Проблемы физики, математики и техники, № 2 (15), 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ПРОСТРАНСТВЕ МНОГОМЕРНОГО *p*-АДИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА

Е.В. Губкина[1], К.В. Забелло[2], М.А. Прохорович[2], Е.М. Радыно[2]

[1]*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

THE LUZIN APPROXIMATION OF FUNCTIONS FROM SOBOLEV CLASSES ON THE SPACE OF A MULTIDIMENSIONAL *p*-ADIC ARGUMENT

E.V. Gubkina[1], K.V. Zabello[2], M.A. Prokhorovich[2], Ya.M. Radyna[2]

[1]*Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

В работе доказывается аналог теоремы Лузина об исправлении для пространств соболевского типа на *p*-адических векторах. Результаты были анонсированы в журнале «Доклады национальной академии наук Беларуси».

Ключевые слова: *пространства p-адических векторов, пространства Соболева, аппроксимация Лузина.*

In this paper we will prove an analog of the Luzin theorem on correction for spaces of Sobolev type over *p*-adic vectors. The results were announced in «Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus».

Keywords: *space of p-adic vectors, Sobolev spaces, Luzin approximation.*

Введение

Классическая теорема Н.Н. Лузина утверждает, что любая измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция f обладает C-свойством: она является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры. Точнее, *для любой измеримой на* $\mathbb{R}^n$ *функции и любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие функции* $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ *и открытое множество* $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, *для которых*

$$f(x) = \varphi(x) \text{ при } x \in R^n \setminus E_\varepsilon,$$

$$\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon \ (\mu \text{ – мера Лебега на } \mathbb{R}^n).$$

Какие дополнительные свойства гладкости может иметь аппроксимирующая функция φ, если функция f является более регулярной в том или ином смысле, например, принадлежит некоторому функциональному пространству? Можно ли утверждать, что φ является глобально близкой к f?

Эти вопросы исследовались во многих работах, которые в основном были посвящены изучению точечных свойств функций из пространств Соболева $W^q_\alpha(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ – более или менее регулярная область. История этих результатов подробно изложена во введении к статье [1], где рассматривались функции из соболевских классов на произвольных метрических пространствах.

В работе [2] было анонсировано усиление результата из [1] в случае пространств *p*-адических векторов $\mathbb{Q}^n_p$. Приведение полного доказательства и является основной целью нашей работы.

Отметим, что в работе [2] авторы оставили без изменений основную схему рассуждений, приведенную для общих метрических пространств в [1]. В данной работе приведено доказательство, использующее специфику пространств $\mathbb{Q}^n_p$, что в ряде случаев позволило упростить приведенное в [1] доказательство для общего случая.

Перейдем к точным формулировкам.

1 Метрические пространства с мерой

1.1 Пространства однородного типа

Пусть X – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Всюду ниже предполагаем, что мера μ и метрика d связаны условием удвоения: существует постоянная c_μ такая, что

$$\mu\big(B(x,2r)\big) \le c_\mu \mu\big(B(x,r)\big), \ x \in X, \ r > 0, \quad (1.1)$$

где $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ – шар с центром в точке x радиуса r. В таком случае тройку (X,d,μ) обычно называют пространством однородного типа [3].

Условие удвоения (1.1) допускает количественную переформулировку: существуют числа $c > 0$ и $\delta > 0$, для которых

$$\mu\big(B(x,R)\big) \le c\left[\frac{R}{r}\right]^\delta \mu\big(B(x,r)\big), \quad (1.2)$$

где $x \in X$, $0 < r \le R$. Здесь и всюду дальше через c обозначаем различные положительные постоянные, значения которых не играют роли.

Параметр δ из неравенства (1.2) обычно называют показателем удвоения меры или doubling-размерностью – он является адекватной заменой размерности пространства X.

1.2 Максимальные функции Кальдерона–Скотта

Через $L^q = L^q(X)$, $1 \le q < \infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ. Рассмотрим максимальные функции (на пространстве $\mathbb{R}^n$ они появились в работах А. Кальдерона [4] и А. Кальдерона–Р. Скотта [5]):

$$\mathcal{S}_\alpha u(x) = \sup_{B \ni x}[r(B)]^{-\alpha} \fint_B |u - u_B|\, d\mu, \qquad (1.3)$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам B радиуса $r(B) \in (0,1)$, содержащим точку $x \in X$. Здесь и ниже мы используем следующее стандартное обозначение для среднего значения u по шару $B \subset X$:

$$u_B = \fint_B u\, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u\, d\mu.$$

1.3 Классы Кальдерона–Соболева $C_\alpha^q(X)$ и $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-емкости

Для $\alpha > 0$ и $1 < q < \infty$ с помощью максимальных функций (1.3) определим классы

$$C_\alpha^q(X) = \{u \in L^q : \|u\|_{C_\alpha^q} = \|u\|_{L^q} + \|\mathcal{S}_\alpha u\|_{L^q} < \infty\}. \quad (1.4)$$

Для $\mathbb{R}^n$ эти классы были введены в [4], а в общем случае в [6], [7]. Класс $C_1^p(X)$ совпадает с классом Хайлаша–Соболева (см. определение (1.7) ниже), а при $X = \mathbb{R}^n$ – с классическим пространством Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ [4].

Рассмотрим емкости, соответствующие классам $C_\alpha^q(X)$:

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = \inf\left\{\|u\|_{C_\alpha^q(X)}^q : u \in C_\alpha^q(X),\ u \ge 1 \text{ в окрестности } E\right\}. \qquad (1.5)$$

При $\alpha = 1$ они были введены и изучены в [8], а в случае $0 < \alpha \le 1$ – в [9] (см. также [10]).

1.4 Классы Хайлаша–Соболева $W_\alpha^q(X)$

В дальнейшем нам также потребуется эквивалентное определение классов $C_\alpha^q(X)$.

Приведенные ниже классы $W_1^p(X)$ были введены П. Хайлашем в работе [11]. Как уже отмечалось, в случае $X = \mathbb{R}^n$ они совпадают с классическим пространством Соболева первого порядка [11]. Позже классы $W_\alpha^p(X)$ рассматривались при всех $\alpha > 0$ [6], [7]. В настоящее время есть целый ряд эквивалентных описаний этих пространств [7], [12].

Пусть $\alpha > 0$ и $1 < q < \infty$. Для функции $u \in L^q$ рассмотрим класс $D_\alpha(u)$, состоящий из всех неотрицательных μ-измеримых функций g на X, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что при $x, y \in X \setminus E$ выполнено неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le [d(x,y)]^\alpha [g(x) + g(y)]. \quad (1.6)$$

Введем шкалу пространств Соболева следующим образом:

$$W_\alpha^q(X) = \{u \in L^q : D_\alpha(u) \cap L^q \ne \varnothing\},$$
$$\|u\|_{W_\alpha^q(X)} = \left[\|u\|_{L^q}^q + \inf_g \|g\|_{L^q}^q\right]^{1/q}, \qquad (1.7)$$

где точная нижняя граница берется по всем функциям $g \in D_\alpha(u) \cap L^q$.

Классы $C_\alpha^q(X)$ и $W_\alpha^q(X)$ совпадают [7], [12]. Мы будем пользоваться обоими определениями (1.4) и (1.7) (в зависимости от того, какое из них удобнее в том или ином рассуждении).

1.5 s-Вместимость Хаусдорфа и классы Гельдера

Напомним определение s-вместимости Хаусдорфа множества $E \subset X$

$$H_\infty^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i)\right\}.$$

Классы Гельдера вводятся обычным способом: если $E \subset X$, то

$$H^\beta(E) = \left\{\varphi : \|\varphi\|_{H^\beta(E)} = \sup_{x \ne y,\, x, y \in E} [d(x,y)]^{-\beta} |\varphi(x) - \varphi(y)| < +\infty\right\}.$$

1.6 Аппроксимация Лузина на пространствах однородного типа

Следуя [1], [13], будем считать, что все локально суммируемые функции на X определяются всюду равенством

$$u(x) = \limsup_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} u\, d\mu.$$

В работах [1], [11], [13] изучался вопрос об аппроксимации Лузина функций из классов C_α^q на пространствах однородного типа. Итоговый результат выглядит следующим образом:

***Теорема* 1.1.** *Пусть* $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $1 < q < \delta / \alpha$ *и задана функция* $u \in C_\alpha^q(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют функция* w *и открытое множество* $O \subset X$, *такие, что*

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}(O) < \varepsilon$, $H_\infty^{\delta-(\alpha-\beta)q}(O) < \varepsilon$,

2) $u = w$ *на* $X \setminus O$,

3) $w \in C^q_\alpha(X)$ *и* $w \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|u-w\|_{C^q_\alpha(X)} < \varepsilon$.

При $\beta = \alpha = 1$ подобный результат был получен в [11], где вместо 1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в 3) было $w \in H^1(X)$. Случай $\beta \le \alpha = 1$ существенно сложнее, он был изучен в [13]. Общий случай рассмотрен в [1].

Однако существуют ситуации, когда классы Гельдера $H^\alpha(X)$ нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$ (см., напр. [14]), поэтому условие $\alpha \le 1$ существенно снижает множество рассматриваемых ситуаций.

В работе [2] показано, как избавиться от ограничения $\alpha \le 1$ в случае пространств p-адических векторов. Перейдем к рассмотрению соответствующих пространств.

2 Пространства p-адических векторов $\mathbb{Q}_p^n$

2.1 Определение пространства $\mathbb{Q}_p^n$

Далее мы будем иметь дело с пространством p-адических векторов. Прежде всего напомним определение (см., например, [15]).

Пусть p – простое число. В поле $\mathbb{Q}$ можно ввести нормирование $|x|_p$ по правилу $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\sigma(x)}$, где число $\sigma(x) \in Z$ определяется из представления $x = p^\sigma k / l$, в котором $k \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с p.

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по p-адическому нормированию называется полем p-адических чисел и обозначается $\mathbb{Q}_p$. Пространство $\mathbb{Q}_p^n$ состоит из наборов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{Q}_p$, $i = 1, 2, ..., n$, снабжено неархимедовой нормой $\|x\|_{\mathbb{Q}_p^n} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|_p$ и расстоянием

$$d(x, y) = \| x - y \|_{\mathbb{Q}_p^n}.$$

Отметим, что пространство p-адических векторов $\mathbb{Q}_p^n$ является пространством однородного типа с doubling-размерностью n относительно стандартной меры Хаара μ. Далее на $\mathbb{Q}_p^n$ будем рассматривать лишь эту меру. Классы C^q_α, W^q_α и емкости на $\mathbb{Q}_p^n$ определим так же, как и в общем случае (см. (1.4), (1.7) и (1.5)).

2.2 Аппроксимация Лузина на пространстве $\mathbb{Q}_p^n$

Доказательство приведенной ниже теоремы 2.1 является основным результатом нашей работы. Ее формулировка имеется в [2] без полного доказательства, а лишь с указанием, как избавиться от ограничения $\alpha \le 1$.

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < \beta \le \alpha$, $1 < q < n/\alpha$, *и задана функция* $u \in C^q_\alpha(\mathbb{Q}_p^n)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* w *и открытое множество* $O \subset \mathbb{Q}_p^n$ *такие, что*

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}(O) < \varepsilon$, $H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(O) < \varepsilon$,

2) $u = w$ *на* $\mathbb{Q}_p^n \setminus O$,

3) $w \in C^q_\alpha(\mathbb{Q}_p^n)$ *и* $w \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|u-w\|_{C^q_\alpha(\mathbb{Q}_p^n)} < \varepsilon$.

Еще раз подчеркнем, что при доказательстве теоремы 2.1 мы существенно используем специфику пространства $\mathbb{Q}_p^n$, что позволяет в ряде случаев заметно упростить рассуждения из [1].

Перейдем к строгим рассуждениям. Прежде всего нам понадобится ряд утверждений, которые являются специфическими для пространства $\mathbb{Q}_p^n$: в случае общих метрических пространств с мерой некоторые из них верны лишь при $0 < \alpha \le 1$.

3 Вспомогательные утверждения

Шар радиуса p^γ с центром в точке $x \in \mathbb{Q}_p^n$ будем далее обозначать

$$B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p^n : \|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^n} \le p^\gamma\}.$$

В случае, когда центр шара не важен для наших рассуждений, мы будем его опускать и писать просто B_γ.

3.1 Массивность множества точек Лебега для функций из классов $u \in C^q_\alpha(\mathbb{Q}_p^n)$

Напомним, что $x \in \mathbb{Q}_p^n$ называется точкой Лебега для функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$, если

$$u(x) = \lim_{\gamma \to -\infty} \fint_{B_\gamma(x)} u\, d\mu. \tag{3.1}$$

Классическая теорема Лебега утверждает, что для любой локально интегрируемой на $\mathbb{R}^n$ функции почти все точки являются точками Лебега относительно обычной меры Лебега. Для функций из классов $C^q_\alpha(\mathbb{Q}_p^n)$ можно утверждать большее.

Лемма 3.1. *Пусть* $\alpha > 0$, $1 < q < n/\alpha$, *и функция* $u \in C^q_\alpha(\mathbb{Q}_p^n)$. *Тогда существует такое множество* $E \subset \mathbb{Q}_p^n$, *что для любого* $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus E$ *существует предел* (3.1) *и справедливы следующие оценки массивности множества* E:

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$,

2) $H^s_\infty(E) = 0$ *для всех* $s > n - \alpha q$.

В общем случае пространств однородного типа при $\alpha = 1$ утверждение 1) доказано в [16], а утверждение 2) – в [13]. Случай $0 < \alpha \le 1$ рассмотрен в [9] и [17] соответственно.

Утверждение 1) верно в общем случае только для $0 < \alpha \le 1$, однако в случае пространства $\mathbb{Q}_p^n$ оно остается в силе при любом $\alpha > 0$ [18]. Утверждение 2) остается в силе для любых $\alpha > 0$ и для общего случая [19].

3.2 Неравенства для средних Стеклова

При доказательстве основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные неравенства, в которых фигурируют средние Стеклова. В общем случае доказательство неравенств приведено в [1, лемма 4].

***Лемма* 3.2.** *Пусть* $\beta > 0$ *и функция* $u \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$. *Тогда*

1) *Если* $B_\gamma(x) \subset B_{\gamma+1}(y)$, *то*
$$|u_{B_{\gamma+1}(y)} - u_{B_\gamma(x)}| \le cp^{\beta(\gamma+1)} \mathcal{S}_\beta u(y).$$

2) *Если* x *– точка Лебега функции* u, *то*
$$|u_{B_\gamma(x)} - u(x)| \le cp^{\beta\gamma} \mathcal{S}_\beta u(x).$$

3.3 Весовое L^q *-неравенство*

Нам также понадобится весовое L^q-неравенство для $\mathcal{S}_\beta u$ [1, лемма 5].

***Лемма* 3.3.** *Пусть* $p > 0$, $0 < \beta < \alpha$, *а мера* μ *и внешняя мера* ν *связаны условием*
$$\nu(B_\gamma(x)) \le c(p^\gamma)^{-(\alpha-\beta)q} \mu(B_\gamma(x)), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad \gamma < 0. \tag{3.2}$$

Тогда для $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$ *справедливо неравенство*
$$\left\| \mathcal{S}_\beta u \right\|_{L^q_\nu(\mathbb{Q}_p^n)} \le c \left\| \mathcal{S}_\alpha u \right\|_{L^q_\mu(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Здесь для борелевской функции u и внешней меры ν на $\mathbb{Q}_p^n$ использовано обозначение
$$\|u\|^q_{L^q_\nu(\mathbb{Q}_p^n)} = q\int_0^\infty \lambda^{q-1} \nu\{|u| > \lambda\}\, d\lambda, \quad 1 \le q < \infty.$$

Конечно, если ν является мерой, то $\|u\|_{L^q_\nu(\mathbb{Q}_p^n)}$ совпадает с обычной нормой
$$\|u\|_{L^q_\nu(\mathbb{Q}_p^n)} = \left[\int_{\mathbb{Q}_p^n} |u|^q d\nu \right]^{1/q}.$$

3.4 Свойства $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$*-емкостей*

Необходимые нам свойства $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-емкостей собраны в следующей лемме.

***Лемма* 3.4.** *Пусть* $E \subset \mathbb{Q}_p^n$, $\alpha > 0$ *и* $n > \alpha q$, *тогда*:

1) *Емкость* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$ *является внешней мерой и*
$$\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = \inf\left\{ \mathrm{Cap}_{\alpha,q}(O) : E \subset O, O - \text{открыто} \right\}.$$

2) $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(B_\gamma(x)) \le cp^{-\alpha q\gamma} \mu(B_\gamma(x))$,
$$x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad \gamma < 0.$$

3) *При* $0 < \beta \le \alpha$ *из* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ *следует*
$$\mathrm{Cap}_{\beta,q}(E) = 0.$$

Доказательство свойства 1 для метрических пространств приведено в [8, теорема 3.2 и замечание 3.3] для $\alpha = 1$. Оно остается в силе для любых $\alpha > 0$, что отмечалось в [10].

Утверждение 2 на пространствах однородного типа верно, по-видимому, лишь для $0 < \alpha \le 1$ [10, теорема 1]. Однако, в случае пространств $\mathbb{Q}_p^n$ оно сохраняется для любых $\alpha > 0$ (см. [20, лемма 5.4]).

Свойство 3 следует из очевидного неравенства $\mathrm{Cap}_{\beta,p}(E) \le c\,\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)$, которое легко получить из определений (1.3), (1.4) и (1.5).

3.5 Лемма о покрытиях

В общем случае произвольных пространств однородного типа обычно используются более сложные покрытия, в отличие от приведенного в лемме 3.5 (см., например, [1, лемма 7]).

***Лемма* 3.5.** *Пусть* $O \subset \mathbb{Q}_p^n$ *– открытое множество,* $O \ne \mathbb{Q}_p^n$ *и* $\mu(O) < \infty$. *Тогда существует набор шаров* $\mathcal{B} = \{B_{\gamma_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$, *такой, что:*

1) *шары* $B_{\gamma_i}(x_i)$ *попарно не пересекаются,*

2) $\bigcup_{i=1}^\infty B_{\gamma_i}(x_i) = O$,

3) $B_{\gamma_i}(x_i) \subset O$ *для любого* $i = 1, 2, \ldots$,

4) $B_{\gamma_i+1}(x_i) \cap (\mathbb{Q}_p^n \setminus O) \ne \varnothing$ *для любого* i.

Доказательство. Множество $\mathcal{B}$ будем строить по индукции. Прежде всего отметим, что так как $\mu(O) < \infty$, то существует число γ_0, такое, что $\mu(B_{\gamma_0}) \le \mu(O) < \mu(B_{\gamma_0+1})$.

На первом шаге индукции построим разбиение $\{B_{\gamma_0}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ пространства $\mathbb{Q}_p^n$ непересекающимися шарами радиуса p^{γ_0} и выберем из него шары, целиком лежащие в O. Из них составим множество
$$\mathcal{B}_0 = \left\{ B_{\gamma_0}(x_i) : B_{\gamma_0}(x_i) \subset O \right\}.$$

На втором шаге построим новое разбиение $\{B_{\gamma_0-1}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ пространства $\mathbb{Q}_p^n$ непересекающимися шарами радиуса p^{γ_0-1}. (Отметим, что набор $\{x_i\}$ центров шаров свой для каждого шага.) Из разбиения $\{B_{\gamma_0-1}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ выберем шары, целиком лежащие в $O \setminus \mathcal{B}_0$ (здесь под разностью $O \setminus \mathcal{B}_0$ понимаем разность множества O и объединения всех шаров, входящих в $\mathcal{B}_0$), и составим из них множество

$$\mathcal{B}_1 = \left\{B_{\gamma_0-1}(x_i) : B_{\gamma_0-1}(x_i) \subset O \setminus \mathcal{B}_0\right\}.$$

На $(k+1)$-м шаге пространство $\mathbb{Q}_p^n$ разбивается шарами радиуса p^{γ_0-k} и строится множество

$$\mathcal{B}_k = \left\{B_{\gamma_0-k}(x_i) : B_{\gamma_0-k}(x_i) \subset O \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}_j\right)\right\},$$

где разность множества O и семейства шаров понимается, как и на втором шаге.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что шары из множества $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.5.

Теперь мы готовы перейти к доказательству теоремы 2.1.

4 Доказательство теоремы 2.1

Сначала докажем теорему в предположении, что для некоторого $x_0 \in \mathbb{Q}_p^n$

$$\operatorname{supp} u \subset B_0(x_0) = B_0. \qquad (4.1)$$

4.1 Оценка исключительного множества

Пусть Λ – множество точек, в которых не выполнено условие (3.1).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу леммы 3.1 $H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(\Lambda) = 0$, а в силу лемм 3.1 и 3.4 $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}(\Lambda) = 0$. Следовательно, существует такое открытое множество $L \supset \Lambda$, что

$$\begin{gathered}\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}(L) < \varepsilon/2,\\ H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(L) < \varepsilon/2.\end{gathered} \qquad (4.2)$$

Заметим далее, что $\mathcal{S}_\beta u(x) = 0$ для любой точки $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus B_0$ (так как $\operatorname{dist}(x, B_0) > 1$), следовательно,

$$E_\lambda = \left\{x \in \mathbb{Q}_p^n : \mathcal{S}_\beta u(x) > \lambda\right\} \subset B_0.$$

Легко видеть, что множество $O = E_\lambda \cup L$ открыто и $O \subset B_0$. Покажем, что для достаточно больших λ множество O удовлетворяет требованиям нашей теоремы.

В силу части 2) леммы 3.4 выполнено условие (3.2) леммы 3.3. Поэтому, применяя лемму 3.3 к $\nu = \mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}$, получаем

$$\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}(E_\lambda) \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty. \qquad (4.3)$$

Вместимость $H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(O)$ также оцениваем с помощью леммы 3.3, но применяем мы ее уже к $\nu = H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}$. Условие (3.2) сейчас выполнено, так как

$$\begin{gathered}H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(B_\gamma(x)) \le (p^\gamma)^{n-(\alpha-\beta)q} \le\\ \le c(p^\gamma)^{-(\alpha-\beta)q}\mu(B_\gamma(x)).\end{gathered}$$

Итак, в силу леммы 3.3

$$H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}(E_\lambda) \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty. \qquad (4.4)$$

Из (4.2) и (4.3), (4.4) следует, что при достаточно большом $\lambda > 0$ для множества O утверждение 1) теоремы 2.1 выполнено.

Для дальнейшего нам понадобится также выбрать $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int_O |u|^q \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.5)$$

Это возможно в силу уже доказанного утверждения 1) теоремы 2.1, очевидного неравенства $\mu(E) \le \mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,q}(E)$ и абсолютной непрерывности интеграла.

4.2 Построение аппроксимирующей функции w

Пусть $\mathcal{B} = \{B_{\gamma_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ – покрытие множества O из леммы 3.5. Определим функцию w следующим образом:

$$w(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O,\\ u_{B_{\gamma_i}(x_i)}, & x \in B_{\gamma_i}(x_i).\end{cases} \qquad (4.6)$$

Утверждение 2) теоремы 2.1 следует непосредственно из определения w.

4.3 Оценка гладкости функции w

4.3.1 Вспомогательное рассуждение

Пусть $x \in O$, тогда найдется k, такое, что $x \in B_{\gamma_k}(x_k) \in \mathcal{B}$. В силу утверждения 4) леммы 3.5 существует такая точка $x^* \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$, что $d(x, x^*) = p^{\gamma_k+1}$.

Заметим, что $x^* \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ – точка Лебега, $B_{\gamma_k}(x_k) \subset B_{\gamma_k+1}(x^*)$ и $\mathcal{S}_\beta u(x^*) \le \lambda$. Далее воспользуемся определением функции w (4.6) и леммой 3.2

$$\begin{gathered}|w(x^*) - w(x)| = |u(x^*) - u_{B_{\gamma_k}(x_k)}| \le\\ \le |u(x^*) - u_{B_{\gamma_k+1}(x^*)}| + |u_{B_{\gamma_k+1}(x^*)} - u_{B_{\gamma_k}(x_k)}| \le\\ \le c p^{\beta(\gamma_k+1)} \mathcal{S}_\beta u(x^*) =\\ = c[d(x,x^*)]^\beta \mathcal{S}_\beta u(x^*) \le c\lambda[d(x,x^*)]^\beta.\end{gathered} \qquad (4.7)$$

4.3.2 Принадлежность функции w классу Гельдера

Покажем, что $w \in H^\beta(\mathbb{Q}_p^n)$. Для этого рассмотрим все возможные случаи расположения точек $x, y \in \mathbb{Q}_p^n$.

i) Пусть $x, y \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ и $d(x,y) = p^{\gamma^*}$, тогда $B_{\gamma^*}(x) = B_{\gamma^*}(y)$. Так как x, y – точки Лебега и для любой точки $z \in \mathbb{Q}_p^n \setminus O$ выполнено $\mathcal{S}_\beta u(z) \le \lambda$, то по лемме 3.2

$$|w(y) - w(x)| \le$$

$$\le |u(y)-u_{B_{\gamma^*}(y)}|+|u(x)-u_{B_{\gamma^*}(x)}|\le$$
$$\le cp^{\beta\gamma^*}\mathcal{S}_\beta u(y)+cp^{\beta\gamma^*}\mathcal{S}_\beta u(x)\le c\lambda[d(x,y)]^\beta. \quad (4.8)$$

ii) Пусть $x,y\in O$. Обозначим

$$d_0=\max\{\operatorname{dist}(x,\mathbb{Q}_p^n\setminus O),\operatorname{dist}(y,\mathbb{Q}_p^n\setminus O)\}. \quad (4.9)$$

Если $d(x,y)\ge d_0$, то подберем $x^*,y^*\in\mathbb{Q}_p^n\setminus O$ так, чтобы

$$d(x,x^*)=\operatorname{dist}(x,\mathbb{Q}_p^n\setminus O)$$

и

$$d(y,y^*)=\operatorname{dist}(y,\mathbb{Q}_p^n\setminus O).$$

Тогда из (4.7) и (4.8)

$$|w(y)-w(x)|\le$$
$$\le|w(x)-w(x^*)|+|w(x^*)-w(y^*)|+$$
$$+|w(y^*)-w(y)|\le c\lambda[d(x,y)]^\beta.$$

Если $d(x,y)<d_0$, то в силу утверждения 4) леммы 3.5 нетрудно показать, что существует k, такое, что $x,y\in B_{\gamma_k}(x_k)\in\mathcal{B}$. Следовательно, $w(y)=w(x)$ и необходимое неравенство выполнено автоматически.

iii) Пусть $x\in O$, а $y\in\mathbb{Q}_p^n\setminus O$. Выберем $x^*\in\mathbb{Q}_p^n\setminus O$ так, чтобы $d(x,x^*)=\operatorname{dist}(x,\mathbb{Q}_p^n\setminus O)$. Тогда в силу (4.7) и (4.8)

$$|w(y)-w(x)|\le$$
$$\le|w(y)-w(x^*)|+|w(x^*)-w(x)|\le$$
$$\le c\lambda[d(x,y)]^\beta.$$

Таким образом, $w\in H^\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ в силу i)–iii).

4.3.3 Принадлежность функции w классу Соболева

Учитывая определение классов $C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ (1.4), нам достаточно показать, что $w\in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\mathcal{S}_\alpha w\in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

Принадлежность функции w **классу** $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$. Учитывая определение функции w (4.6), условия 1)–2) леммы 3.5 и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\int_O|w|^q\,d\mu=\sum_{i=1}^\infty\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|u_{B_{\gamma_i}(x_i)}|^q\,d\mu\le$$
$$\le\sum_{i=1}^\infty\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|u|^q\,d\mu=\int_O|u|^q\,d\mu. \quad (4.10)$$

Так как $w=u$ на $\mathbb{Q}_p^n\setminus O$, то $w\in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

Принадлежность функции $\mathcal{S}_\alpha w$ **классу** $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$. Покажем, что $\mathcal{S}_\alpha w\le\mathcal{S}_\alpha u$. Из определения (1.3) следует, что достаточно показать лишь

$$\int_B|w-w_B|\,d\mu\le\int_B|u-u_B|\,d\mu \quad (4.11)$$

для любого шара $B\subset\mathbb{Q}_p^n$. Рассмотрим три случая:

i) Если $B\subset\mathbb{Q}_p^n\setminus O$, то в силу (4.6) $u=w$ на шаре B и (4.11) выполнено.

ii) Пусть $B\subset O$. Тогда из леммы 3.5 следует, что найдется k, такое что $B\subset B_{\gamma_k}(x_k)\in\mathcal{B}$. Тогда в силу (4.6) $w(x)=u_{B_{\gamma_i}(x_i)}=w_B$ и на шаре B выполнено $|w-w_B|=0$, что влечет (4.11).

iii) Если $B\cap O\ne\varnothing$ и $(B\setminus O)\ne\varnothing$, то из леммы 3.5 следует, что найдется множество индексов I_B таких, что $B\cap O=\bigcup_{i\in I_B}B_{\gamma_i}(x_i)$, где $B_{\gamma_i}(x_i)\in\mathcal{B}$.

Сначала воспользуемся (4.6) и оценим интеграл от функции w по шару B

$$\int_B w\,d\mu=\int_{B\setminus O}u\,d\mu+\sum_{i\in I_B}\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}u_{B_{\gamma_i}(x_i)}\,d\mu=$$
$$=\int_{B\setminus O}u\,d\mu+\sum_{i\in I_B}\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}u\,d\mu=\int_B u\,d\mu.$$

Следовательно, $w_B=u_B$.

Переходим к оценке левой части неравенства (4.11):

$$\int_B|w-w_B|\,d\mu=\int_B|w-u_B|\,d\mu=$$
$$=\sum_{i\in I_B}\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|w-u_B|\,d\mu+\int_{B\setminus O}|w-u_B|\,d\mu. \quad (4.12)$$

Заметим, что в силу (4.6)

$$\int_{B\setminus O}|w-u_B|\,d\mu=\int_{B\setminus O}|u-u_B|\,d\mu. \quad (4.13)$$

Заметим также, что

$$\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|w-u_B|\,d\mu=$$
$$=\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|u_{B_{\gamma_i}}-u_B|\,d\mu\le\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|u-u_B|\,d\mu. \quad (4.14)$$

Продолжим (4.12) с учетом (4.13) и (4.14):

$$\int_B|w-w_B|\,d\mu\le$$
$$\le\sum_{i\in I_B}\int_{B_{\gamma_i}(x_i)}|u-u_B|\,d\mu+\int_{B\setminus O}|u-u_B|\,d\mu=$$
$$=\int_B|u-u_B|\,d\mu,$$

следовательно, $\mathcal{S}_\alpha w(x)\le\mathcal{S}_\alpha u(x)$ и, так как $u\in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$, то $w\in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

4.4 Оценка нормы отклонения $\|u-w\|_{C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)}$

В этом разделе нам потребуется эквивалентное определение классов (1.7) и максимальная функция (4.15).

4.4.1 Максимальная функция Харди–Литтлвуда

Максимальная функция Харди–Литтлвуда вводится обычным способом

$$Mu(x)=\sup_{B} ⨍_{B} |u|\,d\mu, \qquad (4.15)$$

где супремум берется по всем шарам B, содержащим точку $x\in\mathbb{Q}_p^n$. Она удовлетворяет стандартному неравенству

$$\|Mu\|_{L^q}\le c\|u\|_{L^q},\ u\in L^q,\ q>1$$

(см., например, [3]).

4.4.2 Основная оценка

Для начала выберем функцию $g\in D_\alpha(u)\cap L^q$ и покажем, что для некоторой постоянной c верно $cMg\in D_\alpha(w)\cap L^q$.

Снова рассмотрим возможные случаи расположения точек $x,y\in\mathbb{Q}_p^n$.

i) Если $x,y\in\mathbb{Q}_p^n\setminus O$, то $w=u$ и, в силу того, что $g(x)\le Mg(x)$ для μ-почти всех x, μ-почти всюду на $\mathbb{Q}_p^n\setminus O$ выполнено

$$|w(x)-w(y)|=|u(x)-u(y)|\le$$
$$\le[d(x,y)]^\alpha[g(x)+g(y)]\le$$
$$\le[d(x,y)]^\alpha[Mg(x)+Mg(y)].$$

ii) Если $x,y\in O$, то сначала предположим, что $d(x,y)\le d_0$ (см. (4.9)). Это значит, что обе точки лежат в одном шаре B_{γ_i} из покрытия $\mathcal{B}=\{B_{\gamma_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$. А тогда $w(x)=w(y)$ и необходимое неравенство выполнено автоматически.

Пусть $d(x,y)>d_0$. Отметим, что для любого шара $B\subset\mathbb{Q}_p^n$, любой функции $u\in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и $g\in D_\alpha(u)\cap L^q$ справедливо (для доказательства достаточно дважды проинтегрировать (1.6) по шару B)

$$⨍_{B_\gamma}|u-u_{B_\gamma}|\,d\mu\le c(p^\gamma)^\alpha ⨍_{B_\gamma} g\,d\mu,$$

откуда легко следует, что

$$|u(x)-u_{B_{\gamma_i}(x_i)}|\le cp^{\gamma_i\alpha}Mg(x). \qquad (4.16)$$

Существует такие k и l, что $x\in B_{\gamma_k}(x_k)$, $y\in B_{\gamma_l}(x_l)$. Тогда из (4.16)

$$|w(y)-w(x)|\le|u_{B_{\gamma_k}(x_k)}-u(x)|+$$
$$+|u_{B_{\gamma_l}(x_l)}-u(y)|+|u(x)-u(y)|\le$$
$$\le cp^{\gamma_k\alpha}Mg(x)+cp^{\gamma_l\alpha}Mg(y)+$$
$$+[d(x,y)]^\alpha[g(x)+g(y)].$$

Так как $d(x,y)\ge d_0$ и $g(x)\le Mg(x)$ для μ-почти всех x, то

$$|w(y)-w(x)|\le$$
$$\le c[d(x,y)]^\alpha[Mg(x)+Mg(y)]. \qquad (4.17)$$

iii) Пусть $x\in O$ и $y\in\mathbb{Q}_p^n\setminus O$. Тогда в силу (4.6)

$$|w(y)-w(x)|=|u(y)-u_{B_{\gamma_i}(x_i)}|\le$$
$$\le ⨍_{B_{\gamma_i}(x_i)}|u(x)-u(y)|\,d\mu(y)\le$$
$$\le c[d(x,y)]^\alpha[Mg(x)+Mg(y)].$$

Пусть $g\in D_\alpha(u)\cap L^q$. Заметим, что

$$c(Mg)\chi_O\in D_\alpha(u-w)\cap L^q,$$

где χ_O – характеристическая функция множества O. Отсюда $\|c(Mg)\chi_O\|_{L^q}\le\varepsilon/2$ и

$$\|u-w\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)}\le\|u-w\|_{L^q}+\|c(Mg)\chi_O\|_{L^q}\le c\varepsilon$$

(неравенство $\|u-w\|_{L^p}<c\varepsilon$ справедливо в силу (4.6), (4.5) и (4.10)).

Основная оценка справедлива в силу эквивалентности норм классов W_α^q и C_α^q.

4.5 Переход к глобальной форме теоремы

Теперь нужно избавиться от ограничения (4.1). Построим разбиение множества $\mathbb{Q}_p^n$ единичными шарами. Обозначим через ψ_i характеристические функции этих шаров, через x_i – их центры.

Так как ψ_i – гельдеровские функции, то $u\psi_i\in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$ для любой $u\in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)$. (Это утверждение доказано в [13] для $\alpha=1$, для других α доказательство такое же.) Тогда по доказанному выше для любого $i=1,2,3\ldots$, существует функция w_i такая, что

$$H_\infty^{n-(\alpha-\beta)q}\left(\left\{x\in\mathbb{Q}_p^n: w_i(x)\ne u\psi_i(x)\right\}\right)\le 2^{-i}\varepsilon,$$
$$\operatorname{supp} w_i\subset B_0(x_i),$$
$$\operatorname{Cap}_{\alpha-\beta,q}\left(\left\{x\in\mathbb{Q}_p^n: w_i(x)\ne u\psi_i(x)\right\}\right)\le 2^{-i}\varepsilon,$$
$$w_i\in C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)\cap H^\beta(\mathbb{Q}_p^n),$$
$$\|w_i-u\psi_i\|_{C_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^n)}\le 2^{-i}\varepsilon.$$

Функция $w=\sum_{i=1}^\infty w_i$ удовлетворяет необходимым условиям. Свойства 1), 2) и 4) очевидны, ясно также, что $w\in C_\alpha^p(\mathbb{Q}_p^n)$.

Покажем, что w принадлежит классу Гельдера $H^\beta(B)$ для любого шара $B\subset\mathbb{Q}_p^n$. Пусть

$$I_B=\{i: B_0(x_i)\cap B\ne\varnothing\}.$$

Число элементов множества I_B конечно, следовательно, при всех $x,y\in B$

$$|w(x)-w(y)|=\left|\sum_{i\in I_B}[w_i(x)-w_i(y)]\right|\le$$
$$\le d^\beta(x,y)\sum_{i\in I_B}\|w_i\|_{H^\beta(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кротов, В.Г.* Аппроксимация Лузина функций из классов W^p_α на метрических пространствах с мерой / В.Г. Кротов, М.А. Прохорович // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 5. – С. 55–66.

2. *Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на пространстве p-адических векторов* / Е.В. Губкина [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 16–18.

3. *Coifman, R.R.* Lecture Notes in Mathematics: Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenes / R.R. Coifman, G. Weiss. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 1971. – 160 p.

4. *Calderón, A.P.* Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions / A.P. Calderón // Studia Mathematica. – 1972. – Vol. 44. – P. 561–582.

5. *Calderón, A.P.* Sobolev type inequalities for $p > 0$ / A.P. Calderón, R. Scott // Studia Mathematica. – 1978. – Vol. 62. – P. 75–92.

6. *Hu, J.* A note on Hajłasz–Sobolev spaces on fractals / J. Hu // Journal of mathematical analysis and applications. – 2003. – Vol. 280, 1. – P. 91–101.

7. *Yang, D.* New characterization of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces / D. Yang // Science in China (series A). – 2003. – Vol. 46, № 5. – P. 675–689.

8. *Kinnunen, J.* The Sobolev capacity on metric spaces / J. Kinnunen, O. Martio // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica. – 1996. – Vol. 21. – P. 367–382.

9. *Прохорович, М.А.* Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша–Соболева на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Известия НАН Беларуси. Серия физико–математических наук. – 2006. – № 1. – С. 19–23.

10. *Прохорович, М.А.* Соболевские емкости на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, Математика, Информатика. – 2007. – № 3. – С. 106–111.

11. *Hajłasz, P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces / P. Hajłasz // Potential Analysis. – 1996. – Vol. 5, № 4. – P. 403–415.

12. *Иванишко, И.А.* Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой / И.А. Иванишко // Математические заметки. – 2005. – Т. 77, № 6. – С. 937–940.

13. *Hajłasz, P.* Hölder qasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces / P. Hajłasz, J. Kinnunen // Revista Matemática Iberoamericana. – 1998. – Vol. 14, № 3. – P. 601–622.

14. *Jonsson, A.* Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions / A. Jonsson // Journal of mathematical analysis and applications. – 2004. – Vol. 290, № 1. – P. 86–104.

15. *Schikhof, W.* Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis / W. Schikhof. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – 306 p.

16. *Kinnunen, J.* Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces / J. Kinnunen, V. Latvala // Revista Matemática Iberoamericana. – 2002. – Vol. 18, № 3. – P. 685–700.

17. *Прохорович, М.А.* Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W^p_α на метрических пространствах / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 1. – С. 99–107.

18. *Олешкевич, Д.Н.* Точки Лебега для функций из классов Соболева на пространстве p-адических чисел / Д.Н. Олешкевич, М.А. Прохорович // Вестник БрГУ. Серия 4: Физика, Математика. – 2010. – № 2. – С. 103–110.

19. *Прохорович, М.А.* Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W^p_α, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 4. – С. 616–621.

20. *Олешкевич, Д.Н.* Пространства функций экспоненциального типа и соболевские пространства функций p-адического аргумента : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. / Д.Н. Олешкевич. – Минск, 2011. – 102 с.

М.А. Прохорович выполнял работу при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13М – 036).

Поступила в редакцию 30.03.13.