УДК 512.544

О НОРМАЛЬНЫХ ПОДКЛАССАХ КЛАССА ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.Н. Воробьев

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON NORMAL SUBCLASSES OF FISCHER CLASS OF FINITE GROUPS

S.N. Vorob'ev

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Пусть $\mathfrak{X}$ –π-разрешимый класс Фишера. В работе изучаются π-насыщенные классы Фиттинга, нормальные в $\mathfrak{X}$. Доказано, что пересечение любого множества таких классов является π-насыщенным классом Фитинга, нормальным в $\mathfrak{X}$.

***Ключевые слова**: класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$-инъектор, класс Фишера, полулокальный класс Фиттинга.*

Let $\mathfrak{X}$ be a π-solvable Fischer class. In the paper we studied π-saturated Fitting classes, which are normal in $\mathfrak{X}$. It is proved, that intersection of any set of such classes is a π-saturated Fitting class, which is normal in $\mathfrak{X}$.

***Keywords**: Fitting class, $\mathfrak{F}$-injector, Fischer class, semilocal Fitting class.*

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Классы Фиттинга, как объекты дуальные формациям групп, были впервые определены в работах Фишера [1] и Гашюца, Фишера, Хартли [2]. Напомним, что классом Фиттинга называют такой класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Основополагающим результатом для становления и развития теории классов Фиттинга является теорема Гашюца-Фишера-Хартли [2] (см. также [3], теорема VIII.2.13) о том, что для любого разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов G. При этом подгруппу V группы G называют *$\mathfrak{F}$-инъектором* G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G. Заметим, что если $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_\pi$ классу всех разрешимых π-групп (в частности, $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p$ классу всех p-групп), то $\mathfrak{F}$-инъектор G – это холлова π-подгруппа G (в частности, силовская p-подгруппа G), и поэтому следствиями указанной выше теоремы являются фундаментальная теорема Холла (теорема Силова в разрешимом случае) соответственно.

Существенное различие между теориями классов Фиттинга и формаций было установлено Блессенолем и Гашюцом в работе [4], где определены разрешимые нормальные классы Фиттинга и построена серия нетривиальных нормальных классов Фиттинга, которые не являются формациями. Кроме того, в [4] было доказано, что пересечение любого множества неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга снова является неединичным разрешимым нормальным классом Фиттинга. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ *называется нормальным в классе* $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп или просто *нормальным*, если в любой группе $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор – нормальная подгруппа G.

Ориентиром для изучения нормальных классов Фиттинга и поиска аналогов теоремы Блессеноля-Гашюца для таких классов в неразрешимом случае служит теорема Л.А. Шеметкова [5] о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в π-разрешимой группе (π – множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$) существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. В этом направлении исследований естественно расширить и само понятие нормальности классов Фиттинга следующим образом. Пусть класс $\mathfrak{F}$ – Фиттинга, инъективный в классе групп $\mathfrak{X}$, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ имеет $\mathfrak{F}$-инъекторы. Тогда $\mathfrak{F}$ назовем *нормальным в* $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}$-*нормальным* (см. также [6]), если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G.

Основное содержание настоящей работы состоит из двух взаимосвязанных частей. В первой из них (теорема 3.3) найдены новые классы сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в любой π-разрешимой группе для классов Фиттинга, определяемых полулокально функциями Хартли с носителем π, т. е. π-насыщенных классов Фиттинга. (Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется π-насыщенным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$).

Вторая часть работы содержит ее основной результат – теорему 4.7 о том, что пересечение любого множества π-насыщенных классов Фиттинга, нормальных в π-разрешимом классе

Фишера $\mathfrak{X}$, является π-насыщенным классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{X}$.

Заметим, что если $\pi=P$ множеству всех простых чисел, то следствием теоремы 3.3 является теорема Гашюца-Фишера-Хартли [2], а в случае $\pi=P$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$ следствием теоремы 4.7 – теорема Блессеноля-Гашюца [5].

Определения и обозначения, которые мы не приводим, в случае необходимости можно найти в монографиях [3], [7].

1 Предварительные сведения

Напомним, что классом групп называется такое множество групп, которое наряду с каждой группой содержит ей изоморфную.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется:

1) *классом Фиттинга*, если выполняются следующие условия: (i) из $G\in\mathfrak{F}$ и $N\lhd G$ следует, что $N\in\mathfrak{F}$, и (ii) если $G=MN$, $N\lhd G$, $M\lhd G$, $N\in\mathfrak{F}$ и $M\in\mathfrak{F}$, то $G\in\mathfrak{F}$;

2) *формацией*, в случае выполнимости условий: (j) из $G\in\mathfrak{F}$ и $N\lhd G$ следует, что $G/N\in\mathfrak{F}$, и (jj) если $N\lhd G$, $M\lhd G$, $G/M\in\mathfrak{F}$ и $G/N\in\mathfrak{F}$, то $G/M\cap N\in\mathfrak{F}$.

Заметим, из условия (ii) следует, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-радикал G, а из условия (jj) вытекает, что для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ в каждой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G такая, что $G/G^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$.

Символами $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{\pi}$ будем обозначать класс всех разрешимых групп и класс всех π-разрешимых групп. Если класс $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}^{\pi}$), то $\mathfrak{F}$ будем называть разрешимым (π-разрешимым) классом.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда их *произведение* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – класс групп $(G{:}G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Мы будем использовать следующее свойство произведений разрешимых нормальных классов Фиттинга.

***Лемма* 1.1** [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – разрешимые классы Фиттинга. Если класс $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ нормален, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – нормальный класс Фиттинга.*

Для характеризации нормальных классов Фиттинга используют также операторы Локетта [9], которые обозначают «*» и «$_*$». Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ наименьший из классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H, а оператор «$_*$» сопоставляет $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*=\cap\{\mathfrak{X}{:}\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*\}$.

***Лемма* 1.2** [9]. *Разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{S}$.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.3** [10]. *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Тогда *холловой π-подгруппой группы G* называют такую подгруппу H из G, что $|H|$ является π-числом, а ее индекс $|G{:}H|$ – π'-числом. В теории групп известна следующая теорема:

***Теорема* 1.4** (С.А. Чунихин [11]). *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *в G существуют холловы π-подгруппы*;

2) *любые две холловы π-подгруппы G сопряжены*;

3) *каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе G.*

Приведем также простейшие свойства $\mathfrak{F}$-инъектора группы, которые вытекают непосредственно из его определения.

***Лемма* 1.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G. Тогда*:

1) *подгруппа $V\cap K$ является $\mathfrak{F}$-инъектором K для любой субнормальной подгруппы K группы G*;

2) $V\supseteq G_{\mathfrak{F}}$;

3) *если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G и $V\cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M для каждой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G*;

4) *V является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G.*

***Лемма* 1.6** [5], [12]. *Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любой группы $G\in\{\mathfrak{F}\mathfrak{S},\mathfrak{S}^{\pi}\}$*, где $\pi=\sigma(\mathfrak{F})$, *в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Напомним, что если G – группа, то символом $\sigma(G)$ будем обозначать множество всех простых делителей $|G|$. Тогда $\sigma(\mathfrak{X})=\cup\{\sigma(G){:}\ G\in\mathfrak{X}\}$, т. е. множество всех простых делителей всех групп из класса $\mathfrak{X}$.

***Теорема* 1.7** (Фейта-Томпсона [13]). *Каждая группа нечетного порядка разрешима.*

***Лемма* 1.8** [3]. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G и ее субнормальной подгруппы K справедливо равенство $K_{\mathfrak{F}}=G_{\mathfrak{F}}\cap K$.*

2 Классы Фиттинга, определяемые полулокально

Напомним, что всякое отображение f множества P всех простых чисел во множество (возможно, пустое) классов Фиттинга называют *функцией Хартли*, или *H-функцией* [14]. Если f – некоторая H-функция, то множество $\mathrm{Supp}(f)=\{p\in\mathrm{P}{:}\ f(p)\neq\varnothing\}$ – носитель H-функции f. Пусть класс Фиттинга $\mathrm{SLR}(f)=\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{E}_{p'}$, где $\pi=\mathrm{Supp}(f)$. Если $\pi=\varnothing$, то положим $\mathrm{SLR}(f)=\varnothing$. Класс Фиттинга назовем *полулокальным*, если $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$ для некоторой H-функции f. В этом случае мы будем также говорить, что $\mathfrak{F}$ определяется полулокально H-функцией f с носителем π.

Для характеризации классов Фиттинга, определяемых полулокально, предварительно установим некоторые простейшие свойства произведений классов Фиттинга, которые представляет

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\{\mathfrak{X}_i: i\in I\}$ – некоторое множество классов Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\cap_{i\in I}\mathfrak{F}\mathfrak{X}_i=\mathfrak{F}(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)$;

2) *если класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то* $\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i\mathfrak{F}=(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$.

Доказательство. Заметим, что если $\mathfrak{F}=\varnothing$ или $\mathfrak{X}_i=\varnothing$ для некоторого $i\in I$, то лемма очевидна. Предположим, что классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}_i$ для каждого $i\in I$ являются непустыми. Если группа $G\in\cap_{i\in I}\mathfrak{F}\mathfrak{X}_i$, это равносильно тому, что $G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{X}_i$ для всех $i\in I$. Следовательно, $G\in\mathfrak{F}(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)$ и утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть G – группа из класса $\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i\mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}_i}\in\mathfrak{F}$ для каждого $i\in I$. Но класс $\mathfrak{F}$ – формация, и поэтому $G/\bigcap_{i\in I}G_{\mathfrak{X}_i}\in\mathfrak{F}$. Нетрудно заметить, что $\cap_{i\in I}G_{\mathfrak{X}_i}=G_{(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)}$. Следовательно, $G\in(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$ и справедливо включение $\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i\mathfrak{F}\subseteq(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть группа $G\in(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)}\in\mathfrak{F}$. Очевидно, $G_{(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)}\trianglelefteq G_{\mathfrak{X}_i}$ для всех $i\in I$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация и справедлив изоморфизм

$$G/G_{(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)}/G_{\mathfrak{X}_i}/G_{(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)}\cong G/G_{\mathfrak{X}_i},$$

то $G/G_{\mathfrak{X}_i}$ является $\mathfrak{F}$-группой. Отсюда следует, что $G\in\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i\mathfrak{F}$ и верно включение

$$(\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i)\mathfrak{F}\subseteq\cap_{i\in I}\mathfrak{X}_i\mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

Обширность семейства полулокальных классов Фиттинга показывает

***Лемма* 2.2.** *Класс $\mathfrak{F}$ определяется полулокально H-функцией f с носителем π тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Если $\pi=\varnothing$ или $\pi=P$, то лемма очевидна. Предположим, что $\varnothing\subset\pi\subset P$. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=(\cap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{E}_{\pi'})\mathfrak{E}_{\pi'}$. Ввиду ассоциативности умножения классов Фиттинга и утверждения 2 леммы 2.1 получаем, что

$$\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\cap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi'}.$$

Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\cap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$.

Обратно, если $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(\cap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{\pi'})$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 2.1 $\mathfrak{F}=\cap_{p\in\pi}\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$ для H-функции f такой, что $f(p)=\mathfrak{F}$ для всех $p\in\pi$. Лемма доказана.

***Следствие* 2.3.** *Класс $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ всех π-специальных групп и класс $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ всех π-замкнутых групп является полулокальными.*

***Пример* 2.4.** Пусть π – носитель H-функции f и класс Фиттинга $\mathrm{LR}(f)=\mathfrak{E}_\pi\cap(\cap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [14], если $\mathfrak{F}=\mathrm{LR}(f)$ для некоторой H-функции f. Покажем, что в общем случае полулокальный класс Фиттинга не является локальным. Пусть $\mathfrak{H}$ – нетривиальный нормальный класс Фиттинга и $\varnothing\subset\pi\subseteq P$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\mathfrak{S}_{\pi'}\neq\mathfrak{S}$. По лемме 2.2 класс $\mathfrak{F}$ полулокален. Кроме того, по лемме 1.1 $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга. Следовательно, по лемме 1.2 $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{S}$. Если предположить, что класс $\mathfrak{F}$ локален, то по лемме 1.3 класс $\mathfrak{F}$ является классом Локетта, т. е. $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}$. Но тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}$, что противоречит тому, что $\mathfrak{F}$ нетривиален. Следовательно, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не является локальным.

3 Инъекторы для полулокальных классов

Каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно определить полулокально H-функцией f такой, что $f(p)=\mathfrak{F}$ для всех $p\in P$. Ввиду теоремы 7.1.3 [15] найдется такая группа G, в которой не существует $\mathfrak{F}$-инъекторов, т. е. $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)=\varnothing$. Настоящий раздел работы посвящен нахождению тех условий, при которых $\mathfrak{F}$-инъекторы для полулокальных классов Фиттинга существуют и сопряжены в любой частично разрешимой (в частности, π-разрешимой) группе. Предварительно докажем лемму, которая для разрешимых групп была доказана Хартли (см. [3], лемма VIII.2.8).

***Лемма* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Пусть G – π-разрешимая группа и ее нормальная подгруппа K таковы, что G/K является либо нильпотентной π-группой, либо π'-группой. Тогда если F $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа K, а F_1 и F_2 – $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы G, содержащие F, то подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в G.*

Доказательство. Вначале заметим, что если $\pi=P$, то G – разрешимая группа и по лемме VIII.2.8 [3] лемма верна. Предположим $\varnothing\subset\pi\subset P$. Для доказательства будем использовать индукцию по порядку группы G. Если $|G|=1$, то лемма очевидна. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Так как $F_i\cap K\trianglelefteq F_i$ и $F_i\in\mathfrak{F}$, то $F_i\cap K$ – $\mathfrak{F}$-подгруппа K для $i\in\{1,2\}$. По условию $F\le F_i\cap K$ и F является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в K. Следовательно, $F=F_i\cap K$. Теперь из $F_i\cap K\trianglelefteq F_i$ следует $N_{F_i}(F_i\cap K)=N_{F_i}(F)=F_i$. Значит, $F_i\le N_G(F)$.

Предположим, что $N_G(F)<G$. В этом случае $|N_G(F)|<|G|$ и по индукции лемма верна для группы $N_G(F)$. Это означает, что подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в $N_G(F)$ и, очевидно, в группе G.

Получили противоречие. Следовательно, $N_G(F)=G$, т. е. F – нормальная подгруппа G. Значит, F является нормальной подгруппой в F_i для $i\in\{1,2\}$ и справедливо следующее изоморфное вложение групп F_i/F в группу G/K:

$$F_i/F=F_i/F_i\cap K\cong F_iK/K\leq G/K. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим теперь два возможных случая.

Случай 1. G/K – нильпотентная π-группа.

Так как по лемме 2.2 $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$ и F является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы K, то K/F является π-группой. Кроме того, в данном случае G/K нильпотентная π-группа. Итак, $K/F\in\mathfrak{S}_\pi\subseteq\mathfrak{S}$ и $G/K\in\mathfrak{S}$. Следовательно, ввиду изоморфизма $G/K\cong(G/F)/(K/F)$, группа $(G/F)/(K/F)$ – разрешима, и поэтому G/F является разрешимой группой. Теперь, следуя доказательству леммы VIII.2.8 из [2], получаем, что подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в G. Полученное противоречие доказывает лемму в случае 1.

Случай 2. Группа G/K является π'-группой.

В данном случае, учитывая (3.1), получаем, что группа F_i/F изоморфно вложена в некоторую π'-группу группы G/K для $i\in\{1,2\}$. Следовательно, F_i/F является π'-подгруппой группы G/F. Но по утверждению 3 теоремы 1.4 F_i/F содержится в некоторой холловой π'-подгруппе H_i/F группы G/F. Так как F нормальна в G и $F\leq F_i\leq H_i$, то F – нормальная подгруппа H_i. Следовательно, из $F\in\mathfrak{F}$ следует $F\leq(H_i)_\mathfrak{F}$. Тогда, ввиду изоморфизма

$$(H_i/F)/((H_i)_\mathfrak{F}/F)\cong H_i/(H_i)_\mathfrak{F},$$

заключаем, что $H_i/(H_i)_\mathfrak{F}\in\mathfrak{E}_{\pi'}$. Теперь, учитывая лемму 2.2, получаем, что $H_i\in\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$. Так как $F_i\leq H_i$ и по условию F_i является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G, то $F_i=H_i$ для $i\in\{1,2\}$. Отсюда по теореме 1.4 вытекает сопряженность холловых π'-подгрупп F_1/F и F_2/F группы G/F. Следовательно, подгруппы F_1 и F_2 сопряжены в G. Полученное противоречие завершает доказательство леммы в случае 2. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$ для H-функции f с носителем π, группа $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и V – $\mathfrak{F}$-инъектор G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если K – нормальная подгруппа G, то* $G=K\cdot N_G(V\cap K)$;

2) *индекс $|G:V|$ является π-числом.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то по лемме 1.5 подгруппа $V\cap K$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы K. Так как K нормальна в G, то $K\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и по лемме 1.6 любые два $\mathfrak{F}$-инъектора K сопряжены в K. Следовательно, для любого элемента $x\in G$ подгруппы $V\cap K$ и $(V\cap K)^x$ сопряжены в K, т. е. существует такой элемент $k\in K$, что $xk\in N_G(V\cap K)$. Отсюда получаем, что $x\in K\cdot N_G(V\cap K)$. Итак,

$$G\leq K\cdot N_G(V\cap K)\leq G$$

и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) докажем индукцией по порядку группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, определяемый полулокально H-функцией f и $\pi=\mathrm{Supp}(f)$. Тогда по лемме 2.2 $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой утверждение 2) неверно, и M – максимальная нормальная подгруппа G, содержащая $G_\mathfrak{F}$. Заметим, что такая подгруппа всегда существует, так как в случае $G\in\mathfrak{F}$ утверждение тривиально. Если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то по утверждению 1 леммы 1.5 $V\cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы M и по индукции индекс $|VM:V|=|M\cap(V\cap M)|$ является π-числом. Следовательно, если $G=VM$, то индекс $|G:V|$ – π-число и утверждение 2) верно. Предположим, что $VM<G$. Тогда для индексов выполняется неравенство:

$$|G:VM|<|G:M|. \qquad (3.2)$$

Так как $M\supseteq G_\mathfrak{F}$ и $G/G_\mathfrak{F}$ – разрешимая группа, то, ввиду изоморфизма $(G/G_\mathfrak{F})/(M/G_\mathfrak{F})\cong G/M$, порядок главного фактора G/M – простое число. Значит, неравенство (3.2) верно в случае, когда $V\leq M$. Но тогда по утверждению 1) $G=M\cdot N_G(V)$. Следовательно, $|G:N_G(V)|=|M:N_M(V)|$. Так как индекс $|M:V|$ – π-число и $V\leq N_M(V)$, то индекс $|G:N_G(V)|$ также является π-числом. Следовательно, существует такая холлова π'-подгруппа $G_{\pi'}$ группы G, что $G_{\pi'}\leq N_G(V)$. Но тогда по лемме 2.2 $VG_{\pi'}\in\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$. Значит, ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности V в G, имеем, что $VG_{\pi'}=V$. Отсюда вытекает, что индекс $|G:V|$ является π-числом. Утверждение 2) доказано. Лемма доказана.

Основной результат данного раздела представляет следующая

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, определяемый полулокально H-функцией f с носителем π, и G – некоторая группа. Тогда в G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов и каждый из $\mathfrak{F}$-инъекторов G имеет в G π-индекс в любом из следующих случаев*:

1) $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$ *для* $\sigma(G_\mathfrak{F})\subseteq\pi$;

2) G – *π-разрешима*;

Доказательство. Пусть $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$ и $\sigma(G_\mathfrak{F})\subseteq\pi$. Если G – единичная группа, то теорема очевидна. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. $2\in\pi$.

В этом случае $2\notin\pi'$, и поэтому все факторы главного ряда π-разрешимой группы $G/G_\mathfrak{F}$ являются, ввиду π-разрешимости группы $G/G_\mathfrak{F}$ и теоремы Фейта-Томпсона, разрешимыми группами. Следовательно, G – $\mathfrak{F}\mathfrak{S}$-группа и по лемме 1.6 в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Заметим также, что по лемме 3.2 каждый $\mathfrak{F}$-инъектор G имеет в G индекс, который является π-числом. Получили противоречие. Остается принять.

Случай 2. $2\notin\pi$.

В данном случае из $\sigma(G_{\mathfrak{F}})\subseteq\pi$ следует, что $G_{\mathfrak{F}}$ является π-группой. Следовательно, применяя теорему Фейта-Томпсона, заключаем, что подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ разрешима, и поэтому группа G π-разрешима.

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов в группе G в случае, когда G – π-разрешимая группа. Для доказательства существования $\mathfrak{F}$-инъекторов рассмотрим две следующих логически возможных ситуации.

2.1) *Группа G не является π'-группой*.

Вначале заметим, что из условия $G\notin\mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что $\mathfrak{E}_{\pi'}$-корадикал группы G – неединичная группа. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $|M|<|G|$ и по лемме 1.8 $\sigma(M_{\mathfrak{F}})=\sigma(M\cap G_{\mathfrak{F}})\subseteq\sigma(G_{\mathfrak{F}})\subseteq\pi$, то по индукции в группе M существует $\mathfrak{F}$-инъектор F. В дальнейшем доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

2.1.1) *Покажем, что существует такая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая F, что ее индекс в G является π-числом*.

Если F – $\mathfrak{F}$-инъектор M, то $F\leq X$, где X – некоторая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Тогда $F\leq X\cap M$. Так как $X\cap M\lhd X$, то $X\cap M\in\mathfrak{F}$. Ввиду того, что F – $\mathfrak{F}$-инъектор M, по утверждению 4 леммы 1.5, F является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в M. Следовательно, $F=X\cap M$. Теперь, применяя индукцию для группы M, заключаем, что индекс $|M:F|=|M:(X\cap M)|$ является π-числом. Так как группа G является π-разрешимой, то ее главный фактор G/M является либо элементарной абелевой p-группой для некоторого простого $p\in\pi$, либо π'-группой.

Предположим, что G/M – p-группа, где $p\in\pi$. Тогда индекс $|G:M|$ является π-числом. Покажем, что в этом случае индекс $|G:F|$ также π-число. По теореме Лагранжа индекс $|G:F|=|M:F|\cdot|G:M|$. Так как по индукции индекс $|M:F|$ – π-число и по условию индекс $|G:M|$ также является π-числом, то индекс $|G:F|$ – π-число. Далее из $F\leq X$ следует, что индекс $|G:X|$ является π-числом и утверждение 2.1.1) в данном случае верно.

Предположим теперь, что главный фактор G/M является π'-группой. Заметим, что по индукции в группе M существует $\mathfrak{F}$-инъектор $F=X\cap M$ и любые два $\mathfrak{F}$-инъектора M сопряжены в M. Ввиду утверждения 1) леммы 1.5 подгруппы $X\cap M$ и $(X\cap M)^x$ являются $\mathfrak{F}$-инъекторами в группе M для произвольного элемента $x\in G$. Следовательно, существует такой элемент $m\in M$, что $X\cap M=((X\cap M)^x)^m$. Это означает, что $xm\in N_G(X\cap M)$. Но тогда $x\in M\cdot N_G(X\cap M)$, и поэтому $G\leq M\cdot N_G(X\cap M)$. Следовательно, справедливо равенство:

$$G=M\cdot \mathrm{N}_G(X\cap M). \qquad (3.3)$$

Так как по индукции индекс $|M:(\mathrm{N}_G(X\cap M))|$ является π-числом и $M\cap X\leq M\cap \mathrm{N}_G(X\cap M)$, то индекс $|M:(M\cap \mathrm{N}_G(X\cap M))|$ – π-число. Теперь, учитывая равенство (3.3), получаем

$$G=\frac{|M|\cdot|N_G(X\cap M)|}{|M\cap N_G(X\cap M)|}.$$

Следовательно, индекс

$$|G:N_G(X\cap M)|=|M:(M\cap N_G(X\cap M))|.$$

Значит, индекс $|G:N_G(X\cap M)|$ – π-число. Отсюда, ввиду π-разрешимости группы, вытекает существование холловой π'-подгруппы $G_{\pi'}$ группы G такой, что $G_{\pi'}\leq N_G(X\cap M)$. Теперь мы можем построить подгруппу $X_1=G_{\pi'}(X\cap M)$. Заметим, что индекс $|G:X_1|$ является π-числом и $F\leq X_1$. Остается показать, что подгруппа X_1 $\mathfrak{F}$-максимальна в группе G. Для этого вначале выясним, что X_1 является $\mathfrak{F}$-подгруппой G. Покажем вначале, что F – нормальная подгруппа X_1. Пусть y – произвольный элемент X_1. Тогда $y=mn$, где $m\in G_{\pi'}$ и $n\in F$. Так как $G_{\pi'}\leq N_G(F)$, то $y^{-1}Fy=n^{-1}m^{-1}Fmn=F$ и $F\lhd X_1$. Так как $F\in\mathfrak{F}$, то $F\leq(X_1)_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, $X_1=G_{\pi'}F$, и поэтому $|X_1:F|=|G_{\pi'}:G_{\pi'}\cap F|$. Следовательно, $X_1/F\in\mathfrak{E}_{\pi'}$. Отсюда, ввиду изоморфизма $X_1/(X_1)_{\mathfrak{F}}\cong(X_1/F)/((X_1)_{\mathfrak{F}}/F)$, следует, что $X/(X_1)_{\mathfrak{F}}$ является π'-группой. Значит, $X_1\in\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ и по лемме 2.2 X_1 является $\mathfrak{F}$-группой. Докажем теперь, что X_1 является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Пусть L – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая X_1. Так как главный фактор G/M является π'-группой, то $G=G_{\pi'}M$. Следовательно, $L=L\cap G_{\pi'}M=L\cap(X\cap M)G_{\pi'}M=L\cap X_1M$. Применяя тождество Дедекинда, получаем $L=X_1(L\cap M)$. Но по лемме 1.5 подгруппа $X\cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы M, и поэтому $X\cap M$ $\mathfrak{F}$-максимальна в M. Теперь из $L\in\mathfrak{F}$ и нормальности подгруппы $L\cap M$ в L вытекает по лемме 1.5, что $L\cap M$ – $\mathfrak{F}$-подгруппа M, содержащая $X\cap M$. Отсюда, ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности $X\cap M$ в M, получаем равенство $X\cap M=L\cap M$. Значит,

$$L=X_1(L\cap M)=X_1(X\cap M)=X_1$$

и подгруппа X_1 $\mathfrak{F}$-максимальна в G. Итак, X_1 – в данном случае искомая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G и утверждение 2.1.2) доказано.

Так как, ввиду предположения 2.1), группа G не является π'-группой, то ее $\mathfrak{E}_{\pi'}$-корадикал $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}\neq 1$. Следовательно, либо $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}<G$, либо $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}=G$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

2.1.2) $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}<G$.

В этом случае существует такая максимальная нормальная подгруппа M_1, что выполняется $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}<M_1$. Следовательно, главный фактор $G/M_1\cong G/G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}/M/G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ является π'-группой. Так как $M_1\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi}$ для $\pi\supseteq\sigma((M_1)_{\mathfrak{F}})$, то по индукции в M_1

существует $\mathfrak{F}$-инъектор V_1. Тогда, учитывая 2.1.2), заключаем, что существует такая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа F_1 группы G, содержащая V_1, индекс которой в G является π-числом. Для доказательства существования $\mathfrak{F}$-инъекторов в группе G, ввиду утверждения 3 леммы 1.5, достаточно выяснить, что $F_1\cap R$ является $\mathfrak{F}$-инъектором в R для любой максимальной нормальной подгруппы R группы G. Так как $R\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi}$ для $\pi\supseteq\sigma(R_{\mathfrak{F}})$, то по индукции в R существует $\mathfrak{F}$-инъектор V_2. Пусть F_2 – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $V_2\le F_2$. Заметим, что по индукции, в группах M_1 и $M_1\cap R$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. По утверждению 1 леммы 1.5 подгруппа $L_1=V_1\cap(M_1\cap R)$ является $\mathfrak{F}$-инъектором в группе $M_1\cap R$ и, следовательно, $\mathfrak{F}$-максимальна в $M_1\cap R$. Так как $V_1\cap(M_1\cap R)\le F_1\cap(M_1\cap R)$ и $F_1\cap(M_1\cap R)$ является $\mathfrak{F}$-подгруппой, то справедливо равенство

$$L_1=F_1\cap(M_1\cap R)=V_1\cap R. \qquad (3.4)$$

Аналогично, заключаем, что

$$L_2=V_2\cap(M_1\cap R)=F_2\cap(M_1\cap R)=V_2\cap R.$$

Так как по индукции подгруппы L_1 и L_2 сопряжены в $M_1\cap R$, то без ограничения общности, можно положить, что справедливо равенство $V_1\cap R=V_2\cap R$.

Ввиду π-разрешимости группы G, главный фактор G/R является либо элементарной абелевой p-группой для некоторого $p\in\pi$, либо π′-группой. Предположим, что G/R – р-группа. Так как G/M_1 – π′-группа, то $G=G_{\pi'}M_1$ для некоторой холловой π′-подгруппы группы G. Кроме того, индекс $|G:F_1|$ является π-числом. Следовательно, $G_{\pi'}^{x}\le F$ для некоторого $x\in G$. Отсюда следует $G=G_{\pi'}^{x}M_1\le F_1M_1\le G$, и поэтому $G=F_1M_1$. Кроме того, ввиду максимальности нормальных подгрупп M_1 и R, имеем, что $G=M_1R$. Итак, $G=F_1M_1=M_1R$, и поэтому, ввиду изоморфизмов $M_1R/R\cong M_1/M_1\cap R$ и $RM_1/M_1\cong R/R\cap M_1$, подгруппы $M_1/M_1\cap R$ и $R/R\cap M_1$ являются π-группой и π′-группой соответственно. Покажем, что индекс $|R:(F_1\cap R)|$ является π-числом. Действительно, по лемме А.1.5 [3] имеем равенство:

$$|RF_1:F_1|=|R:(F_1\cap R)|.$$

Согласно выбору подгруппы F_1, индекс $|G:F_1|$ – π-число, и поэтому $|R:(F_1\cap K)|$ является π-делителем $|G:F_1|$. Теперь из того, что $R/R\cap M_1$ – π′-группа, следует равенство $R=R_{\pi'}(R_1\cap M_1)$ для некоторой холловой π′-подгруппы $R_{\pi'}$ группы R. Так как индекс $|R:(F_1\cap R)|$ является π-числом, то $R_{\pi'}\le F_1\cap R$, и поэтому справедливо равенство

$$R=(M_1\cap R)(F_1\cap R).$$

Докажем, что подгруппа $F_1\cap R$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы R. Вначале выясним $\mathfrak{F}$-максимальность подгруппы $F_1\cap R$ в R. Пусть $\bar F$ является такой $\mathfrak{F}$-подгруппой группы G, что выполняется $F_1\cap R\le\bar F\le R$. Тогда

$$\bar F=\bar F\cap R=\bar F\cap(M_1\cap R)(F_1\cap R). \qquad (3.5)$$

Так как подгруппа $F_1\cap(M_1\cap R)$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы $M_1\cap R$, то

$$F_1\cap(M_1\cap R)=\bar F\cap(M\cap R).$$

Теперь, используя тождество Дедекинда, получаем, что выполняется равенство

$$\bar F=(M\cap R\cap\bar F)\cdot(F_1\cap R)=(M\cap R\cap F_1)(F_1\cap R)=F_1\cap R.$$

Следовательно, $F_1\cap R$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы R. Так как подгруппа V_2 является $\mathfrak{F}$-инъектором R, то по утверждению 4 леммы 1.5 подгруппа V_2 также $\mathfrak{F}$-максимальна в R. Кроме того, подгруппа $F_1\cap(M_1\cap R)$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы $R\cap M_1$, ввиду равенства (3.4), и поэтому $\mathfrak{F}$-максимальна в $R\cap M_1$. Теперь, учитывая (3.5), получаем, что $F_1\cap(R\cap M_1)\le(F_1\cap R)\cap V_2$. Следовательно, по лемме 3.1 подгруппы V_2 и $F_1\cap R$ сопряжены в R, и поэтому $F_1\cap R$ является $\mathfrak{F}$-инъектором в R для любой максимальной нормальной подгруппы R группы G. По утверждению 3 леммы 1.5 это означает, что подгруппа F_1 – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и существование $\mathfrak{F}$-инъекторов для случая, когда G/R является π-группой, доказано.

Предположим, что G/R – π′-группа. Так как G/M_1 – π′-группа, то группа $G/R\cap M_1$ также является π′-группой. Ввиду равенств (3.4) и (3.5), подгруппа $F_1\cap(R\cap M_1)\le F_1\cap V_2$ и $F_1\cap(R\cap M_1)$, как $\mathfrak{F}$-инъектор группы $R\cap M_1$, является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в $R\cap M_1$. Тогда по лемме 3.1 получаем, что подгруппы F_1 и V_2 сопряжены в G. Так как по индукции все $\mathfrak{F}$-инъекторы R сопряжены в R, то $F_1\cap R=V_2^{x}\cap R$ является $\mathfrak{F}$-инъектором в R для любой максимальной нормальной подгруппы R группы G. Отсюда по утверждению 3 леммы 1.5 подгруппа F_1 является $\mathfrak{F}$-инъектором G и теорема существования $\mathfrak{F}$-инъекторов в случае 2.1.2) доказана. Рассмотрим случай

2.1.3) $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}=G$.

Предположим, что в группе G существует такая максимальная подгруппа K, что G/K является π′-группой. Тогда $G^{\mathfrak{E}_{\pi'}}=G\le K$, что невозможно. Итак, для любой максимальной нормальной подгруппы K главный фактор G/K является нильпотентной π-группой. Пусть K_1 –некоторая максимальная нормальная подгруппа G. Тогда по индукции в K_1 существует $\mathfrak{F}$-инъектор E_1. Пусть $\bar E_1$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая E_1. Тогда, ввиду утверждения 3 леммы 1.5, подгруппа $\bar E_1$ будет $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $\bar E_1\cap K_2$ – $\mathfrak{F}$-инъектор K_2 для любой максимальной нормальной подгруппы K_2 группы G. Так как K_2 – π-разрешимая группа, то по индукции в K_2 существует $\mathfrak{F}$-инъектор E_2. Пусть $\bar E_2$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G такая, что $E_2 \le \bar{E}_2$. Заметим, что по утверждению 1 леммы 1.5 подгруппы $E_1\cap(K_1\cap K_2)$ и $E_2\cap(K_1\cap K_2)$ являются $\mathfrak{F}$-инъекторами группы $K_1\cap K_2$. Следовательно, по индукции они сопряжены в $K_1\cap K_2$, и поэтому можно считать, что $E_1\cap(K_1\cap K_2)=E_2\cap(K_1\cap K_2)=E$. Итак, $E\le \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$. Кроме того, так как класс всех нильпотентных π-групп – формация, то группа $G/K_1\cap K_2$ – нильпотентная π-группа. Следовательно, по лемме 3.1 подгруппы $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$ сопряжены в G, т. е. $\bar{E}_1^x = \bar{E}_2$ для некоторого $x\in G$. Так как E_2 – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в K_2, то

$$\bar{E}_1 \cap K_2 = \bar{E}_1^x \cap K_2 = \bar{E}_2 \cap K_2 = E_2.$$

Это доказывает существование $\mathfrak{F}$-инъекторов в группе G в случае 2.1.3) и завершает доказательство теоремы существования в случае 2.1.

2.2) *Группа G является π'-группой.*

Так как класс $\mathfrak{F}$ – полулокален, то в этом случае по лемме 2.2 группа $G\in\mathfrak{E}_{\pi'}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$ и теорема очевидна.

Для завершения доказательства теоремы установим сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G. Пусть I_1 и I_2 – $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G и $\bar{M}$ – максимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду того, что G – π-разрешимая группа, $G/\bar{M}$ является либо нильпотентной π-группой, либо π'-группой.

Так как по утверждению 1 леммы 1.5 подгруппы $I_1\cap \bar{M}$ и $I_2\cap \bar{M}$ являются $\mathfrak{F}$-инъекторами $\bar{M}$, то по индукции $(I_1\cap \bar{M})^x=I_2\cap \bar{M} =I$. Кроме того, подгруппы I_1^x и I_2 – $\mathfrak{F}$-максимальные в G такие, что $I\le I_1^x \cap I_2$. Следовательно, по лемме 3.1 подгруппы I_1^x и I_2 сопряжены в G и являются $\mathfrak{F}$-инъекторами G. Теорема в случае, когда $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi$ и $\pi(G_\mathfrak{F})\subseteq\pi$, доказана.

Справедливость теоремы для π-разрешимой группы G уже установлена в случае 1). Теорема доказана.

Напомним, что группу G называют *π-замкнутой*, если она имеет нормальную холлову π-подгруппу, и G называют *π-специальной*, если G имеет нормальную нильпотентную холлову π-подгруппу. Так как, ввиду следствия 2.3, классы всех π-замкнутых и π-специальных групп являются полулокальными, то теорема 3.3 позволяет выделить два новых класса сопряженных инъекторов в любой π-разрешимой группе.

***Следствие* 3.4.** *Каждая π-разрешимая группа имеет π-замкнутые инъекторы и любые два из них сопряжены.*

***Следствие* 3.5.** *Каждая π-разрешимая группа имеет π-специальные инъекторы и любые два из них сопряжены.*

В случае $\pi=P$ из утверждения 1 теоремы вытекает

***Следствие* 3.6** [12]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и G – такая группа*, что $G/G_\mathfrak{F}$ *– разрешимая группа. Тогда в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Если $\pi=P$, то из утверждения 2 теоремы 3.3 следует известная в теории классов теорема Гашюца-Фишера-Хартли [2], которую приведем как

***Следствие* 3.7.** *Для любого разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.*

Заметим, что теорема 3.3, в частности, является в точности дуальной теореме Брюстера [16] в теории формаций о том, что в любой π-разрешимой группе для π-насыщенной локальной формации $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-проекторы и любые два из них сопряжены. Однако в отличие от теоремы в теории формаций, в теории классов Фиттинга в теореме 3.2 мы не требуем локальности классов Фиттинга.

4 Нормальные подклассы в классе Фишера

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным в $\mathfrak{X}$, или $\mathfrak{X}$-нормальным [6], если для любой группы $G\in\mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. Заметим, что если $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S}$-нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным. Основная цель настоящего раздела – нахождение тех условий, при которых для класса Фишера $\mathfrak{X}$ пересечение любого множества $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга является снова $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Тот факт, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$, будем обозначать как $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{X}$.

***Пример* 4.1.** (а) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X}=\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, где $\pi\subseteq P$. Ввиду следствия 3.6, из $\mathfrak{F}\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ следует, что каждая группа из класса $\mathfrak{X}$ имеет $\mathfrak{F}$-инъектор и любые два из них сопряжены. Пусть $G\in\mathfrak{X}$ и V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Тогда фактор-группа $G/G_\mathfrak{F}$ нильпотентна, и поэтому ее подгруппа $V/G_\mathfrak{F}$ субнормальна в $G/G_\mathfrak{F}$. Следовательно, V – субнормальная подгруппа в G и, значит, $V\subseteq G_\mathfrak{F}$. Итак, ввиду утверждения 2 леммы 1.5, $V=G_\mathfrak{F}$ и $G_\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа для всех групп $G\in\mathfrak{X}$. Это означает, что $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{X}$.

(б) Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда по теореме 1.4 любая группа из $\mathfrak{X}$ обладает $\mathfrak{S}_\pi$-инъ-ектором, т. е. холловой π-подгруппой и любые две ее холловы π-подгруппы сопряжены. Тогда если $G\in\mathfrak{X}$ и G_π – холлова π-подгруппа G, то $G/\mathrm{O}_\pi(G)\in\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $G_\pi=\mathrm{O}_\pi(G)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{X}$.

Для доказательства основного результата раздела мы будем использовать некоторые простейшие свойства полулокальных классов Фиттинга, которые приведем в качестве лемм.

***Лемма* 4.2.** *Пересечение любого множества классов Фиттинга, определяемых полулокально H-функцией с носителем* π, *является полулокальным классом Фиттинга, определяемым H-функцией с носителем* π.

Доказательство. Пусть для $i\in I$

$$\mathfrak{M}=\{\mathfrak{F}_i:\ \mathfrak{F}_i=\mathrm{SLR}(f_i),\ \mathrm{Supp}(f_i)=\pi\} \text{ и } \mathfrak{F}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i .$$

Обозначим через f такую H-функцию, что $f(p)=\bigcap_{i\in I} f_i(p)$ для каждого $p\in\pi$. Докажем, $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$. Легко видеть, что

$$\mathfrak{F} \subseteq \bigcap_{p\in\pi}(\bigcap_{i\in I} f_i(p))\mathfrak{E}_{p'} = \mathrm{SLR}(f).$$

Пусть теперь группа $G\in\mathrm{SLR}(f)$. Тогда $G/G_{\bigcap_{i\in I} f_i(p)}\in\mathfrak{E}_{p'}$ для каждого $p\in\pi$.

Так как $G_{\bigcap_{i\in I} f_i(p)}=\bigcap_{i\in I} G_{f_i(p)}\subseteq G_{f_i(p)}$, то, ввиду изоморфизма

$$G/G_{f(p)}/G_{f_i(p)}/G_{f(p)}\cong G/G_{f_i(p)},$$

группа $G\in\mathrm{SLR}(f_i)=\mathfrak{F}_i$ для каждого $i\in I$. Отсюда следует, что $G\in\mathfrak{F}$ и справедливо включение $\mathrm{SLR}(f)\subseteq\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

***Следствие* 4.3.** *Пусть* $\{\mathfrak{F}_i: i\in I\}$ *–множество классов Фиттинга, определяемых полулокально H-функциями с носителем* π *и* $\mathfrak{F}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$.

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 4.2 с учетом леммы 2.2.

***Лемма* 4.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, определяемый полулокально H-функцией f с носителем* π, *и G –* π*-разрешимая группа, V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G. Тогда если K такая нормальная подгруппа G, что* $G/K\in\mathfrak{E}_{\pi'}$, *то* $G=VR$.

Доказательство. Так как группа G является π-разрешимой и G/R – π'-группа, то $G=G_{\pi'}R$ для некоторой холловой π'-подгруппы $G_{\pi'}$ группы G. Теперь по утверждению 2 теоремы 3.4 индекс $|G:V|$ является π-числом, и поэтому $V\supseteq G_{\pi'}$. Следовательно, $VR\supseteq G_{\pi'}R=G$ и $G=VR$. Лемма доказана.

Далее мы представим короткое альтернативное доказательство результата работы [12] (см. также теорему 2.5.3 [17]) о существовании и сопряженности $\mathfrak{F}$-инъекторов в частично разрешимых группах для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

***Лемма* 4.5.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* $\pi=\sigma(\mathfrak{F})$. *Тогда любая группа G такая, что* $G/G_{\mathfrak{F}}$ *–* π*-разрешимая группа, имеет* $\mathfrak{F}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Доказательство. Предположим, что $2\in\pi$. Тогда очевидно, все π'-факторы группы $G/G_{\mathfrak{F}}$ имеют нечетный порядок и по теореме Фейта-Томпсона являются разрешимыми группами. Следовательно, группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ разрешима и по лемме 1.6 в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

Предположим теперь, что множество π состоит из нечетных чисел. В этом случае, ввиду $\sigma(G_{\mathfrak{F}})\subseteq\pi$ по теореме Фейта-Томпсона, заключаем, что $G_{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа. Следовательно, группа G – π-разрешимая группа и по лемме 1.6 в G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов. Лемма доказана.

***Лемма* 4.6.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, G – группа с* $\mathfrak{F}$*-инъектором V и* $V\leq A\leq G$. *Тогда V является* $\mathfrak{F}$*-инъектором A в каждом из следующих случаев*:

(1) $\mathfrak{F}=\mathrm{SLR}(f)$, $\pi=\mathrm{Supp}(f)$ *и G* π*-разрешимая группа*;

(2) $\pi=\sigma(\mathfrak{F})$ *и* $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi}$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай (1), когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется полулокально H-функцией с носителем π. В этом случае по утверждению 2 теоремы 3.3 в группе G существует $\mathfrak{F}$-инъектор V. В дальнейшем доказательство разобьем на несколько шагов.

(а) *Если K такая нормальная подгруппа группы G, что G/K является либо* π'*-группой, либо нильпотентной* π*-группой, и F –* $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа группы G, содержащая* $\mathfrak{F}$*-инъектор* V_1 *группы K, то F является* $\mathfrak{F}$*-инъектором группы G.*

Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то по утверждению 3 леммы 1.5 подгруппа $V\cap K$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы K. Следовательно,

$$V_1=F\cap K=V\cap K.$$

Итак, $V_1\leq F\cap V$ и подгруппы F и V являются $\mathfrak{F}$-максимальными в G. Значит, по лемме 3.1 подгруппы F и V сопряжены в G, и поэтому подгруппа F – $\mathfrak{F}$-инъектор G.

(б) *Если* $1=G_0\lhd G_1\lhd\ldots\lhd G_t=G$ *– нормальный ряд группы G, в котором каждый фактор* G_i/G_{i-1} *является либо нильпотентной* π*-группой, либо* π'*-группой, то* $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа W группы G является* $\mathfrak{F}$*-инъектором G в точности тогда, когда* $W\cap G_i$ *является* $\mathfrak{F}$*-максимальной подгруппой G для всех* $i\in\{0,\ldots,t\}$.

По условию группа G π-разрешима и указанный нормальный ряд существует. Если W – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то подгруппа $W\cap G_i$ является $\mathfrak{F}$-максимальной в G_i по определению $\mathfrak{F}$-инъектора группы G. Обратное утверждение докажем индукцией по длине ряда t. Если $t=0$, то утверждение очевидно. Пусть $t\geq1$. Тогда по индукции подгруппа $W\cap G_{t-1}$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G_{t-1}. Без ограничения общности мы можем считать, что фактор G_i/G_{i-1} является либо нильпотентной π-группой, либо π'-группой. Теперь, применяя утверждение (а), мы заключаем, что подгруппа W является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G.

(в) *Заключительный шаг.*

Пусть $\{G_i\}$ – нормальный ряд группы G из (б). Положим, $A_i=A\cap G_i$ для всех $i\in\{0,\ldots,t\}$. Тогда получаем нормальный ряд $1=A_0\lhd A_1\lhd\ldots\lhd A_t=A$

группы A. Так как $A_i/A_{i+1}\cong(A\cap G_{i+1})G_i/G_i$, то каждый фактор A_i/A_{i+1} является либо нильпотентной π-группой, либо π'-группой. Кроме того, так как V является $\mathfrak{F}$-инъектором G, то по утверждению 4 леммы 1.5 следует, что $V\cap A_i=V\cap A\cap G_i=V\cap G_i$ и подгруппа $V\cap A_i$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в A_i для каждого $i\in\{0,\ldots,t\}$. Следовательно, ввиду (б), подгруппа V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы A и лемма в случае (1) доказана.

Доказательство леммы в случае (2) вытекает непосредственно из теоремы 2.5.11 [16]. Лемма доказана.

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ называют классом Фишера [17], если из $G\in\mathfrak{X}$, $K\trianglelefteq G$, $K\leq H\leq G$ и H/K – p-группа, следует $H\in\mathfrak{X}$.

Используя теорему 3.3 и лемму 4.5, докажем основной результат работы, который представляет

***Теорема* 4.7.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i{:}i\in I\}$ – множество классов Фиттинга нормальных в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если для любого $i\in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ определяется полулокально H-функцией f_i с носителем π и каждая группа из $\mathfrak{X}$ является π-разрешимой, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$*;

2) *если каждая группа $G\in\mathfrak{X}$ такова, что $G/G_{\mathfrak{F}}$ – $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешимая группа, то $\mathfrak{F}$ – нормальный подкласс Фиттинга в $\mathfrak{X}$*.

Доказательство. 1) Докажем утверждение теоремы индукцией по порядку групп в $\mathfrak{X}$. Если G – единичная группа, то теорема очевидна. Предположим, что группа $G\in\mathfrak{X}$ имеет наименьший порядок и ее $\mathfrak{F}$-радикал не является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G. Так как G – π-разрешимая группа и по лемме 4.2 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется полулокально H-функцией $f=\bigcap_{i\in I}f_i$ с носителем π, то по теореме 3.3 в G существует такой $\mathfrak{F}$-инъектор V, который не является нормальной подгруппой G, т. е. $G_{\mathfrak{F}}<V$. Ввиду того, что для каждого $i\in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ определяется полулокально H-функцией f_i с носителем π, и группа G является π-разрешимой, по теореме 3.3 G имеет $\mathfrak{F}$-инъектор V_i для каждого $i\in I$. В дальнейшем доказательство утверждения 1) разобьем на несколько шагов.

(а) *Для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G справедливо равенство*: $V\cap M=(\bigcap_{i\in I}V_i)\cap M$.

Так как по условию для каждого $i\in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ нормален в $\mathfrak{X}$ и V_i является $\mathfrak{F}_i$-максимальной подгруппой в G, то $V_i=G_{\mathfrak{F}_i}$ для всех $i\in I$. Но тогда $\bigcap_{i\in I}V_i=\bigcap_{i\in I}G_{\mathfrak{F}_i}=G_{\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i}=G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\bigcap_{i\in I}V_i<V$.

Пусть теперь M – произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда по утверждению 1 леммы 1.5 подгруппа $V\cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы M. Так как $M\in\mathfrak{X}$, то по индукции $V\cap M$ нормальна в M. Следовательно, $V\cap M=M_{\mathfrak{F}}$, и поэтому по лемме 1.8 $V\cap M=G_{\mathfrak{F}}\cap M$. Итак, $V\cap M=(\bigcap_{i\in I}V_i)\cap M$ и утверждение (а) доказано.

(б) *Подгруппа V не содержится ни в одной собственной субнормальной подгруппе группы G*.

Предположим, что существует субнормальная подгруппа G из N такая, что $V<N$. Тогда по утверждению 1 леммы 1.5 $V\cap N=V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы N. Следовательно, по индукции V – нормальная подгруппа N. Тогда V – субнормальна в G и, учитывая утверждение 2 леммы 1.5, заключаем, что $V=G_{\mathfrak{F}}$. Последнее противоречит тому, что V не является нормальной подгруппой группы G.

(в) *$G=RV$ для любой нормальной подгруппы R группы G такой, что G/R является либо π'-группой, либо G/R – нильпотентная π-группа*.

Если R – такая нормальная подгруппа G, что G/R – π'-группа, то утверждение (в) справедливо по лемме 4.4. Предположим, что G/R является нильпотентной π-группой. Пусть $RV<G$. Так как G/R нильпотентная группа, то подгруппа RV/R субнормальна в G/R, и поэтому RV – субнормальная подгруппа G. Следовательно, V содержится в собственной субнормальной RV из G, что противоречит утверждению (б), и утверждение (в) доказано.

(г) *Группа G комонолитична*.

Предположим, что группа G не является комонолитичной. Пусть M_1 и M_2 – максимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда, ввиду утверждения (в) и π-разрешимости группы G, получаем, что $G=VM_1=VM_2$. Следовательно, справедливы изоморфизмы

$G/M_1=VM_1/M_1\cong V/V\cap M_1$ и $G/M_2=VM_2/M_2\cong V/V\cap M_2$, и поэтому подгруппы $V\cap M_1$ и $V\cap M_2$ являются максимальными нормальными подгруппами группы V.

Предположим, что G/M_1 – нильпотентная π-группа, а G/M_2 – π'-группа. Если в этом случае $V\cap M_1=V\cap M_2$, то $G/M_1\cong V/V\cap M_1=V/V\cap M_2\cong G/M_2$. Следовательно, $G/M_1\in\mathfrak{N}_\pi\cap\mathfrak{E}_{\pi'}=(1)$, где (1) – класс единичных групп, и $G=M_1$, что невозможно.

Значит, $V\cap M_1\neq V\cap M_2$, и поэтому

$$V=(V\cap M_1)(V\cap M_2).$$

Отсюда, учитывая утверждение (а), получаем, что $V=((\bigcap_{i\in I}V_i)\cap M_1)\cdot((\bigcap_{i\in I}V_i)\cap M_2)$. Следовательно, ввиду того, что $\bigcap_{i\in I}V_i=G_{\mathfrak{F}}$, имеем $V\subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и получаем противоречие с утверждением (б).

Таким образом, остается признать, что группы G/M_1 и G/M_2 являются одновременно либо π'-группами, либо нильпотентными π-группами. Так как классы $\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $\mathfrak{N}_\pi$ являются формациями, то группа $G/M_1\cap M_2$ является либо π'-группой, либо нильпотентной π-группой. В каждом из этих случаев, ввиду утверждения (в), $G=V(M_1\cap M_2)$. Следовательно, $VM_1\cap VM_2=V(M_1\cap M_2)$. Отсюда по лемме А.1.2 [3] получаем равенство:

$$V=V\cap M_1M_2=(V\cap M_1)(V\cap M_2).$$

Теперь, если $V\cap M_1=V\cap M_2$, то $V\subseteq M_1$, что противоречит утверждению (б). Значит, $V\cap M_1\neq V\cap M_2$. Но тогда с учетом утверждения (а) получаем аналогично, как и выше, что $V\subseteq G_{\mathfrak{F}}$, что снова противоречит (б). Следовательно, $M_1=M_2=M$ и группа G комонолитична. Так как V_i – нормальная подгруппа G для любого $i\in I$, то $\bigcap_{i\in I} V_i\subseteq M$. Следовательно, из утверждения (а) вытекает равенство

$$V\cap M=\bigcap_{i\in I} V_i. \qquad (4.1)$$

(д) *$V_iV<G$ для некоторого $i\in I$.*

Предположим, что для любого $i\in I$ справедливо равенство $V_iV=G$. Если для всех $j\in I$ подгруппа $V_j=G$, то $G=\bigcap_{j\in I} V_i$ и $G=V$ нормальна в G. Получаем противоречие с тем, что подгруппа V ненормальна в G. Следовательно, $V_j\neq G$ для некоторого $j\in I$. Так как по условию $V_jV=G$ и V_j нормальная подгруппа G, то $G/V_j\cong V/V\cap V_j$. Но ввиду (4.1), $V\cap V_j\subseteq V\cap M=\bigcap_{i\in I} V_i\subseteq V\cap V_j$. Следовательно, $V\cap V_j=\bigcap_{i\in I} V_i$. Тогда из $G=VM$, применяя снова (4.1), получаем, что

$$G/M\cong V/V\cap M=V/(\bigcap_{i\in I} V_i)=V/V\cap V_j\cong G/V_j.$$

Следовательно, V_j – максимальная нормальная подгруппа G, т. е. $V_j=M$.

Покажем, что $V_j\in\mathfrak{F}$. Действительно, для $i\neq j$ ($i\in I$), если $V_i\neq G$, то рассуждая аналогично, как и выше, имеем $V_i=M=V_j$ и $V_j\in\mathfrak{F}_i$. Если же $V_i=G$, то V_j – нормальная подгруппа V_i и снова $V_j\in\mathfrak{F}_i$. Следовательно, $V_j\in\mathfrak{F}_i$ для всех $i\neq j$, и поэтому $V_j\in\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i=\mathfrak{F}$. Значит, $V_j\subseteq G_{\mathfrak{F}}\subseteq V$. Но по предположению $V_jV=G$, и поэтому $V=G\in\mathfrak{F}$, что противоречит тому, что подгруппа V не нормальна в G. Итак, существует такое $i\in I$, что $V_iV<G$, и утверждение (д) доказано.

(е) *Заключительный шаг.*

Ввиду (4.1) заключаем, что группа $V\cap V_i/(\bigcap_{i\in I} V_i)$ является либо единичной, либо совпадает с самой группой. Предположим, что $V\cap V_i=\bigcap_{i\in I} V_i$. В этом случае, учитывая (4.1), $V_iV/V_i\cong V/\bigcap_{i\in I} V_i\cong G/M$. Следовательно, V_iV/V_i является либо элементарной абелевой p-группой для некоторого $p\in\pi$, либо π'-группой. Пусть V_iV/V_i – p-группа. Тогда из того, что $\mathfrak{X}$ –класс Фишера, $G\in\mathfrak{X}$, V_i нормальна в G и $V_i\leq V_iV\leq G$, следует, что $V_iV\in\mathfrak{X}$. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то по лемме 4.6 подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором V_iV. Но $|V_iV|<|G|$, и поэтому по индукции V – нормальная подгруппа в V_iV. Следовательно, из $V\in\mathfrak{F}_i$ имеем $V\leq(V_iV)_{\mathfrak{F}_i}$. Так как по лемме 4.6 V_i – $\mathfrak{F}_i$-инъектор V_iV, то $(V_iV)_{\mathfrak{F}_i}=V_i$. Итак, $V\subseteq V_i$ и V_i нормальна в G, что противоречит утверждению (б).

Предположим, что V_iV/V_i является π'-группой. Тогда по лемме 2.2 $V_iV\in\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{F}$. Но по утверждению 1 леммы 4.6 V_i является $\mathfrak{F}$-инъектором V_iV. Следовательно, ввиду того, что V_i – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа V_iV, имеем $V_iV=V_i$, и поэтому $V\leq V_i$. Снова получили противоречие утверждению (б).

Итак, случай, когда $(V\cap V_i)/(\bigcap_{i\in I} V_i)$ – единичная группа, невозможен.

Остается принять случай, когда $(V\cap V_i)/(\bigcap_{i\in I} V_i)=V/(\bigcap_{i\in I} V_i)$. В этом случае $V\cap V_i=V$ и $V\leq V_i$, что противоречит (б).

Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (е). Первое утверждение теоремы доказано.

2) Второе утверждение теоремы докажем также индукцией по порядку групп в классе $\mathfrak{X}$. Предположим, что группа $G\in\mathfrak{X}$ – контрпример минимального порядка. Пусть $\pi=\sigma(\mathfrak{F})$. Так как группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой, то в G по лемме 4.5 существует $\mathfrak{F}$-инъектор V такой, что V не является нормальной подгруппой G. Заметим, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}_i$ для каждого $i\in I$, и поэтому, ввиду изоморфизма $G/G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}_i}/G_{\mathfrak{F}}\cong G/G_{\mathfrak{F}_i}$, следует, что $G/G_{\mathfrak{F}_i}$ – π-разрешимая группа для всех $i\in I$. Тогда по лемме 4.5 в G существует $\mathfrak{F}$-инъектор V_i, который нормален в G для каждого $i\in I$. Далее, следуя доказательству утверждения 1), мы получаем, что справедливы следующие факты.

($а_1$) *$V\cap M=(\bigcap_{i\in I} V_i)\cap M$ для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G.*

($б_1$) *V не является подгруппой группы N, где $N\lhd\lhd G_i$.*

($в_1$) *$G=RV$ для каждой нормальной подгруппы R такой, что либо G/R – нильпотентная π-группа, либо G/R – π'-группа.*

Как и при доказательстве (в), при доказательстве ($в_1$) предположим, что $RV<G$. Если G/R – нильпотентная группа, аналогично, как и в случае (в), приходим к противоречию с утверждением ($б_1$). Предположим, что $G/R\in\mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда очевидно, подгруппа $VR/R\cong V/V\cap R\in\mathfrak{E}_{\pi'}\cap\mathfrak{E}_{\pi}=(1)$. Следовательно, $V=V\cap R$ и $V\subseteq R$, что снова противоречит ($б_1$). Это доказывает утверждение ($в_1$).

($г_1$) *Группа G комонолитична.*

Пусть M_1 и M_2 – максимальные нормальные подгруппы G. Заметим, что если группа G/M_i является π'-группой для некоторого $i\in\{1,2\}$, то с учетом ($в_1$) $G/M_i\cong V/V\cap M_i\in\mathfrak{E}_{\pi}\cap\mathfrak{E}_{\pi'}=(1)$. Следовательно, $V=V\cap M_i$ и $V\leq M_i$, что противоречит ($б_1$).

Значит, группы G/M_1 и G/M_2 являются нильпотентными π-группами и доказательство (г$_1$) аналогично доказательству утверждения (г) из 1). Итак, $M_1=M_2=M$ и, ввиду (а$_1$), $G/M \cong V/(\bigcap_{i\in I} V_i)$, где $V/(\bigcap_{i\in I} V_i)$ – p-группа для некоторого $p\in\pi$. Далее доказательство утверждения 2) теоремы проводится аналогично доказательству утверждению 1) с учетом (а$_1$)–(г$_1$) и утверждения (2) леммы 4.6. Теорема доказана.

Если $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$ классу всех разрешимых групп, то из теоремы вытекает известный результат Блессеноля-Гашюца [4].

***Следствие* 4.8.** *Пересечение любого множества неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга является неединичным разрешимым нормальным классом Фиттинга.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fischer*, *B*. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationschrift, Universität Frankfurt (M), 1966.

2. *Fischer*, *B*. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschűtz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.

3. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

4. *Blessenohl D*. Űber normale Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschűtz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.

5. *Шеметков*, *Л.А*. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн. : Конечные группы. Мн. : Наука и техника. 1975. – С. 207–212.

6. *Laue*, *H*. Űber nichtauflösbarer normalen Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45, № 2. – P. 274–283.

7. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.

8. *Cossey*, *J*. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 3. – S. 289–295.

9. *Lockett, F.P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol. 137. – P. 131–136.

10. *Воробьев, Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

11. *Чунихин*, *С.А*. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Мн. : Наука и техника, 1964.

12. *Сементовский*, *В.Г*. Инъекторы конечных групп / В.Г Сементовский // В кн.: Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн.: Наука и техника. 1984. – С. 166–170.

13. *Feit*, *W*. Solvability of groups of odd order / W. Feit, J. Tompson // Pacif. J. Math. – 1963. – Vol. 13, № 3 – P. 775–1029.

14. *Воробьев*, *Н.Т*. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. ж. – 1996. – Т. 37, № 6 – С. 1296–1302.

15. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro – Springer, 2006. – 385 p.

16. Wenbin, Guo. Theory of Classes of Groups / Guo Wenbin. – Science Press / Kluwer Acad. Publ. Dordreht-Boston-London, 1997. – 258 p.

17. *Hartley*, *B*. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

Поступила в редакцию 13.05.13.