

**С.С. Гиргель**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

**АСИММЕТРИЧНЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ-ГАУССА  
НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА**

**Введение**

В последнее время производится поиск и исследования новых типов световых пучков [1–5]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя и пучки Бесселя-Гаусса (ПБГ) [5–11]. Как хорошо известно [6], пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности. Вместе с тем, они переносят бесконечную мощность и не могут быть реализованы практически. Использование гауссовой аподизации функций Бесселя позволяет перейти к скалярным

ПБГ [7], которые переносят конечную мощность и могут быть реализованы практически, хотя свойство бездифракционности, строго говоря, при этом нарушается. Свойства векторных ПБГ исследовались нами в [12], [13]. Фракционные обобщенные ПБГ были введены нами в [14] и найдены условия их физической реализуемости.

Недавно, в 2014–2016 годах, в [15–18] были введены и экспериментально получены асимметричные ПБГ (aBG-моды). В настоящей работе производится обобщение результатов [14–16]. Найден новый тип пучков – асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка, сформулированы условия их физической реализуемости и обсуждаются их физические свойства.

### 1. Новый тип асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка

Исходя из 3D параболического уравнения [1], описывающего скалярные параксиальные монохроматические световые пучки, распространяющиеся в направлении оси  $z$  и перейдя к цилиндрической системе координат нами в [14] было получено выражение

$$f = \frac{1}{q} \exp \left[ i \left( \frac{k}{2q} \left( \rho^2 - \left( \frac{Kz_0}{k} \right)^2 \right) \right) \right] \exp(i\nu\varphi) J_\nu \left( \frac{-iK\rho z_0}{q} \right), \quad (1)$$

описывающее обобщенные ПБГ непрерывного порядка  $\nu$ . Здесь и далее фазовый множитель  $\exp(ikz - i\omega t)$  опускается. Стандартные обозначения:  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , азимутальный угол  $\varphi = \arctg(y/x)$ ;  $J_\nu$  – функции Бесселя I рода [19]. Постоянные разделения переменных  $\nu$  и  $K$  в (1) являются свободными параметрами. В случае классических ПБГ [7]  $K = k_\perp$ , где  $k_\perp$  – вещественная поперечная составляющая волнового вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_z$  и, кроме того, порядок (индекс)  $\nu$  является целочисленным. Амплитуда  $f$  ПБГ в (1) содержит гауссиан  $G = \frac{1}{q} \exp \left[ \frac{ik\rho^2}{2q} \right]$ , комплексный параметр пучка  $q = z - q_0$ . Величины  $w_0$  и  $z_0 = kw_0^2/2$  – характерные размеры пучка вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно.

Чтобы получить выражения, характеризующие асимметричные ПБГ непрерывного порядка  $\nu$ , перейдем в (1) к новым поперечным переменным соотношениями:

$$x_1 = x - x_0, \quad y_1 = y - y_0, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad (2)$$

где константы  $x_0, y_0$  – произвольные комплексные параметры смещений поперечных координат  $x$  и  $y$ . Получаем

$$f = \frac{1}{q} \exp \left[ i \left( \frac{k}{2q} \left( r_1^2 - \left( \frac{Kz_0}{k} \right)^2 \right) \right) \right] \left[ \frac{x_1 + iy_1}{r_1} \right]^\nu J_\nu \left( \frac{-iKr_1 z_0}{q} \right). \quad (3)$$

Здесь набег комплексной фазы  $\exp(i\nu\varphi)$  представлен в другой форме, чем в (1), использующей известную формулу  $\arctg(t) = (-i/2) \ln[(1+it)/(1-it)]$ , которая применялась недавно физиками в [11], [15–18] для описания асимметричных мод и ранее в работе [20] для описания 2-D волнового пакета X-волн Бесселя.

Асимметричные ПБГ (3) зависят от трех переменных ( $x, y, z$ ) и семи параметров ( $k, K, z_0, q_0, x_0, y_0, \nu$ ). Число независимых свободных параметров можно уменьшить, если перейти к безразмерным величинам соотношениями:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1/w_0 = X - X_0, \quad Y_1 = y_1/w_0 = Y - Y_0, \\ Z &= z/w_0, \quad K_1 = Kw_0, \quad R_1 = r_1/w_0 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем также безразмерный параметр пучка  $Q = q/z_0 \equiv Z - Q_0$ .

Теперь асимметричные обобщенные ПБГ зависят от трех безразмерных переменных ( $X, Y, Z$ ), пяти безразмерных свободных параметров ( $X_0, Y_0, Q_0, K_1, \nu$ ) и описываются выражением

$$f = \frac{1}{Q} \exp \left[ \frac{i}{Q} \left( R_1^2 - \frac{K_1^2}{4} \right) \right] \left[ \frac{X_1 + iY_1}{R_1} \right]^\nu J_\nu \left( \frac{-iK_1 R_1}{Q} \right). \quad (5)$$

## 2. Условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка

Пучок будем считать физически реализуемым, если его комплексная амплитуда является конечной во всем пространстве, а переносимая им мощность через любое сечение, перпендикулярное оси пучка, также является конечной. Эти требования сводятся к непрерывности и квадратичной интегрируемости (КИ) комплексной амплитуды пучка.

Проанализируем условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка (5).

Основной вклад в КИ ПБГ (5) вносит гауссиан  $G$ . Для стандартного  $G$  условие КИ [1]:  $\text{Im}(Q_0) > 0$ . Множитель  $\exp(-iK_1^2/(4Q))$  в (5) не зависит от поперечных координат и не влияет на КИ. Несложно показать, что комплексные смещения  $X_0$  и  $Y_0$  также не влияют на КИ гауссиана, а лишь приводят к его децентровке. При  $Z \rightarrow \infty$  гауссиан  $G \rightarrow 0$ .

Комплексность масштабирующего параметра  $K_1$  не нарушает КИ амплитуды пучка  $f$  из-за гауссиана, поэтому на параметр  $K_1$  не накладываются никакие ограничения и он может быть произвольным комплексным числом.

При  $|u| \rightarrow \infty$  функция  $J_\nu(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$  [19]. Поэтому функция  $J_\nu(u)$  не нарушает достаточного условия  $\text{Im}(Q_0) > 0$  КИ гауссиана в (5).

Авторы в работе [11] заметили, что когда  $r_1$  в фазовой функции  $[(x_1 + iy_1)/r_1]^\nu$  в выражении типа (3) обращается в нуль, тогда одновременно и аргумент функции Бесселя стремится к нулю и неопределенность вида 0/0 раскрывается.

Так как функция Бесселя имеет особенность при  $u \rightarrow 0$ , то отсюда следует необходимость  $\text{Re}(\nu) > 0$ . Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части порядка  $\nu$  приводит к разрывам в графиках интенсивности для функции  $f(X, Y, Z)$ , что недопустимо. Отсюда следует, что индекс  $\nu$  должен быть вещественным и неотрицательным, т.е.  $\nu \geq 0$ .

Итак, общие условия физической реализуемости новых асимметричных ПБГ (5):

$$Q_0'' > 0 \text{ и } \nu \geq 0. \quad (6)$$

Поскольку индекс  $\nu$  может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной  $2\pi$ . Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [2–5], [21]. Поэтому обсуждаемые нами новые ПБГ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

В давней работе Валдрона [22] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок)  $\nu$  таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений:  $\nu \geq 0$ . Согласно интерпретации Оверфельт [23] в таких случаях непрерывный индекс  $\nu$  связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (5) и (6). Непрерывный порядок  $\nu$  дает основание полученные пучки (5) трактовать, как фракционные асимметричные обобщенные ПБГ, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок)  $\nu$  фракционных обобщенных ПБГ (6) становится целым числом и  $X_0 = Y_0 = 0$ , наши выражения (5) эквивалентны выражениям для обобщенных ПБГ, рассматриваемых в работах [8–10]. Заметим, однако, что наши более общие формулы (5) имеют в то же время более простую форму, чем соответствующие формулы в [8–10].

### 3. Обсуждение результатов

Известно [7], что для стандартных ПБГ картина интенсивности состоит из светлых колец, амплитуда которых постепенно убывает от оси пучка. Вещественные части параметров  $X_0$  и  $Y_0$  приводят лишь к смещению пучка параллельно оси  $OZ$ , без изменения его формы, поэтому нами не рассматриваются. Мнимые же части параметров  $X_0$  и  $Y_0$  приводят к сильному искажению пространственной формы ПБГ и их асимметрии. При непрерывном изменении индекса  $\nu$  амплитуда пучков (5) и их интенсивности изменяются также непрерывно и плавно.

Нами проводилось компьютерное моделирование интенсивности в поперечных сечениях асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в зависимости от нескольких свободных параметров. В качестве примеров на рисунках 1 и 2 изображены 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в поперечном сечении с общими параметрами:  $\nu = 1,5$ ;  $X_0 = 0$ ;  $Y_0 = 0,05i$ . Полагаем во всех случаях  $Q_0 = i$ , что соответствует обычной нормировке гауссиана.

Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения пропорциональна ординате пространственной фигуры. Так как  $\nu > 1$ , то все пучки – полые. На рисунках 1 полагаем  $\text{Re}(K_1) = 10$ , что соответствует преобладанию вклада функции Бесселя над вкладом функции Гаусса. На рисунке 1,а видно, что ПБГ с нецелым порядком ведет себя качественно, как стандартный асимметричный ПБГ. На рисунках 1,а и 1,б видно, что изменение  $\text{Im}(K_1)$  приводит к существенному изменению 3D картины интенсивности. Рисунки 1,а и 1,с характеризуют влияние роста расстояния  $Z$ . Рисунки 2,ф; 2,е; 1,б и 2,д иллюстрируют пригодность вещественных отрицательных, чисто мнимых и комплексных параметров  $K_1$ .

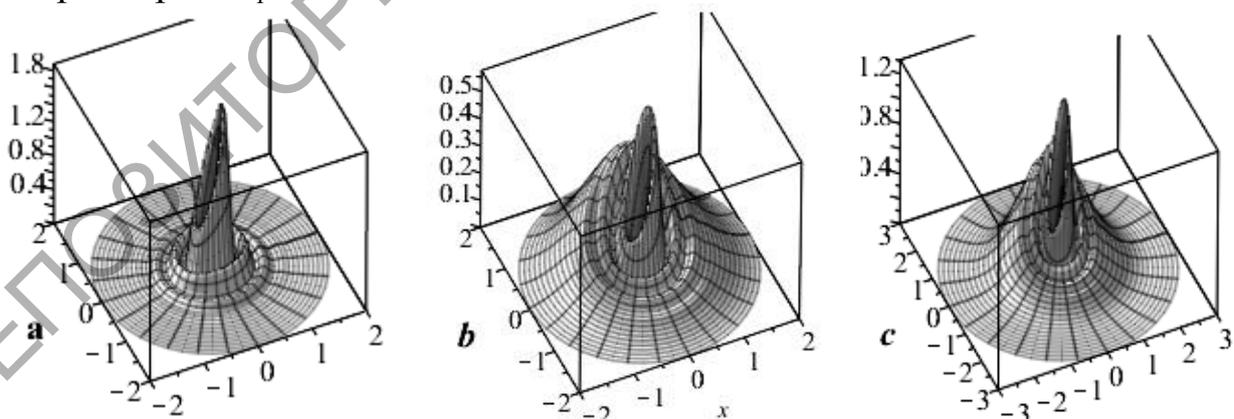


Рисунок 1 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя-Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами:

$$Q_0 = i; \nu = 1,5, X_0 = 0, Y_0 = 0,05i$$

Варианты: а)  $K_1 = 10, Z = 0$ ; б)  $K_1 = 10 - 2i, Z = 0$ ; в)  $K_1 = 10, Z = 0,2$

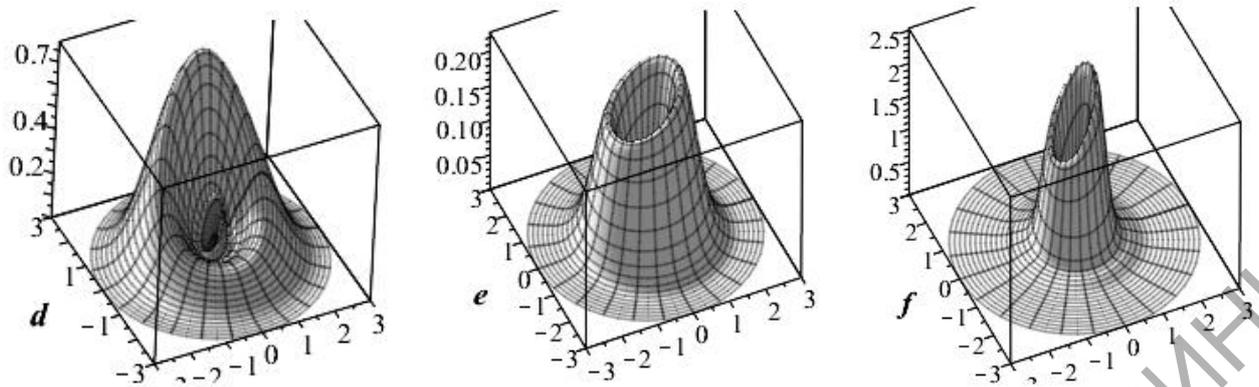


Рисунок 2 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя-Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами:

$$Q_0 = i; \nu = 1,5; X_0 = 0; Y_0 = 0,05i; Z = 0,2.$$

Варианты: d)  $K_1 = 10 - i$ ; e)  $K_1 = -i$ ; f)  $K_1 = -4$

Как и следовало ожидать, при комплексных  $K_1$ ,  $X_0$  и  $Y_0$  и нецелых  $\nu$  картины интенсивности существенно усложняются. Например, с увеличением  $\text{Im}(K_1)$  и ростом расстояния  $Z$  кольца картины, обусловленные функцией Бесселя, постепенно исчезают; с ростом мнимого смещения  $\text{Im}(Y_0)$  пик интенсивности возрастает.

### Заключение

Выведены выражения, описывающие новый тип пучков – асимметричные обобщенные ПБГ непрерывного порядка, обладающие спиральным волновым фронтом. Они характеризуются пятью свободными параметрами: одним вещественным непрерывным  $\nu$  и четырьмя комплексными параметрами ( $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Q_0$ ,  $K_1$ ). Частными случаями введенных здесь пучков являются известные обобщенные ПБГ с дискретными целочисленными индексами  $\nu$ , дробные пучки Бесселя со спиральным волновым фронтом, а также асимметричные ПБГ Котляра и Ковалева.

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве:  $Q_0'' > 0$  и  $\nu \geq 0$ . Одновременный переход от дискретных значений  $\nu$  к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям  $K_1$  сильно расширяет класс известных в настоящее время асимметричных ПБГ. Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведено графическое моделирование интенсивности таких пучков, которое подтверждает основные аналитические результаты.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных асимметричных ПБГ могут, в принципе, быть использованы некоторые методики получения асимметричных [15–18] и фракционных [5] пучков.

В настоящем сообщении обсуждались скалярные асимметричные фракционные обобщенные ПБГ. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [23], [24].

## Литература

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102. – № 4. – С. 661–681.
2. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32. – № 11. – P. 1521–1523.
3. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15. – № 10. – P. 6300–6313.
4. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).
5. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiacong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43. – № 1. – P. 122–126.
6. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4. – № 4. – P. 651–654.
7. Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64. – № 6. – P. 491–495.
8. Generalized Bessel-Gauss beams / V. Bagini [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43. – № 6. – P. 1155–1166.
9. Imaging of generalized Bessel-Gauss beams / C. Palma [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43. – № 11. – P. 2269–2277.
10. Santarsiero, M. Propagation of general Bessel-Gauss beams through ABCD optical systems / M. Santarsiero // Optics Communications. – 1996. – Vol. 132. – P. 1–7.
11. Котляр, В.В. Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом // В.В. Котляр, А.А. Ковалев, В.А. Соيفер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38. – № 1. – С. 4–9.

12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6(9). – С. 146–149.

13. Гиргель С.С. Модовые и энергетические характеристики векторных бесселевых световых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6(39). – Ч.1. – С. 49–52.

14. Гиргель, С.С. Обобщенные пучки Бесселя-Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2(25). – С. 10–15.

15. Ковалев, А.А. Вращающиеся элегантные пучки Бесселя-Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38. – № 2. – С. 162–168.

16. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Journ. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31. – № 9. – P. 1977–1983.

17. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Journ. Appl. Phys. – 2016. – Vol. 120. – P. 023101(5).

18. Порфирьев, А.П. Оптический захват и перемещение микрочастиц с помощью асимметричных пучков Бесселя-Гаусса / А.П. Порфирьев, А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40. – № 2. – С. 152–157.

19. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. II. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // М. : Наука, 1974. – 295 с.

20. Christodoulides, D.N. Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, V.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – V. 29. – № 13. – P. 1446–1448.

21. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003. – № 6. – P. 259–268.

22. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R. A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. 11. – № 4. – P. 438–461.

23. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev.A. – 1992. – Vol. 46. – № 6. – P. 3516–3522.

24. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 11–14.

25. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 20–24.