

Т.П. Желонкина, С.А. Лукашевич, А.А. Гузовец
УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Одним из фундаментальных физических законов является закон сохранения электрического заряда. Выразим его математически через макроскопические величины: плотность заряда ρ и плотность электрического тока $\mathbf{j}$. Выбираем в этом случае в некоторой среде произвольную замкнутую поверхность E , ограниченную объемом v (рисунок 1).

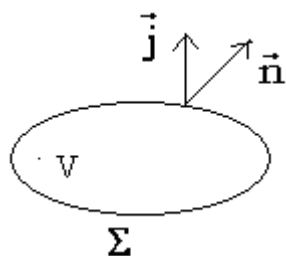


Рисунок 1

В этом случае баланс заряда в объеме v , ограниченном замкнутой поверхностью Σ представляется в дифференциальном виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint j_n d\Sigma. \quad (1)$$

Сам заряд

$$q = \int \rho dV. \quad (2)$$

Преобразовав поверхностный интеграл в объемный $\int \text{div} j dV$, мы придем к следующему соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\int \text{div} j dV.$$

Это соотношение должно выполняться для произвольного объема v , а поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} j. \quad (3)$$

Формула (3) выражает закон сохранения заряда в макроскопической электродинамике. Такой же вид в дифференциальной форме должны иметь все законы сохранения физических величин.

Рассмотрим следующий закон – закон сохранения энергии

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{S}, \quad (4)$$

где ω – плотность электромагнитной энергии, $\vec{S}$ – вектор потока энергии.

Это равенство верно в случае, когда не происходит преобразование энергии данного вида в другие виды энергии. В некотором бесконечно малом объеме может быть несколько видов энергии – энергия покоя частиц $m_0 \vec{v}^2$, энергия их взаимодействия, энергия хаотического теплового движения, энергия электромагнитного поля.

Формула $\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{S}$ верна только для одного вида энергии и только в том случае, когда нет перехода одного вида энергии в другие.

В интегральной форме данное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\oint_{\Sigma} S_n d\Sigma, \quad (5)$$

где w – полная энергия, а S_n – имеет смысл потока энергии.

Если имеет место преобразование одного вида энергии в другой внутри самого объема v , то $\frac{\partial w}{\partial t}$ будет определяться не только перетеканием через поверхность, но также убылью (или увеличением) энергии за счет перехода в другой вид энергии. Поэтому уравнение нужно дополнить в правой части одним или несколькими членами, отражающими преобразование энергии, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \omega dv = -\oint_{\Sigma} S_n d\Sigma + P - Q, \quad (6)$$

где P – работа сторонних сил, Q – Джоулево тепло, выделяемое в единицу времени.

$$P = \int_v N dv, \quad Q = \int_v q dv,$$

где N – плотность мощности сторонних сил, q – плотность секундного выделения Джоулева тепла

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \omega dv = -\int_v \text{div} \vec{S} + \int_v N dV - \int_v q dV. \quad (7)$$

В дифференциальном виде закон сохранения энергии представляется следующим образом

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{S} + N - q. \quad (8)$$

Величины ω и $\vec{S}$ должны быть связаны с напряженностями электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Эту связь считаем известной

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (9)$$

В курсе общей физики плотность энергии электрического поля плюс плотность энергии магнитного поля получается в частных случаях заряженного конденсатора и соленоида, по которому протекает

ток, а затем эти выражения обобщаются на все случаи, исходя из принципа близко действия.

В формальной теории поля рассуждения те же самые, только применяется другой математический аппарат. Для вектора Пойтинга $\vec{S}$ следует поступить таким же образом, а именно установить функциональную связь между векторами $\vec{S}$ и векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для частного случая (или по крайней мере не для самого общего случая), а затем принять эту функциональную связь верной в любом случае.

Рассмотрим процедуру доказательства теоремы Пойтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 \mu H^2}{2} + \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}. \quad (11)$$

Далее используем уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} - \vec{j} &= \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{H} \text{rot} \vec{E} + \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (13)$$

А теперь используем тождество:

$$\vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} = -\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}], \quad (14)$$

получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div} \vec{E} \times \vec{H} - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (15)$$

Сравнение с дифференциальной формой закона сохранения энергии (8) позволяет сделать вывод, что

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (16)$$

В данной формуле нет ограничений на зависимость $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от времени, хотя в процедуре получения этой формулы использовались явно

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ (точнее $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$). Это обстоятельство является по видимому методическим препятствием для обобщения формулы (16) на все случаи, в том числе на стационарные поля.

Для преодоления этого препятствия методически целесообразно дать некоторое количество задач на использование вектора Пойтинга в стационарных полях.

В стационарном случае $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ и уравнение баланса энергии принимает вид:

$$0 = -\operatorname{div} \vec{S} + N - \vec{j} \vec{E}. \quad (17)$$

Знак минус плотности мощности внешних сил, за счет которых происходит преобразование электромагнитной энергии в другие виды и наоборот, следует определять в конкретных случаях, знак $\operatorname{div} \vec{S}$ может быть отрицательным, т.е. это значит, что энергия притекает к данной точке.

Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики Т.3. Электричество / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – 688с.
2. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М.Сэндс. – М.: Мир, 1977. – 348с.
3. Матвеев, А.Н. Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1987. – 464с.