пучков Бесселя – Гаусса, нетрудно показать, что условием конечности переносимой мощности для пучков *W-G* является неравенство $Q_0 > 0$. При этом на параметры $K_\perp$ и a не накладываются никакие ограничения – эти параметры могут быть произвольными непрерывными комплексными константами.

2. Графическое моделирование распределения интенсивности в поперечном сечении пучков Вебера-Гаусса

Пучки *W-G* принадлежат семейству пучков Гельмгольца – Гаусса (*Hl-G*), введенных Бэндресом и др. [3]. При значении параметра $\gamma = k_\perp w_0 / 2 > 1$, в соответствии с [1], пучок *Hl-G* остаётся бездифракционным до расстояния $z_{\max} = kw_0 / k_\perp$, а затем расходится; при этом формируется кольцеобразная картина распределения интенсивности. Произведем численные оценки различных величин, характерных для пучков *W-G*. Как и в работе [3], полагаем, что длина волны $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$ м, размер перетяжки гауссиана $w_0 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тогда волновое число $k \approx 10^7$ м и при параметре $k_\perp = 10^4$ м$^{-1}$ имеем $z_{\max} \approx 2$ м. При использовании введённых нами безразмерных обозначений находим: $K_\perp \approx 20$, $\gamma = K_\perp / 2 \approx 10$. Безразмерное расстояние $Z_{\max} = z_{\max} / z_0 = 2 / K_\perp$, до которого пучок *W-G* всё еще сохраняет свое квазибездифракционное поведение, равно $Z_{\max} \approx 0{,}1$. При графическом моделировании подтверждена правильность этих оценок.

Картины распределения интенсивности могут быть самыми разнообразными – в зависимости от задаваемых параметров a, $K_{\perp}$ и расстояния Z. Они инвариантны относительно преобразований ($a \to -a$) и ($x \to -x$) и симметричны относительно оси OX. На рисунке 1 изображены распределения интенсивности в поперечных сечениях пучков *W*-G при $a = 0$ и различных расстояниях *Z* в области бездифракционного распространения. Геометрические места точек, соответствующих определенным значениям интенсивности, представляют семейство софокусных парабол, которое при возрастании Z остается практически неизменным. На параболы накладывается гауссиан, поперечное сечение которого увеличивается с увеличением *Z*.

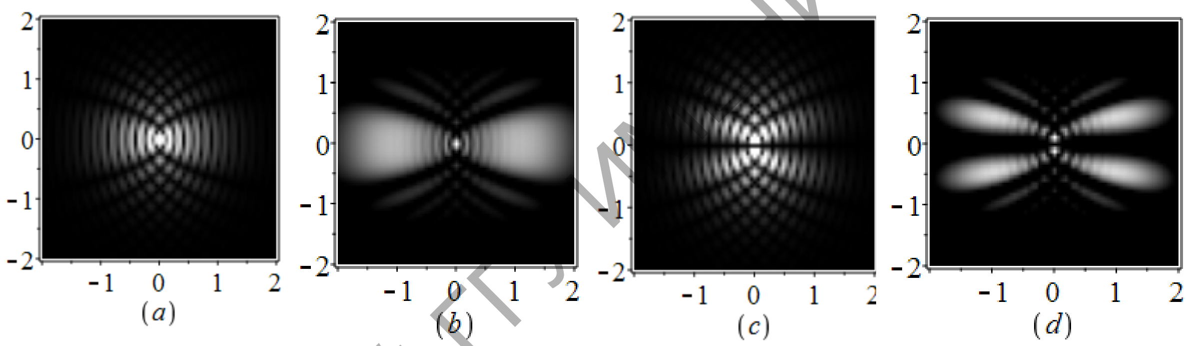

Рисунок 1 – Распределение интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков *W-G* $(a): I_e, a = 0, Z = 0$; $(b): I_e, a = 0, Z = 0{,}06$; (c): $I_o, a = 0, Z = 0$. (d): $I_o, a = 0, Z = 0{,}12$

До настоящего времени параметры a предполагались только вещественными [3-5]. Однако они могут быть и комплексными. Пучки *W-G* при комплексных *a* до настоящего времени не изучались. Тем не менее, они обладают свойствами, представляющими практический интерес. Например, при $a = i/2$ четный пучок *W-G* редуцируется к децентрированному (смещенному) гауссову пучку. Анализируя иллюстрации, представленные на рисунке 2, где изображены картины распределения интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков *W-G* при чисто мнимых значениях параметра *a*, убеждаемся в правильности этого утверждения.

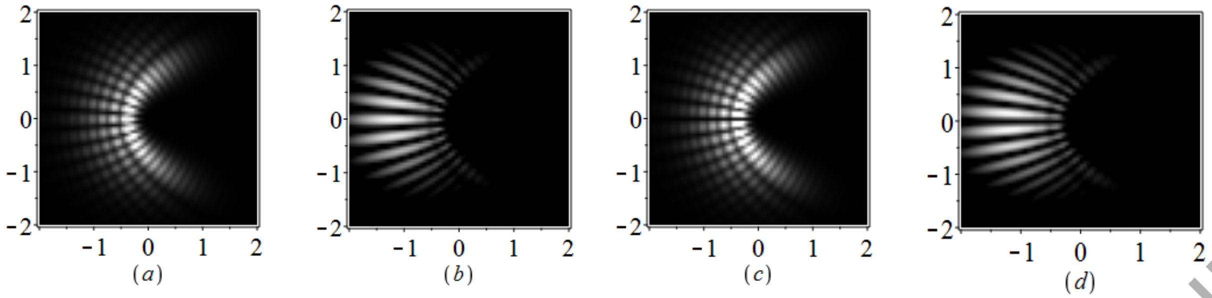

Рисунок 2 – Распределение интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков *W-G* при чисто мнимых значениях параметра *a*

(a): $I_e, a = i/2, Z = 0$; (b): $I_e, a = i/2, Z = 0{,}06$; (c): $I_o, a = i/2, Z = 0$; (d): $I_o, a = i/2, Z = 0{,}06$

На рисунке 2 видно, что с увеличением расстояния Z в области бездифракционности для пучков обоих типов форма парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси OX.

На рисунке 3 иллюстрированы распределения интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков *W-G* при комплексном параметре *a*.

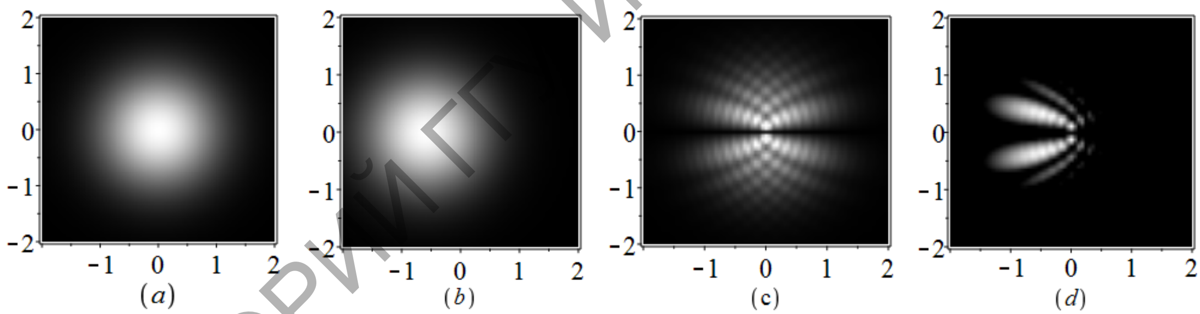

Рисунок 3 – Картины интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков *W-G* при комплексных значениях параметра *a*. (a): $I_e, a = i/2+6, Z = 0$; (b): $I_e, a = i/2+6, Z = 0{,}12$; (c): $I_o, a = i/2, Z = 0$; (d): $I_o, a = i/2, Z = 0{,}12$

Видно, что с увеличением расстояния *Z* в области бездифракционности пучков форма парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси OX, как и в случае пучков, характеризующихся чисто мнимым значением параметра *a*.

Заключение

В статье получены явные выражения пучков *W-G* в безразмерной замкнутой форме. Показано, что свойства пучков *W-G* зависят от трех пространственных переменных (X, Y, Z) и только от трех свободных параметров ($K_{\perp}$, a, Q_0). Установлено условие конечности переносимой мощности этих пучков: $Q_0 > 0$. При этом на параметры $K_{\perp}$ и a не накладывается никаких ограничений; эти параметры могут быть произвольными непрерывными комплексными константами, что подтверждено в результате анализа распределения интенсивности, построенного при графическом моделировании его для пучков *W-G* с различными значениями свободного параметра a (включая комплексные).

Варьируя комплексные свободные параметры a и $K_{\perp}$ таких пучков, можно создавать и исследовать пучки с заданными свойствами, целесообразными для конкретных практических приложений.

Литература

1. Gori, F. Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Communs. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.

2. Bandres, M.A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, Issue 1. – P. 44–46.

3. Gutierrez-Vega, Julio C. Helmholtz-Gauss waves / C. Julio Gutierrez-Vega and Miguel A. Bandres. // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 25, № 2. – P. 289–298.

4. Rodrıguez-Lara, B. M. Dynamical constants of structured photons with parabolic-cylindrical symmetry / B. M. Rodrıguez-Lara and R. Jauregui // Phys. Rev. A. – 2009. – Vol. 79, №5. – P.055806(4).

5. Rodrıguez-Lara, B. M. Normalization of optical Weber waves and Weber–Gauss beams / B. M. Rodrıguez-Lara // JOSA A. – 2010. – Vol. 27, № 2. – P. 327–332.

6. Гиргель, С.С. Обобщенные пучки Бесселя-Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.

7. Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.

8. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.