Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

С. П. ЖОГАЛЬ, Т.Я. КАМОРНИКОВА

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ И ЭКСПЕРТНОГО ВЫБОРА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ по спецкурсу
для студентов специальности 1-31 03 01 02 «Математика» (научно-педагогическая деятельность) специализации 1-31 03 01 02 15 «Математическая информатика»

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
2009

УДК 519.816 : 519.243 (075.8)
ББК 22.183.1 я 73
Ж 783

Рецензент:
кафедра математических проблем управления учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Жогаль, С.П.
Ж 783 Методы принятия решения и экспертного выбора : тексты лекций по спецкурсу для студентов специальности 1-31 03 01 02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1- 31 03 01 02 15 «Математическая информатика» /С.П. Жогаль, Т.Я. Каморникова; М-во образования РБ, Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – 79 с.

Целью подготовки текстов лекций по спецкурсу является оказание помощи студентам в овладении основными разделами теоретической и прикладной математики, основами быстро развивающихся и перспективных направлений современных знаний таких, как теория принятия решений в условиях неопределенности и риска, многокритериальная оптимизация и экспертный выбор, теория благосостояния и кооперативное принятие решений.

Тексты лекций по спецкурсу «Методы принятия решения и экспертного выбора» адресованы студентам специальности 1-31 03 01 02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1- 31 03 01 02 15 «Математическая информатика», но могут быть использованы и студентами других математических специальностей и специализаций.

УДК 519.816 : 519.243 (075.8)
ББК 22.183.1 я 73

Содержание

Введение

Вопросы принятия наилучших (эффективных) решений стали в настоящее время весьма актуальными, особенно в экономике, технике, политике, военном деле и других областях человеческой деятельности. Практическая задача принятий решений предполагает, как правило, достижение некоторой цели, причем качество решения, его полезность не может быть оценено единственной функцией. Механизм рационального выбора в таких ситуациях требует привлечения математического аппарата для сравнения альтернатив. Таково положение дел при выборе оптимальных решений в условиях неопределенности, в многокритериальных ситуациях, в теории группового (кооперативного) выбора, когда решение должно учитывать интересы различных лиц.

Целью подготовки текстов лекций по спецкурсу является оказание помощи студентам в овладении основными разделами теоретической и прикладной математики, основами быстро развивающихся и перспективных направлений современных знаний таких, как теория принятия решений в условиях неопределенности и риска, многокритериальная оптимизация и экспертный выбор, теория благосостояния и кооперативное принятие решений. Этой цели подчинена и структура курса: в начале каждой темы кратко излагается теоретический материал, знание которого необходимо для решения прикладных задач данной темы. Затем рассматриваются методы решения задач конкретного вида и разбираются примеры их применения. Такая форма подачи материала наиболее удобна для его активного усвоения студентами.

Тексты лекций по спецкурсу «Методы принятия решения и экспертного выбора» адресованы студентам специальности 1-31 03 01 02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1- 31 03 01 02 15 «Математическая информатика», но могут быть использованы и студентами других математических специальностей и специализаций.

Тема 1
Основные понятия теории принятия решений в условиях неопределенности и риска

1.1 Матрица решений

Управление системой, проектирование устройств, планирование деятельности и вообще принятие решений предполагает, как правило, достижение некоторой цели или, по крайней мере, последовательное приближение к некоторому наиболее предпочтительному состоянию или поведению.

Только в простейших случаях удается указать шкалу – целевую функцию, значения которой измеряют качество решения. В более сложных ситуациях качество решения не может быть оценено единственной функцией. Механизм рационального выбора в таких случаях требует некоторой дополнительной косвенной информации, позволяющее, по крайней мере, сравнивать альтернативы. Таково, в частности, положение дел при выборе решений в условиях неопределенности и риска, в задачах со многими критериями.

Необходимость принимать решения, для которых не удается полностью учесть предопределяющие их условия, а также последующее их влияние (так называемый эффект неопределенности) встречается во всех областях техники, экономики и социальных наук.

Планирование всегда более или менее связано с подобными факторами неопределенности. Тем не менее, именно в подобных ситуациях ответственность за принимаемые решения очень велика. Поэтому необходимо стремиться к оптимальному использованию имеющейся информации относительно поставленной задачи, чтобы, взвесив все возможные варианты решения, постараться найти среди них наилучший.

Такая тенденция неизбежно требует строгой математической формализации процесса принятия решений, поскольку очевидно, что адекватная формализация может оказать существенную помощь при решении практических задач.

Принятие решений представляет собой выбор одного из некоторого множества вариантов: $E_i \in E$. Условимся, что каждый вариант E_i вырабатывает некоторую количественную оценку e_i. Будем искать вариант решения с наибольшим значением e_i, полагая, что e_i характеризует также величины как полезность, надежность, выигрыш, прибыль. Таким образом, выбор оптимального варианта производится с помощью критерия

$$E_o = \left\{ E_{io} \mid E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i e_i \right\}. \quad (1.1)$$

Рассмотренный случай, когда каждому варианту решения соответствует единственное внешнее состояние (случай детерминированных решений), с точки зрения его применения, является простейшим. При решении большинства практических задач каждому допустимому варианту решения E_i могут соответствовать, вследствие различных внешних условий, различные внешние состояния F_j и количественные оценки решений e_{ij}. Рассмотрим пример, иллюстрирующий подобную ситуацию.

Пусть требуется изготовить изделие, долговечность которого зависит от вида материала, из которого оно состоит, и внешних условий, связанных с той или иной степенью нагрузки при эксплуатации изделия. Нагрузки считаются известными. Требуется определить вид материала, из которого целесообразно изготовить изделие.

Варианты решений в данном примере таковы:

E_1 – выбор вида материала из соображений максимальной долговечности;

E_m – выбор вида материала из соображений минимальной долговечности;

E_i – промежуточные решения (i = 2,3,…,m–1).

F_1 – условия, обеспечивающие максимальную долговечность;

F_n – условия, обеспечивающие минимальную долговечность;

F_j – промежуточные условия (j = 2,3,…,n–1).

Под результатом решения e_{ij} будем понимать оценку, соответствующую варианту решения E_i и условиям F_j и характеризующую экономический эффект (прибыль), полезность или надежность изделия.

Ситуация, соответствующая описанному примеру, характеризуется следующей *матрицей решений* $\|e_{ij}\|$ (таблица 1.1):

Таблица 1.1 – Матрица решений

	F_1	F_2	…	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	…	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	…	e_{2n}
…	…	…	…	…
E_m	e_{m1}	e_{m2}	…	e_{mn}

По данной матрице необходимо выбрать тот вариант решения, которому соответствует наилучший результат, но так как неизвестно, какое из внешних условий может наступить, необходимо принимать во внимание все оценки $e_{i\,j}$. Таким образом, первоначальная задача максимизации согласно критерию (1.1) должна быть теперь заменена другой.

1.2 Оценочная функция

Процедура выбора в случае нескольких внешних состояний может быть представлена по аналогии с применением критерия (1.1). При этом матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется некоторым столбцом, то есть каждому варианту E_i приписывается некоторый результат e_{ir}. Проблема в том, какой смысл вложить в результат e_{ir}. Оценочные функции можно вводить различным образом. Если, например, последствия каждого из альтернативных решений характеризовать комбинацией из его наибольшего и наименьшего результатов, то можно принять:

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}, \tag{1.2}$$

наилучший в этом смысле результат имеет вид

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left\{ \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij} \right\}. \tag{1.3}$$

Определяя таким образом желаемый результат, *лицо принимающее решение* (ЛПР) исходит из компромисса между оптимистическим и пессимистическим подходами.

Целесообразность применения той или иной оценочной функции определяется комплексом условий. Приведем некоторые другие примеры оценочных функций.

Оптимистическая позиция:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left\{ \max_j e_{ij} \right\}, \tag{1.4}$$

следуя которой ЛПР становится на точку зрения азартного игрока, делая ставку на то, что при любом его решении внешняя среда будет находиться в максимально благоприятном состоянии.

Позиция нейтралитета:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right\}, \tag{1.5}$$

в этом случае ЛПР исходит из того, что все встречающиеся отклонения результата решения от «среднего» случая допустимы, и выбирает решение, оптимальное с этой точки зрения.

Позиция пессимиста:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left\{ \min_j e_{ij} \right\}, \qquad (1.6)$$

ориентируется на то, что выпадет наименее благоприятный случай и приписывает каждому из альтернативных вариантов наихудший из возможных результатов. После этого ЛПР выбирает самый выгодный вариант, т. е. ожидает наилучшего результата при наихудшем состоянии внешней среды.

Позиция относительного пессимизма:

$$\max_i e_{ir} = \min_i \max_j \left\{ \max_i e_{ij} - e_{ij} \right\}, \qquad (1.7)$$

в этом случае для каждого варианта решения ЛПР оценивает потери по сравнению с определенным по каждому варианту наилучшим результатом, а затем из совокупности наихудших результатов выбирает наилучший согласно данной оценочной функции.

Влияние исходной позиции ЛПР на эффективность результатов можно интерпретировать, исходя из наглядных представлений. Простейшим здесь является графическое изображение на плоскости, соответствующее двум внешним состояниям при *m* вариантах решения.

Введем прямоугольную систему координат. По оси абсцисс отложим значения результатов решений e_{i1}, соответствующие внешнему состоянию F_1 , а по оси ординат – значения e_{i2}, соответствующие состоянию F_2.

Каждый вариант решения E_i, таким образом, соответствует точке (e_{i1}, e_{i2}), i = 1, 2,...,*m* на плоскости. Все *m* точек (e_{i1}, e_{i2}) лежат внутри прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям, а противоположные вершины – *утопическая точка* с координатами (max e_{i1}, max e_{i2}) и *антиутопическая точка* с координатами ($\min e_{i1}$, $\max e_{i2}$), i= 1, 2,..., m. Данный прямоугольник называется полем *полезности решений.*

Чтобы сравнить варианты решений с точки зрения их качества, назовем вариант E_i не худшим, чем вариант E_j, если для соответствующих точек *(*e_{i1}, e_{i2}*)* и (e_{j1}, e_{j2}) выполняются неравенства:

$$e_{i1} \geq e_{j1} \text{ и } e_{i2} \geq e_{j2},$$

причем решение E_i считается лучшим, если хотя бы одно из двух неравенств является строгим.

Очевидно, что при таком определении не все варианты решения допускают сравнение друг с другом, так как в общем случае существуют варианты решений E_i и E_j, такие что, например, $e_{i1} < e_{j1}$, но $e_{i2} > e_{j2}$. Это означает, что в поле полезности решений установлено отношение *частичного порядка*.

Выберем в поле полезности некоторую точку PT. С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем плоскость на четыре части и обозначим их I, II, III, IV. В случае произвольной размерности эти части будем называть *конусами*. Все точки конуса I, в смысле введенного выше порядка, являются лучшими, чем точка PT, и, соответственно, все точки конуса III являются заведомо худшими, чем точка PT. Поэтому конус I называется *конусом предпочтения*, а конус III – *антиконусом*. Оценка же точек конусов II и IV является неопределенной и поэтому эти конусы носят название *конусов неопределенности*. Для точек конусов неопределенности оценки получаются только с помощью выбранного критерия принятия решений (рисунок 1.1).

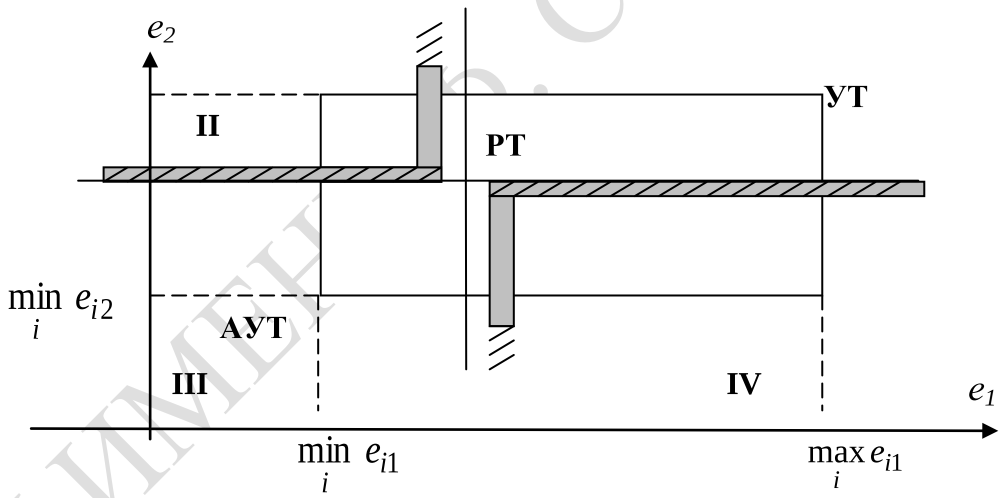

Рисунок 1.1 – Поле полезности решений

Тема 2

Классические критерии принятия решений в условиях неопределенности и риска

2.1 Минимаксный критерий (ММ-критерий)
2.2 Критерий Севиджа (S-критерий)
2.3 Критерий Байеса-Лапласа (BL-критерий)
2.4 Расширенный минимаксный критерий

2.1 Минимаксный критерий (ММ-критерий)

Этот критерий использует оценочную функцию, соответствующую позиции крайнего пессимизма:

$$Z_{MM} = \max_i e_{ir}\,, \tag{2.1}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij}\,,$$

то есть множество оптимальных решений E_0 определяется соотношением

$$E_0 = E_{io} \,|\, E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \min_j e_{ij} \quad . \tag{2.2}$$

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Однако, это достоинство стоит некоторых потерь. Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация характеризуется параметрами:

– о возможности появления состояний F_j ничего не известно;
– решение реализуется один или очень малое число раз;
– необходимо исключить какой бы то ни было риск.

2.2 Критерий Севиджа (S-критерий)

Оценочная функция критерия Севиджа имеет вид:

$$Z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \max_j \quad \max_i e_{ij} - e_{ij} \quad , \tag{2.3}$$

и множество оптимальных вариантов решения строится следующим образом:

$$E_0 = E_{io} \,|\, E_{io} \in E \wedge e_{io} = \min_i e_{ir} \quad . \tag{2.4}$$

Для понимания величины $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ ее нужно трактовать как дополнительный выигрыш, если вместо варианта E_i в состоянии F_j выбрать другой, оптимальный для этого состояния результат.

Условия для применения критерия Севиджа также же как и для ММ-критерия.

2.3 Критерий Байеса-Лапласа (BL-критерий)

Пусть q_j – вероятность появления внешнего состояния F_j, тогда для критерия Байеса-Лапласа оценочная функция примет вид:

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir},$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, \tag{2.5}$$

то есть

$$E_0 = E_{io} \middle| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 .$$

Применение критерия рекомендуется, если ситуация характеризуется следующим образом:

– вероятности появления состояний F_j известны и не зависят от времени;

– решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;

– для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

2.4. Расширенный минимаксный критерий

При использовании данного критерия используются некоторые понятия теории вероятностей и теории игр.

Основным здесь является предложение о том, что каждому из *n* возможных внешних состояний F_j соответствует вероятность его появления

$$q_j : 0 \le q_j \le 1; \;\; q_1 + q_2 + ... + q_n = 1.$$

Сформируем из *n* вероятностей q_j вектор $q = (q_1, q_2, ... q_n)$ и обозначим через W^n множество всех *n*-мерных вероятностных векторов. Выбор какого-либо варианта решения E_i приводит, при достаточно частом применении E_i, к среднему результату $\sum_{j=1}^{n} q_j e_{ij}$.

Если же теперь случайным образом с распределением вероятностей $p = (p_1, p_2, ..., p_m) \in W^m$ смешивать m вариантов решений E_i, то в результате получим среднее значение

$$e(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j p_i .$$

В реальной ситуации вектор $q = (q_1, q_2, ... q_n)$, относящийся к внешним состояниям F_j, бывает, как правило, неизвестен. Ориентируясь применительно к значению $e(p,q)$ наименее выгодное распределение q состояний F_j и добиваясь, с другой стороны, максимального увеличения $e(p,q)$ за счет выбора наиболее удачного распределения р вариантов решения E_i получают в результате значение, соответствующее расширенному ММ-критерию:

$$E(p_0) = E(p_0) \Big| \; E(p_0) \in E \wedge e(p_0, q_0) = \max_{p} \min_{q} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j p_i \quad .$$

Таким образом, расширенный ММ-критерий может быть применен в целях нахождения наивыгоднейшего распределения вероятностей на множестве решений, когда в многократно воспроизводящейся ситуации ничего не известно о вероятностях состояний F_j .

Поэтому предполагается, что распределение вероятностей является наименее выгодным для ЛПР.

Тема 3
Производные критерии принятия решений в условиях неопределенности и риска

Лекция 1

3.1 Критерий Ходжа-Лемана (HL-критерий)

Этот критерий опирается на BL-критерий и MM-критерий. С помощью параметра v выражается степень доверия к использованному распределению вероятностей. Если это доверие велико, то акцентируется BL-критерий, в противном случав доверие отдается MM-критерию.

Оценочная функция определяется равенством

$$Z_{HL} = \max_i e_{ir}, \tag{3.1}$$

$$e_{ir} = v\sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-v)\min_j e_{ij}, \quad 0 \le v \le 1,$$

то есть

$$E_0 = \left\{ E_{io} \middle| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \left[v\sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-v)\min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le v \le 1 \right\}.$$

Критерий Ходжа-Лемана предъявляет к ситуации принятия следующие требования:

– вероятности появления состояний F_j неизвестны, но некоторые предположения о распределении вероятностей возможны;

– принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;

– при малых числах реализаций допускается некоторый риск.

3.2 Критерий Гурвица(HW-критерий)

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, ЛПР также может воспользоваться критерием Гурвица, оценочная функция которого находится как средневзвешенное между точками зрения предельного оптимиста и крайнего пессимиста:

$$Z_{HW} = \max_i e_{ir}\ , \qquad (3.2)$$

$$e_{ir} = c\min_j e_{ij} + (1-c)\max_j e_{ij}\ , \quad 0 \le c \le 1,$$

то есть

$$E_0 = \left\{ E_{io} \middle| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \left\{ c\min_j e_{ij} + (1-c)\max_j e_{ij} \right\} \wedge 0 \le c \le 1 \right\}$$

Чаще всего весовой множитель берется $C = 0{,}5$. Критерий предъявляет к ситуации принятия решений следующие требования:

– о вероятности появления состояний ничего не известно;

– решение реализуется лишь малое количество раз;

– допускается некоторый риск.

3.3 Критерий Гермейера (G-критерий)

Критерий Гермейера ориентирован на величины потерь, то есть при его применении предполагается, что e_{ij} – отрицательные. В качестве оценочной функции G-критерия выступает

$$Z_G = \max_i e_{ir}.$$

G-критерий имеет следующее решение:

$$E_0 = \left\{ E_{io} \middle| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge e_{ij} \le 0 \right\}.$$

Поскольку, например, при решении целого ряда производственных и экономических задач преимущественно имеют дело с ценами и затратами, то условие отрицательности оценок e_{ij} обычно выполняется. Если среди e_{ij} имеются положительные величины, то путем преобразования $e_{ij} - a$ при подходящем выборе $a > 0$ матрица решений преобразуется к отрицательному виду, однако следует учитывать, что оптимальное решение может зависеть от величины a.

G-критерий некоторым образом обобщает ММ-критерий, а в случае равномерного распределения q_j ($q_j = 1/n$, j = 1,2,...,n) они становятся идентичными.

Условия применимости G-критерия таковы:

– вероятности появления состояний F_j известны;

– допускается некоторый риск;

– решение может реализовываться как малое, так и большое число раз.

Если функция распределения известна не очень надежно, а числа реализаций малы, то при использовании G-критерия, вообще говоря, имеется неоправданно большой риск.

Лекция 2

3.4 Составной BL(MM)-критерий
3.5 Критерий произведений (P-критерий)
3.6 Пример применения классических и производных критериев в задаче принятия решений в условиях неопределенности

3.4 Составной BL(MM)-критерий

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, чем все до сих пор рассмотренные, привело к построению так называемых, составных критериев. Исходным для построения данного был BL-критерий. Вследствие того, что распределение $q = (q_1,...,q_n)$ устанавливается эмпирически и потому известно не точно, происходит, с одной стороны, ослабление критерия, а с помощью заданных границ для риска и посредством MM-критерия обеспечивается соответствующая свобода действий.

Зафиксируем прежде всего задаваемое MM-критерием опорное значение

$$Z_{MM} = \max_i \min_j e_{ir} = e_{i_o j_o},$$

где $i_{o,}\, j_o$ – оптимизирующие индексы для рассматриваемых вариантов решений и, соответственно, состояний.

Посредством некоторого заданного или выбираемого уровня допустимого риска определим некоторое множество согласия, являющееся подмножеством множества индексов $i,..., m$:

$$I_1 = \quad i \big| i \in (i,...,m) \wedge (e_{i_o j_o} - \min_j e_{ij}) \le \varepsilon_{gon} \quad . \qquad (3.3)$$

Величина $\varepsilon_i = e_{i_o j_o} - \min_j e_{ij}$

для всех $i \in \mathrm{I}_1$ характеризует наибольшие возможные потери в сравнении со значением, задаваемым MM-критерием. С другой стороны, в результате такого снижения открываются возможности для увеличения выигрыша по сравнению с тем, который обеспечивается MM-критерием. Поэтому мы рассматриваем также некоторое выигрышное подмножество:

$$I_2 = \quad i \big| i \in (i,...,m) \wedge (e_{i_o j_o} - \min_j e_{ij}) = \varepsilon_i \le \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_o j} \quad .$$

Тогда в множество-пересечение $I_1 \cap I_2$ соберутся только такие варианты решений, для которых, с одной стороны, в определенных состояниях могут иметь место потери по сравнению с состоянием, задаваемым MM-критерием, но зато в других состояниях имеется, по меньшей мере, такой же прирост выигрыша. Теперь оптимальными в смысле составного BL(MM)-критерия будут решения из множества

$$E_0 = E_{io} \big| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \quad .$$

Применение BL(MM)-критерия бывает целесообразным, если:

– вероятности появления состояний F_j неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения;

– необходимо считаться с появлениями различных состояний как по отдельности, так и в комплексе;

– допускается ограниченный риск;

– принятое решение реализуется один раз или многократно.

BL(MM)-критерий хорошо приспособлен для построения практических решений, прежде всего, в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако, задание границы риска и, соответственно, оценок риска не учитывает ни число применений решения, ни иную подобную информацию. Условие

$$\varepsilon_i = \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_o j}$$

существенно в тех случаях, когда решение реализуется один или малое число раз.

3.5 Критерий произведений (P-критерий)

Критерий произведений ориентирован на величины выигрышей, то есть на положительные e_{ij}. Оценочная функция P-критерия определяется следующим образом:

$$Z_p = \max e_{ir},$$

$$e_{ir} = \mathop{\Pi}_j e_{ij},$$

то есть оптимальными в смысле P-критерия будут решения вида:

$$E_0 = E_{io} \big| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \mathop{\Pi}_j e_{ij} \wedge e_{ij} > 0 \quad .$$

Следует отметить, что выбор оптимального решения по P-критерию оказывается менее пессимистичным, чем выбор в соответствии с MM-критерием. Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами:

– вероятности появления состояний F_j неизвестны;

– критерий может быть применен при любом числе реализаций;

– допустим некоторый риск.

3.6 Пример применения классических и производных критериев в задаче принятия решений в условиях неопределенности

Пусть некоторую технологическую установку требуется подвергнуть проверке с приостановкой ее эксплуатации. Из-за этого на некоторое время будет, естественно, приостановлен и выпуск продукции. Если же существующая неисправность не будет вовремя обнаружена, то это приведет к еще большим потерям, поскольку технологическая установка выйдет из строя.

У руководства предприятия есть возможность выбора одного из следующих альтернативных вариантов решения:

E_1 – осуществить полную проверку оборудования с привлечением специалистов-ремонтников со стороны;

E_2 – провести проверку и возможный ремонт своими силами;

E_3 – вообще отказаться от какой-либо проверки и не приостанавливать выпуск продукции.

После длительного срока эксплуатации установка может находиться в одном на следующих состояний:

F_1 – неисправностей нет и установка может продолжать работать без какого-либо ремонта;

F_2 – требуется незначительный ремонт отдельных деталей;

F_3 – дальнейшая эксплуатация установки возможна лишь после капитального ремонта.

Накопленный на предприятии опыт позволил составить следующую матрицу решений, элементы которой отрицательны, поскольку включают в себя затраты на проверку и устранение неисправностей, а также затраты, связанные с потерями в выпускаемой продукции и с поломкой установки (таблица 3.1):

Таблица 3.1 – Матрица решений

	F_1	F_2	F_3
E_1	-20,0	-22,0	-25,0
E_2	-14,0	-23,0	-31,0
E_3	0	-24,0	-40,0

Применяя ММ-критерий, получаем, что следует проводить полную проверку: $E_0 = E_1$. Этого и следовало ожидать, так как данный критерий соответствует позиции крайнего пессимиста и исключает какой-либо риск, который в данной ситуации при отсутствии информации о вероятностях возможных состояний установки сопряжен, например, с ее поломкой в случае отказа от проверки и продолжения ее эксплуатации при имеющихся серьезных неисправностях.

Если предположить, что все возможные состояния установки равновероятны (q_i = 1/3), то при применении BL-критерия будет рекомендовано решение E_3 – отказ от проверки. Если применить S-критерий, то в качестве оптимального будет рекомендовано принять решение E_2 – провести проверку оборудования без привлечения специалистов со стороны.

Итак, воспользовавшись теоретическими рекомендациями, мы мало что выиграли, поскольку ситуация осталась неопределенной – каждый из критериев рекомендует свой вариант решения. Но следует помнить о том, что различные критерии связаны с различными аспектами ситуации, в которой решение принимается. Поэтому прежде, чем воспользоваться тем или иным критерием, необходимо тщательно проанализировать ситуацию принятия решения и только потом выбрать подходящий критерий. Если принимаемое решение относится к сотням работающих установок с одинаковыми параметрами и если информация о вероятностях состояний F_i достаточно точна, то целесообразно воспользоваться BL-критерием. Если число реализаций решения на практике невелико, то больший вес приобретают более осторожные рекомендации S- или MM-критериев.

Если рассмотреть ситуацию, когда состояние F_3 – серьезная неисправность установки, наиболее вероятно, например, $q_1 = q_2 = 1/4$, $q_3 = 1/2$, то тогда и BL-критерий и MM-критерий рекомендуют провести полную проверку установки.

Применяя производные критерии для принятия решения по данной проблеме, получим следующие результаты:

Критерий Гурвица. При $c = 0{,}5$ рекомендуется отказаться от проверки (E_3). При $c > 0{,}57$ в качестве рекомендуемого будет выступать уже решение E_1 .

Критерий Ходжа- Лемана. При $v = 0{,}5$ и $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$ по HL-критерию рекомендуется воспользоваться решением E^ – выполнить полную проверку установки. Лишь при $v > 0{,}94$ рекомендуются менее осторожные варианты решений – E_2 или E_3.

Критерий Гермейера. Также рекомендует в случае равномерного распределения состояний установки придерживаться более осторожного варианта решения E_1 .

Составной BL(MM)-критерий. Данный критерий является одним из наиболее гибких и довольно часто может применяться на практике при решении конкретных технических задач. BL(MM)-критерий при $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$, в большинстве случаев, при незначительном уровне допустимого риска также указывает на осторожный вариант E_1, как на оптимальный. Вариант E_3 (отказ от проверки) принимается этим критерием лишь при $\varepsilon_{доп} > 15$, однако во многих технических и хозяйственных задачах уровень допустимого риска бывает намного ниже, составляя лишь незначительный процент от возможных затрат.

Тема 4
Методы принятия решений в задачах векторной оптимизации

4.1 Традиционные методы принятия решений в многокритериальных задачах

4.2 Многошаговые человеко-машинные процедуры решения задач многокритериальной оптимизации

4.1 Традиционные методы принятия решений в многокритериальных задачах

При решении большинства задач проектирования, планирования и управления техническими, биологическими и экономическими системами возникает необходимость оптимизации этих систем по совокупности противоречивых критериев эффективности их функционирования.

Такая оптимизация получила название векторной или многокритериальной. Ее отличительной особенностью является наличие не одного оптимального решения, как в задачах с одним критерием эффективности, а целого множества недоминируемых решений (множества Парето), каждое из которых может быть выбрано в качестве оптимального. Центральная проблема задач векторной оптимизации – выбор одного «оптимального в некотором смысле» решения. Объективный выбор одного решения из множества недоминируемых (компромиссных) решений невозможен без участия ЛПР, без получения от него информации о его предпочтениях.

В общем виде задачи векторной оптимизации могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{gathered} f_i(x) \to \max, i = 1,2,..k,, \\ f_i(x) \to \min, i = k+1, k+2,..n, \\ x \in G \subset R^m. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Понятие оптимального решения заменяется для таких задач понятием *эффективного решения.* Решение x_0 представляет собой *эффективное решение* многокритериальной задачи, если не существует решения, не уступающего ему по всем критериям и превосходящего его хотя бы по одному из них.

Рассмотрим некоторые часто применяемые на практике методы многокритериальной оптимизации.

Метод выделения главного критерия. Определяется главный критерий (предположим $f_1(x)$) и задача (4.1) преобразуется в следующую:

$$
\begin{gathered}
f_i(x) \to \max, \\
f_i(x) \ge f_i^*, i = \overline{2,k}, \\
f_i(x) \ge f_i^*, i = \overline{k+1,n}, \\
x \in G \subset R^m.
\end{gathered}
$$

Метод последовательных уступок. Критерии эффективности располагаются в порядке уменьшения степени важности: $f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{in}$. Допустим, что соответствующая нумерация была осуществлена в самом начале при постановке задачи (4.1) и, кроме того, допустим, что для всех i: $f_i(x) \to \max$. Алгоритм получения решения сводится к следующему. Вначале находится решение, обращающее в максимум главный критерий f_1.

Затем из практических соображений назначается некоторая «уступка» Δf_1. Требуя выполнения неравенства

$$f_1 \ge f_1^* - \Delta f_1, \quad \text{где} \quad f_1^* = \max f_1$$

находим такое решение x, при котором $f_2(x) \to \max$. Далее снова назначается «уступка» по критерию f_2, с помощью которой можно максимизировать f_3 и т.д.

Метод «составного» критерия. ЛПР определяет важность каждого критерия f_i, которая выражается весом критерия γ_i. Затем формулируется составной критерий:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i(x) \to \max, \tag{4.2}$$

где γ_i – вес i-го критерия, $\gamma_i > 0$ если $f_i(x) \to \max$, $\gamma_i < 0$, если $f_i(x) \to \min$.

Несмотря на удобную форму записи, «составные» критерии имеют существенные недостатки, связанные с произволом в выборе весов γ_i, а также с тем фактом, что недостатки эффективности по одним критериям могут компенсировать за счет преимуществ по другим критериям.

Нормативные методы векторной оптимизации. Нормативные методы являются своего рода обобщением рассмотренных выше методов и состоят в предварительном получении нормативов ξ_{fi}, $i = 1, 2, ..., n$ на основе приближенного решения многоцелевой задачи и приближения к этим нормативам по некоторой заданной метрике $\rho(f(x), \xi_f) \to \min$, где $\rho(f(x), \xi_f)$ может быть определено различными способами, например:

$$\rho_1^2(f(x), \xi_f) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x) - \xi_{fi} \right]^2;$$

$$\rho_2\left(f(x),\xi_f\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|f_i(x)-\xi_{fi}\right|;$$

$$\rho_3\left(f(x),\xi_f\right)=\max_i\left|f_i(x)-\xi_{fi}\right|.$$

Методы логического объединения критериев. Предположим, что критерии $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ могут принимать только два значения: 0 или 1:

$$f_1(x)=\begin{cases}1, \text{если i - ая цель достигнута,}\\ 0, \text{если i - ая цель не достигнута.}\end{cases}$$

Тогда обобщенный критерий может быть записан:

– в виде коньюнкции критериев $f_i(x)$, если общая цель состоит в выполнении всех целей одновременно, т. е.

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}f_i(x);$$

– в виде дизъюнкции критериев, когда общая цель достигается, если достигнута хотя бы одна частная цель, т.е.

$$F(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-f_i(x))$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение метода уступок для решения многокритериальных задач.

Пример. Найти компромиссное решение задачи при условии, что отклонение по первому критерию от максимального значения составляет 50%:

$$f_1=3x_1+2x_3\quad(\max);$$

$$f_2=x_1+2x_2+x_3\quad(\min);$$

$$\begin{cases}-2x_1-x_2+5x_3\le 6\\ x_1\qquad-2x_3\le 2\\ \qquad 2x_2-\ x_3\le 5\\ x_j\ge 0\qquad j=\overline{1,3}\end{cases}$$

Поскольку данная задача является задачей линейного программирования, то на каждом шаге для решения соответствующих однокритериальных задач можно воспользоваться симплекс-методом. Решим однокритериальную задачу по первому критерию. Составляем симплекс-таблицу:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4=$	6	-2	-1	5
$x_5=$	2	$\boxed{1}$	0	-2
$x_6=$	5	0	2	-1
$f_1=$	0	-3	0	-2

Так как данный план не удовлетворяет условию оптимальности, то, находя разрешающий элемент и применяя преобразование Гаусса-Жордана, строим следующую последовательность симплекс-таблиц:

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	10	2	-1	$\boxed{1}$
$x_1 =$	2	1	0	-2
$x_6 =$	5	0	2	-1
$f_1 =$	6	3	0	-8

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_4$
$x_3 =$	10	2	-1	1
$x_1 =$	22	5	-2	2
$x_6 =$	15	2	$\boxed{1}$	1
$f_1 =$	86	19	-8	8

	1	$-x_5$	$-x_6$	
$x_3 =$	25			
$x_1 =$	52			
$x_2 =$	15			
$f_1 =$	206	35	8	16

Максимальное значение целевой функции f_1 достигается, таким образом, для плана

$$\overline{x^*} = x_1^*; x_2^*; x_3^* = 52;15;25 \;;\; f_1=206.$$

Делая уступку на 50%, получаем:

$$f_1 = 0{,}5 \cdot 206 = 103$$

и вводим дополнительное ограничение:

$$3x_1 + 2x_3 \geq 103.$$

Решаем теперь однокритериальную задачу для второй целевой функции с учетом дополнительного ограничения. Получаем следующую последовательность симплекс - таблиц:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	6	-2	-1	5
$x_5 =$	2	$\boxed{1}$	0	-2
$x_6 =$	5	0	2	-1
$x_7 =$	-103	-3	0	-2
$f_2 =$	0	-1	-2	-1

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	10	2	-1	$\boxed{1}$
$x_1 =$	2	1	0	-2
$x_6 =$	5	0	2	-1
$x_7 =$	-97	3	0	-8
$f_2 =$	2	1	-2	-3

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_4$
$x_3 =$	10	2	-1	1
$x_1 =$	22	5	-2	2
$x_6 =$	15	2	1	1
$x_7 =$	-17	19	$\boxed{-8}$	8
$f_2 =$	32	7	-5	3

	1	$-x_5$	$-x_7$	$-x_4$
$x_3 =$	97/8			
$x_1 =$	105/4			
$x_6 =$	137/8			
$x_2 =$	17/8			
$f_2 =$	341/8	-39/8	-5/8	-2

Таким образом, при заданных условиях задачи эффективным является следующий план:

$$\overline{x^*} = \; x_1^*; x_2^*; x_3^* \; = \; 105/4; 17/8; 97/8 \; ,$$

для которого $f_1 = 103$; $f_2 = 341/8$.

4.2 Многошаговые человеко-машинные процедуры решения задач многокритериальной оптимизации

4.2.1 Метод Степанова

Процесс решения задач оптимизации предполагает диалог с ЛПР для получения дополнительной информации о его предпочтениях уже в ходе решения проблемы. Поэтому программные комплексы, реализующие процесс принятия решений в многокритериальных задачах на основе вычислительных алгоритмов и диалога с ЛПР, называются *человеко-машинными процедурами (ЧМП).*

Постановка задачи. Необходимо решить задачу векторной оптимизации:

$$f_i \; x \; \to \max, \; i = 1, 2, ..., n \qquad (4.3)$$
$$x \in G \subset R^m,$$

где $f_i \; x$ – оптимизируемые критерии эффективности;

x – варьируемые параметры;

G – множество допустимых значений параметров.

Для простоты изложения предполагаем, что все критерии необходимо максимизировать.

Алгоритм реализации ЧМП Степанова. Данный алгоритм реализуется в несколько этапов, каждый из которых разбивается на шаги.

Этап 1.

Шаг 1.1. Находится оптимальное значение каждого критерия в отдельности при наличии указанных в задаче ограничений. В результате получаем совокупность решений $f_i^*(x_i^*)$, $i = 1, 2, ..., n.$ Через x_i^* обозначен вектор значений параметров, соответствующий оптимальному значению критерия f_i.

Шаг 1.2. В точках x_i^* вычисляются значения всех остальных критериев $f_k^*(x_i^*)$, $k = 1, 2, ..., n, \quad k \neq i.$

Шаг 1.3. Из полученных значений формируем матрицу ϕ размерности $n \times n$:

$$\phi = \begin{Vmatrix} f_1^*(x_1^*) & f_2^*(x_1^*) & \dots & f_n^*(x_1^*) \\ f_1^*(x_2^*) & f_2^*(x_2^*) & \dots & f_n^*(x_2^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^*(x_n^*) & f_2^*(x_n^*) & \dots & f_n^*(x_n^*) \end{Vmatrix} \qquad (4.4)$$

Очевидно, что диагональные элементы матрицы ϕ представляют собой оптимальные значения критериев.

Шаг 1.4. Матрица ϕ разбивается на n векторов-столбцов :

$$V_i = \begin{pmatrix} f_i(x_1^*) \\ .... \\ f^*_i(x_i^*) \\ .... \\ f_i(x_n^*) \end{pmatrix}.$$

Шаг 1.5. Для каждого вектора V_i находится минимальный элемент $\min f_i(x_k^*)$, $k = 1, 2, ..., n.$ Матрица ϕ характеризует границы множества компромиссных точек, а значит, в пределах этого множества значения критериев лежат в области, ограниченной значениями:

$$f_i(x) = [\min_k f_i(x_k^*), f_i^*(x_i^*)], \qquad i = \overline{1, n} \qquad (4.5)$$

Учитывая, что при решении любой задачи векторной оптимизации оптимальное решение обязательно должно принадлежать множеству компромиссных точек, целесообразно ограничить пространство поиска оптимального решения границами (4.5).

Этап 2.

Шаг 2.1. ЛПР представляется информация : матрица ϕ и границы множества компромиссных точек (4.5). ЛПР анализирует полученную информацию и выбирает один из критериев (наиболее значимый), например f_1, для которого назначает требуемое значение

$$f_1(x) = f_1^{TP} \in [\min_k f_i(x_k^*), f_i^*(x_i^*)].$$

Все критерии желательно еще при постановке задачи расположить в порядке убывания их важности.

Шаг 2.2. Определив требуемое значение первого критерия

$$f_1(x) = f_1^{TP},$$

осуществляется переход к шагу 1.1.

Выполнение указанного цикла осуществляется n раз. В конце каждого цикла ЛПР определяет требуемое значение очередного по важности критерия. В результате число критериев, для которых ищутся оптимальные значения, в каждом цикле уменьшается на единицу, а число ограничений увеличивается на единицу (добавляется ограничение типа равенства $f_i(x) = f_i^{TP}$). Полученные в каждом цикле оптимальные значения критериев будут принадлежать границам множества допустимых значений критериев в пространстве критериев. Очевидно, что в случае, если все критерии $f_i(x)$ вогнуты, а допустимое множество выпукло, то тогда множество компромиссных точек непрерывно и оптимальные значения критериев в каждом цикле будут принадлежать множеству компромиссных точек.

Шаг 2.3. В n-ом цикле выполняется только шаг 1.1., в котором решается следующая задача:

$$\begin{aligned} &f_n(x) \to \max, \\ &f_i(x) \ge f_i^{TP}, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \\ &x \in G \subset R^m, \quad x \ge 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

В этом цикле, в отличие от предыдущих n–1 циклов, критериальные ограничения изменены: равенства заменены неравенствами. Данное изменение вызвано следующей необходимостью.

Решение задачи (4.6) с критериальными ограничениями типа равенств дает точку с координатами $(f_1^{TP}, f_2^{TP}, ..., f_{n-1}^{TP}, f_n)$. При этом значение f_n не будет требуемым, так как ЛПР его не задает. Обозначим полученную точку $F_1^{TP}(x_1^{TP})$. Если данная точка компромиссна, то она считается требуемым ЛПР решением задачи векторной оптимизации. Однако точка $F_1^{TP}(x_1^{TP})$ будет компромиссной только при выполнении условий выпуклости критериев и вогнутости множества параметров. Если эти условия не выполняются, то $F_1^{TP}\ \ x_1^{TP}$ может не быть компромиссной точкой, так как в этом случае множество компромиссных точек может быть разрывным. Учитывая, что при решении на практике задачи векторной оптимизации не всегда до ее решения осуществляется проверка свойств критериев и допустимого множества, необходимо после получения точки $F_1^{TP}\ \ x_1^{TP}$ проверить ее принадлежность множеству компромиссных точек. Чтобы избежать дополнительных вычислительных затрат и совмещается процесс решения задачи (4.6), с проверкой на компромиссность путем задания в задаче критериальных ограничений в виде неравенств. Решение задачи (4.6) в таком виде дает компромиссную точку $F_1^{*}\ \ x_1^{*}$.

Этап 3.

Шаг 3.1. Если точки $F_1^{TP}\ \ x_1^{TP}$ и $F_1^{*}\ \ x_1^{*}$ не совпадают, то есть $f_i\ \ x_1^{TP}\ \ \neq f_i\ \ x_1^{*}$ хотя бы для одного из первых n–1 критериев, то точка, являющаяся решением задачи (4.6), т. е. $F_1^{TP}\ \ x_1^{TP}$ не является компромиссной. Следовательно, существует как минимум одна точка x_1^{*}, для которой выполняются неравенства

$$f_i\ \ x_1^{*}\ \ \geq f_i\ \ x_1^{TP}\ \ ,\quad i=\overline{1,n-1}\ .$$

И хотя бы одно из них строгое. Это означает, что возможно получение решения исходной задачи (4.3), которое не уступает решению $F_1^{TP}\ \ x_1^{TP}$ ни по одному из критериев, а по некоторым из них превосходит его. Получив доказательство некомпромиссности $F_1^{TP}\ \ x_1^{TP}$ и, следовательно, разрывности множества компромиссных точек, необходимо продолжить поиск требуемого ЛПР решения.

Шаг 3.2. Осуществляется переход к шагу 1.1. Таким образом, процесс поиска требуемого ЛПР решения повторяется, однако в постановку задачи добавляются критериальные ограничения типа неравенств

$$f_i\ \ x\ \ \geq f_i\ \ x_1^{TP}\ \ ,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Заметим, что при нахождении границ множества компромиссных точек, удовлетворяющих данным ограничениям, будет решаться на одну экстремальную задачу меньше, так как максимум n-го критерия уже найден при нахождении точки $F_1^{*}\ \ x_1^{*}$.

Поиск решения задачи векторной оптимизации заканчивается в случае, когда очередная полученная точка $F_m^{TP}\ \ x_m^{TP}$, где m – номер итерации, будет компромиссной.

Данная ЧМП позволяет решать задачи векторной оптимизации, как в линейном, так и в нелинейном случаях.

В линейном случае на каждом шаге для решения однокритериальной подзадачи могут быть применены, допустим, различные модификации симплекс метода.

Для решения нелинейной однокритериальной подзадачи возможно использование как традиционных широко известных методов, так и новых оригинальных методов, например, методов зондирования множества допустимых решений конечным, достаточно большим числом пробных точек, равномерно покрывающих множество *G*. Рассмотрим один из таких методов, предназначенный для решения многокритериальных задач.

4.2.2 Применение метода $ЛП_\tau$-последовательностей в задачах многокритериального выбора

4.2.2.1 Поиск в многомерном кубе

Рассмотрим единичный *n*-мерный куб K^n, состоящий из точек *P* с декартовыми координатами $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$P = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

удовлетворяющими неравенствам $0 \le x_j \le 1$ при $j = 1, 2, ..., n$.

Кубические решетки. Обычно полагают, что наиболее равномерное зондирование такого куба обеспечивает кубическая решетка состоящая из $N^n = M$ точек с координатами

$$\left(\frac{i_1 + \frac{1}{2}}{M}, \frac{i_2 + \frac{1}{2}}{M}, ..., \frac{i_n + \frac{1}{2}}{M} \right),$$

где $t_1, ..., t_n$ независимо принимают все значения 0,1,…,*M*–1.

Однако это неверно. Такая решетка оптимальна только в одномерном случае при *n* = 1. Уже при *n* = 2 она не очень хороша, а с увеличением *n* «равномерность» ее быстро ухудшается.

Сравним двумерные сетки, изображенные на рисунке 4.1. В обоих случаях каждому из 16 элементарных объемов принадлежит одна и только одна точка сетки, так что, казалось бы, равномерность расположения точек обеих сеток примерно одинакова.

Ситуация, однако, изменится, если потребуется исследовать функцию $f(x_1, x_2)$, определенную в K^2, которая сильно зависит лишь от одного аргумента: например, $f = f(x_1)$. В этом случае, вычислив значения функции *f* в точках кубической решетки, мы получим лишь четыре различных значения, каждое повторенное четыре раза, а при расчете $f(x)$ в точках улучшенной сетки получим 16 значений, дающих гораздо лучшее представление о диапазоне изменения функции $f(x)$.

В многомерном случае кубическая решетка оказывается еще хуже, так как «потеря информации» при вычислении $f(x_1,...,x_n)$ может еще больше возрасти: вычислив $N^n = M$ значений функции $f(x)$, мы получим всего $M = N^{1/n}$ различных значений.

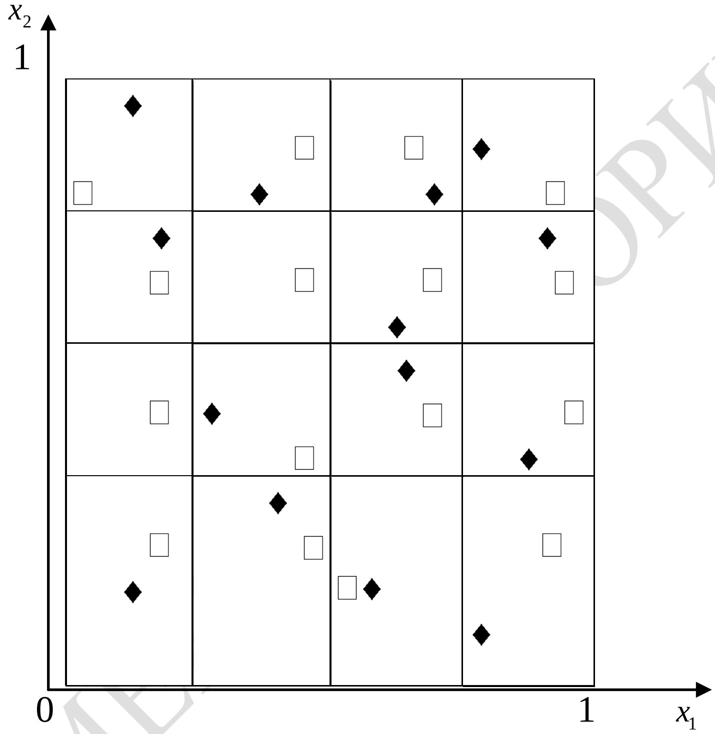

Рисунок 4.1 – Кубическая решетка (□) и улучшенная сетка (♦) при $n = 2$ $N = 16$

Равномерно распределенные последовательности точек. Пусть $P_1,\ldots, P_i,\ldots$ – последовательность точек, принадлежащих K^n. Выберем в K^n произвольный *n*-мерный параллелепипед *П* со сторонами, параллельными координатным граням. Обозначив через S_N(*П*) количество точек P_i с номерами $1 \le i \le N$, принадлежащих *П*.

Определение. *Последовательность точек $P_1,\ldots, P_i,\ldots$ называется равномерно распределенной (р.р.) в K^n, если для любого П*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N \quad П}{N} = V_П, \tag{4.7}$$

где $V_П$ – объем (n-мерный) параллелепипеда П.

Можно доказать, что если G – произвольная область, расположенная в K^n и имеющая объем V_G, то из (*4.7*) вытекает

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N(G)}{N}=V_G\,. \tag{4.8}$$

Соотношение (4.8) показывает, что при достаточно больших N количество точек последовательности, принадлежащих G, пропорционально объему G:

$$S_N(G)\sim NV_G \tag{4.9}$$

Легко также доказать, что проекция точек *р.р.*-последовательности на любую m-мерную грань куба K^n при $m < n$ образуют *р.р.*-последовательность в K^m.

Несмотря на то, что определение и первые примеры р.р. последовательностей были указаны Г. Вейлем еще в 1916 году, использование таких последовательностей в вычислительной математике началось только в 60-х годах, когда удалось построить последовательности, для которых скорость сходимости в (4.7) при $N \to \infty$ близка к наилучшей, а равномерность расположения наблюдается начиная с небольших N. (Заметим, что определение (*4*.7) зависит только от асимптотических свойств последовательности: если изменить, выбросить, добавить любое конечное число любых точек последовательности, то предел (4.7) не изменится).

Использование в качестве сеток начальных участков $P_1, \ldots, P_N$ *р.р.*-последовательности имеет еще одно достоинство: количество точек сетки может быть удвоено добавлением еще N точек $P_{N+1}, \ldots, P_{2N}$.

При использовании кубических решеток удвоение M вынуждает увеличить количество точек сразу в 2^n раз, а замена M на M+1 заставляет все точки новой сетки считать заново.

Простейший поиск. Предположим, что функция $F(P)$ кусочно непрерывна в K^n и требуется приближенно найти точку P такую, что

$$F(P)=\min_{P\in K^n}F(P)\,.$$

Приближенных методов отыскания минимума функции очень много, но в большинстве своем это все локальные методы, сходимость которых гарантируется лишь в достаточно малой окрестности минимума. Если же речь идет о нахождении глобального минимума, то выбор методов поиска гораздо больше ограничен.

Рассмотрим простейший случайный поиск, который состоит в следующем. В K^n выбираем N независимых случайных точек $Г_1$, ….., $Г_N$, равномерно распределенных в K^n (здесь равномерное распределение понимается в теоретико-вероятностном смысле). Среди значений $F(\Gamma_1)$, …., $F(\Gamma_N)$ находим наименьшее (если таких несколько, то выбираем любое из них).

$$F(\Gamma_{i0}) = \min_{1 \le i \le N} F(\Gamma_i).$$

И считаем, что

$$F(\Gamma_{i0}) \approx \min F(P), \quad \Gamma_{i0} \approx P.$$

Сходимость такого поиска доказывается достаточно просто. Пусть H – произвольная окрестность единственной точки P, и объем V_H положителен. Так как вероятность $P\{\Gamma \in H\} = V_H$, то вероятность того, что хотя бы одна из точек Γ_1, ….., Γ_N попадет в H равна 1-(1- $V_H)^N$ и при $N \to \infty$ стремится к 1. Следовательно, при достаточно больших N вероятность попадания хотя бы одной пробной точки в любую окрестность точки минимума P как угодно близка к 1.

Легко показать, что в качестве пробных точек в простейшем поиске можно использовать точки $P_1, ..., P_i, ...,$ образующие *р.р*- последовательность. В самом деле, так как согласно (4.9)

$$S_N(H) \sim NV_H$$

то при $N \to \infty$ количество пробных точек, попавших в H, окажется как угодно большим.

Поиск будет тем лучше, чем более равномерно расположены в K^n пробные точки (если, конечно, нет никакой предварительной информации о положении минимума). Случайны ли они, или нет – не столь важно.

$ЛП_\tau$-поиск. И. М. Соболь и Р. Б. Статников [16] предложили использовать в качестве пробных точки $ЛП_\tau$-последовательностей, которые являются наиболее равномерно распределенными среди всех известных в настоящее время последовательностей. Многочисленные эксперименты, проведенные с целью сравнения $ЛП_\tau$-поиска с простейшим случайным поиском, показали преимущество $ЛП_\tau$-поиска, хотя количественные характеристики «выигрыша» от его применения меняются в зависимости от рассматриваемых задач.

Наиболее перспективным оказалось применение $ЛП_\tau$-поиска при решении задач следующих двух классов. Во-первых, это задачи, в которых одновременно требуется оценить максимумы и (или) минимумы нескольких функций, заданные в K^n, так как это можно сделать по одним и тем же пробным точкам. Во-вторых, это задачи, в которых для отыскания глобального экстремума многоэкстремальной функции используются локальные методы оптимизации: для того, чтобы не попасть вместо глобального в какой-нибудь из локальных экстремумов, приходится повторять локальный поиск много раз, начиная из различных начальных точек; очевидно, что начальные точки должны быть равномерно расположены в K^n. Самым эффективным способом выбора начальных точек для подобных задач оказалось использование точек $ЛП_\tau$-последовательности.

4.2.2.2 Поиск в произвольной ограниченной области

Обозначим через G произвольную n-мерную ограниченную область, имеющую конечный объем $V_G > 0$.

***Определение**. Последовательность точек $P_1,\ldots, P_i,\ldots,$ принадлежащих G, называется равномерно распределенной в G, если для любого П, принадлежащего G*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N\ \ П}{N}=\frac{V_П}{V_G} \qquad (4.10)$$

Чтобы убедиться в том, что (4.7) есть частный случай (4.10), достаточно вспомнить, что объем K^n равен 1, так что в (4.7) в место V можно было бы написать $V_П / V_{K^n}$.

Многочисленные приемы, используемые в методах Монте-Карло моделирования различных случайных величин, позволяют находить точки $P_1,\ldots, P_i\ \ldots$ *р.р.* в произвольной области G путем преобразования точек $Q_1,\ldots, Q_i\ \ldots,$ *р.р.* в K^n.

***Лемма 1.** Если точки Q_i с декартовыми координатами $(q_{i.1},\ldots, q_{i.n})$ образуют р.р. последовательность в K^n, то точки A_i с декартовыми координатоми $(a_{i.1},\ldots, a_{i.n})$, где при j=1, 2, …., n*

$$a_{i,.j} = a_j + (b_j - a_j)q_{\iota.j} \qquad (4.11)$$

образуют р.р- последовательность в параллелепипеде П, состоящем из точек $(a_1,\ldots,a_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a_j \le a_j \le b_j \quad .$$

Более или менее очевидно, что если среди точек $A_1,\ldots,A_i,\ldots,$ образующих *р.р*-последовательность в $П$, отбирать все точки, принадлежащие некоторой области $G\in П$, то получим последовательность точек *р.р.* в G. Так как этот факт будет использоваться нами в дальнейшем, то приведем его более строгую формулировку.

Лемма 2. *Пусть* $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ *– последовательность точек р.р. в* Π, *а* $G \in \Pi$ *– произвольная область с положительным объемом* $V_G > 0$. *Если среди точек* A_i *отобрать все точки, принадлежащие* G, *то получим последовательность точек р.р. в* G.

4.2.2.3. Выбор критериальных ограничений

Предположим, что задана математическая модель исследуемой или проектируемой системы, и модель эта зависит от n параметров $a_1, \ldots, a_n$. Слова «задана математическая модель» означают, что имеются формулы (или готовые программы), позволяющие по заданному набору $a_1, \ldots, a_n$ вычислить любые интересующие нас характеристики системы. Если функционирование системы описывается дифференциальными уравнениями, то в качестве параметров можно выбирать коэффициенты или начальные значения этих дифференциальных уравнений.

Пространство параметров. Пространством параметров называется n-мерное пространство, состоящее из точек A с декартовыми координатами $(a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом, каждой точке A пространства параметров соответствует конкретный набор параметров $(a_1, \ldots, a_n)$ и наоборот.

Как правило, проектировщики могут указать разумные пределы изменения каждого из параметров, которые мы будем называть *параметрическими ограничениями*

$$a_j^* \le a_j \le a_j^{**} \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.12}$$

Ограничения (4.6) выделяют в пространстве параметров параллелепипед $\Pi = \{A \mid (4.12)\}$, объем которого (n-мерный объем) равен произведению

$$V_\Pi = a_1^{**} - a_1^{*} \ \ldots \ a_n^{**} - a_n^{*} \ .$$

В дальнейшем нас будут интересовать только точки A, принадлежащие Π, так как только им соответствуют системы, параметры которых удовлетворяют ограничениям (4.12).

Так как наш метод основан на зондировании параллелепипеда Π конечным числом пробных точек, то без необходимости расширять границы (4.12) не рекомендуется.

Функциональные ограничения. Кроме параметрических ограничений обычно в условиях задачи включаются функциональные ограничения

$$c_i^* \le f_i(A) \le c_I^{**} \quad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{4.13}$$

Здесь $f_i(A)$ – некоторые функции от параметров $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Они могут быть заданы явно. Но если, например, функционирование системы описывается дифференциальными уравнениями, то $f_i(A)$ часто представляют собой функционалы, зависящие от интегральных кривых этих уравнений. Предположим, что все функции $f_i(A)$ непрерывны в Π, состоящее из точек A, удовлетворяющих ограничениям (4.13):

$$G = A \,\big|\, 4.12\ ,\ 4.13\ .$$

Множество G может быть любым замкнутым множеством. Единственное ограничение: объем G должен быть положительным ($V_G > 0$).

Можно сказать, что требование $V_G > 0$ исключает из рассмотрения задачи с функциональными ограничениями в форме равенств, например, $f(A) = c$.

Впрочем, в некоторых случаях удается разрешить систему ограничений вида

$$f_i(a_i, \ldots, a_n) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, t, t \prec n).$$

Относительно $a_{t+1}, \ldots, a_n$:

$$a_j = \varphi_j(a_1, \ldots, a_t; c_1, \ldots, c_t) \ \ (j = t+1, \ldots, n).$$

Тогда можно рассматривать задачу в t-мерном пространстве параметров $(a_1, \ldots, a_t)$ без этих ограничений, а значения $a_{t+1}, \ldots, a_n$ считать известными функциями $a_j = \varphi_j$ от $a_1, \ldots, a_t$.

Критерии качества. Критерием качества называется характеристика системы, которая связана с ее качеством монотонной зависимостью. Иными словами, при прочих равных условиях система тем лучше, чем больше (меньше) значение критерия.

Для простоты записи в дальнейшем будем предполагать, что все заданные критерии $\Phi_1(A), \ldots, \Phi_k(A)$ желательно уменьшить:

$$\Phi_\nu(A) \to \min$$

Следовательно, чем меньше $\Phi_\nu(A)$ тем лучше система (при прочих равных условиях).

Формально любой критерий можно привести к такому виду, заменяя, если это нужно, Φ_ν на $1/\Phi_\nu$ или на $-\Phi_\nu$. Однако делать это совсем необязательно: конструктору удобнее оперировать привычными реальными величинами. Как видно будет из дальнейшего, алгоритм выбора критериальных ограничений желательно максимизировать. Относительно функций $\Phi_{\nu}(A$ будем предполагать, что они непрерывны в Π.

Сформулировать математическую оптимизационную задачу при наличии нескольких критериев качества совсем непросто, ибо критерии эти часто противоречат друг другу. Например, уменьшая вес машины (что часто очень желательно), мы в то же время уменьшаем ее прочность (что как раз не желательно). Или, чрезмерное снижение стоимости изделия может обернуться ухудшением других его качеств.

Считают, что все дело в удачном выборе решающего критерия качества $\Phi(A)$, который «должен» соединить в себе значения и важность каждого из индивидуальных критериев Φ_1 (A),……., Φ_{k} (A). Однако замена нескольких критериев единым – проблема сложная и не всегда разрешимая. В большинстве реальных задач такой подход себя не оправдывает, так как при грубом выборе $\Phi(A)$ решение математической задачи об отыскании точки $\tilde{A}$, в которой

$$\Phi\ (\tilde{A}) = \min_{A\in G} \Phi(A)$$

оказывается практически плохим из-за того, что некоторые из значений $\Phi_{\nu}(\tilde{A})$ превышают допустимые (по мнению проектировщиков) пределы. Чтобы избежать такой ситуации необходимо ввести критериальные ограничения

$$\Phi_{\nu}\ \ A\ \le \Phi_{\nu}^{**} \quad \nu = 1, 2, ..., k\ . \tag{4.14}$$

Критериальное ограничение Φ_{ν}^{**} - это худшее значение критерия, которое проектировщик считает приемлемым.

Пусть D – множество точек A, которые удовлетворяют всем ограничениям (*4.12*), (*4.13*), (*4.14*):

$$D = \{A \mid (4.12), (4.13), (4.14)\ \}$$

так что $D \subseteq G \subseteq \Pi$; если множество D непусто, то оно замкнуто. Естественно назвать D множеством допустимых точек, ибо если сформулировать задачу об отыскании точки $\hat{A}$ такой, что

$$\Phi_{\nu}(\tilde{A}) = \min_{A\in D} \Phi(A), \tag{4.15}$$

то решение этой задачи всегда существует и конструктора устраивает: как бы ни был выбран решающий критерий Ф(А), все значения $\Phi_v(A)$ удовлетворяют ограничениям (4.14).

Таким образом, главная трудность при переходе к математической задаче (4.15) состоит в выборе критериальных ограничений Φ_v^{**} и в обеспечении непустоты множества допустимых точек *D*. Требования, предъявляемые к множеству *D*, такие же, как и требования к множеству *G*.

4.2.2.4 Диалоговый алгоритм метода ЛПτ–последовательностей

В основе алгоритма лежит численное исследование (зондирование) пространства параметров проектируемой системы. Исследование проводится в три этапа.

1-й этап: составление таблиц испытаний. Этот этап выполняется ЭВМ без вмешательства человека. Последовательно выбираются *N* пробных точек $A_1, \ldots A_N$, равномерно расположенных в *G*. В каждой из точек A_i рассчитывается система и вычисляются значения всех критериев:

$$\Phi_1(A_i), \Phi_2(A_i), \ldots, \Phi_k(A_i).$$

По каждому критерию составляется таблица испытаний, в которой значения $\Phi_v(A_1), \Phi_v(A_2), \ldots, \Phi_v(A_N)$ расположены в порядке возрастания

$$\Phi_v(A_{i1}) \le \Phi_v(A_{i2}) \le \ldots \Phi_v(A_{iN}) \qquad (4.16)$$

и указаны номера $i_1, i_2, \ldots, i_N$ соответствующих пробных точек (свои для каждого Φ_v). Такие таблицы представляют собой аналог статистических вариационных рядов. При $N \to \infty$ наименьшее значение $\Phi_V(A_{i1})$ стремится к min $\Phi_V(A)$, а наибольшее $\Phi_v(A_{iN})$ стремится к max $\Phi_v(A)$.

Но таблица испытаний показывает не только приближенные значения максимума и минимума $\Phi_V(A)$ в области *G*: по таблице можно судить о частоте тех или иных значений $\Phi_V(A)$.

2-й этап: выбор критериальных ограничений. Этот этап предполагает вмешательство специалиста-проблемщика – ЛПР.

Стоит подчеркнуть, что режим диалога очень удобен для проблемщика: он не должен «комбинировать», уменьшая одни критерии за счет других: ему показывают одну таблицу испытаний и предлагают назначить одно ограничение, затем повторяют то же с другой таблицей испытаний.

Конструктор заинтересован в том, чтобы все Φ_V^{**} были по возможности меньше, но необходимо понимать, что если выбирать Φ_V^{**} неоправданно малыми, то множество допустимых точек окажется пустым.

3-й этап: проверка непустоты D: Этот этап также выполняется автоматически, без вмешательства человека. Фиксируем какой-нибудь из критериев, например, $\Phi_1(A)$ и рассмотрим соответствующую ему таблицу испытаний. Пусть s – количество значений в этой таблице, удовлетворяющих выбранному критериальному ограничению Φ_1^{**}, так что

$$\Phi_1(A_{i1}) \le \Phi_1(A_{i2}) \le \ldots \le \Phi_1(A_{is}) \le \Phi_1^{**}.$$

Путем перебора значений всех критериев в точках $A_{i1},\ldots,A_{is}$ нетрудно проверить, есть ли среди этих точек хотя бы одна такая, в которой справедливы одновременно все неравенства (4.17).

$$\Phi_\nu(A_{ij}) \le \Phi_\nu^{**}, (\nu = 1,2,\ldots,k)$$

(при $\nu = 1$ можно не проверять). Если такая точка A_{ij} существует, то множество D, определенное неравенствами (4.12) – (4.14), непусто, и задача (4.15) разрешима.

В противном случае следует вернуться ко второму этапу и потребовать от конструктора уступок при назначении Φ_ν^{**}. Если такие уступки невозможны, то необходимо вернуться к первому этапу и увеличить количество N пробных точек, чтобы повторить второй и третий этапы с таблицами испытаний большего объема.

Наконец, если при неоднократном увеличении N точки $A_{ij,}$ принадлежащие D, не обнаруживаются, то есть все основания считать, что выбранные критериальные ограничения Φ_ν^{**}несовместны. Конечно, нельзя категорически исключить возможность того, что в некоторой точке A'отличной от всех пробных точек $A_1, \ldots .A_N$, все неравенства (4.12) – (4.14) выполнены, однако, если даже такая точка A' существует, то ее окрестность, в которой эти неравенства сохраняются, очень мала (объем ее порядка V_G / N) и практически система, соответствующая точке A', будет неустойчивой (не конструктивной).

Выбор пробных точек. Согласно лемме 1, по декартовым координатам точек $ЛП_\tau$-последовательности $Q_0,Q_1,\ldots,Q_i,\ldots$: $Q_i=(q_{i.1},\ldots,q_{i.n})$ вычисляются декартовы координаты точки $A^{(i)} = (a_1^{(i)},\ldots,a_n^{(i)})$, принадлежащей параллелепипеду Π

$$a_j^{(i)} = a_j^{*} + (a_j^{**} - a_j^{*}) \cdot q_{i.j}, \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{4.17}$$

При $A = A^{(i)}$ рассчитываем проектируемую систему и проверяем выполнение функциональных ограничений. Если они выполнены, то точка $A = A^{(i)}$ отбирается в качестве пробной точки в G и вычисляются все $\Phi_\nu(A)$, в противном случав точка $A = A^{(i)}$ отбрасывается. Используемые на первом этапе пробные точки – это первые N отобранных таким образом точек.

Согласно лемме 2, эти пробные точки при $N \to \infty$ образуют последовательность, равномерно распределенную в G.

Пусть N'- количество точек $A^{(i)} \in \Pi$, которые надо проверить для того, чтобы отобрать N пробных точек в G.

Так как $N / N' \approx V_G / V_\Pi = \gamma$, то $N' \approx N / \gamma$.

Пусть τ – время расчета системы в одной точке $A^{(i)}$, а T_N – полное время расчета N пробных точек в G. Из равенства $T_N = N'\tau$ получаем, что

$$T_N \approx N\tau / \gamma \tag{4.18}$$

На практике величины, входящие в формулу (4.12), численно оцениваются по сравнительно небольшому количеству испытаний. После этого формула (4.18) позволяет оценить время T_N, необходимое для составления таблиц испытаний любого заданного объема N. При решении сложных задач объем таблиц испытаний обычно ограничен из-за ограниченности машинного времени T_N. Однако следует иметь в виду, что если выбираются параметры машины, предназначенной для серийного производства, то любые затраты времени T_N будут оправданы.

Функциональные ограничения и псевдокритерии. При традиционном подходе к многокритериальным задачам нередко пытаются сократить количество критериев, заменяя их функциональными ограничениями. Например, встречается рекомендация выбрать один из критериев в качестве решающего, а на остальные наложить ограничения (при этом предполагается, что эти ограничения задаются априорно, хотя, как мы уже отмечали, обоснованно задать их совсем непросто).

С точки зрения методики применения метода $ЛП_\tau$-последовательности желательно поступать иначе: если функциональное ограничение $c_l^* \le f_l(A) \le c_l^{**}$ не абсолютное, то есть если конструктор допускает, что c_l^* и (или) c_l^{**} могут быть изменены, то стоит вместо этого ограничения ввести псевдокритерий, например, $\Phi_{k+1} = f_l(A)$. Это не критерий, ибо здесь нет монотонной зависимости от качества. Однако, разумные ограничения для Φ_{k+1} можно будет выбрать, изучив таблицу испытаний этой величины.

Если по мнению конструктора значение $\bar{c}_l$ для величины $f_l(A)$ было бы «весьма хорошим», то в качестве псевдокритерия удобно ввести величину

$$\Phi_{k+1} = \left| f_l(A) - \overline{\rho} \right|.$$

Тогда для Φ_{k+1} можно будет выбрать лишь одностороннее ограничение вида $\Phi_{k+1}(A) \le \Phi_{k+1}^{**}$ и при этом окажется, что

$$c_l^{*} = \overline{c_l} - \Phi_{k+1}^{**}, \qquad c_l^{**} = \overline{c_l} + \Phi_{k+1}^{**}.$$

Возможность использования псевдокритериев важное достоинство данного метода. Во-первых, это позволяет во многих случаях выбирать не произвольные, а обоснованные функциональные ограничения. Во-вторых, когда количество априорных ограничений уменьшается, то увеличивается объем области G и вместе с ним возрастает величина γ, входящая в формулу (4.18).

Таблицы испытаний. Таблицы испытаний часто встречаются в инженерной практике. Особенность таблиц, построенных по $ЛП_\tau$-методу, в том, что испытания равномерно распределены в области G пространства параметров. Благодаря этому таблицы позволяют получить правильное представление о распределении значений каждой из функций $\Phi_V(A)$ при A € G и гарантируют достаточно подробный просмотр любой наперед заданной части G, когда $N \to \infty$.

Если количество пробных точек N велико, то вместо просмотра всей таблицы испытаний можно ограничиться просмотром ее части, содержащей M наилучших значений ($M < N$):

$$\Phi_v(A_{i1}) \le \Phi_v(A_{i2}) \le \ldots \le \Phi_v(A_{iM}).$$

Такая таблица называется усеченной таблицей испытаний. Чрезмерное усечение таблиц может оказаться причиной пустоты множества D, но это будет обнаружено на третьем этапе диалога и тогда, возвращаясь ко второму этапу, следует увеличить объем таблиц.

Нормированные критерии. Предположим, что все рассматриваемые критерии $\Phi_v(A)$ строго положительны: $\Phi_v(A) > 0$. Обозначим наилучшее значение Φ_v в (4.16) через

$$\Phi_{v,N}^{*} = \Phi_v(A_{i1}).$$

Если вместо $\Phi_V(A)$ рассматривать нормированный критерий

$$\lambda_v(A) = \Phi_v(A) / \Phi^{*}_{v,N},$$

то вместо (4.16) получим таблицу испытаний вида

$$1 \le \lambda_v(A_{i2}) \le \lambda_v(A_{i3}) \le \ldots \le \lambda_v(A_{iN}).$$

Выбор критериальных ограничений можно осуществлять по таблицам вида формулы (4.19), которые позволяют ориентироваться на относительные изменения значений критериев. Диалоговый алгоритм метода может быть наглядно представлен в виде следующей блок-схемы.

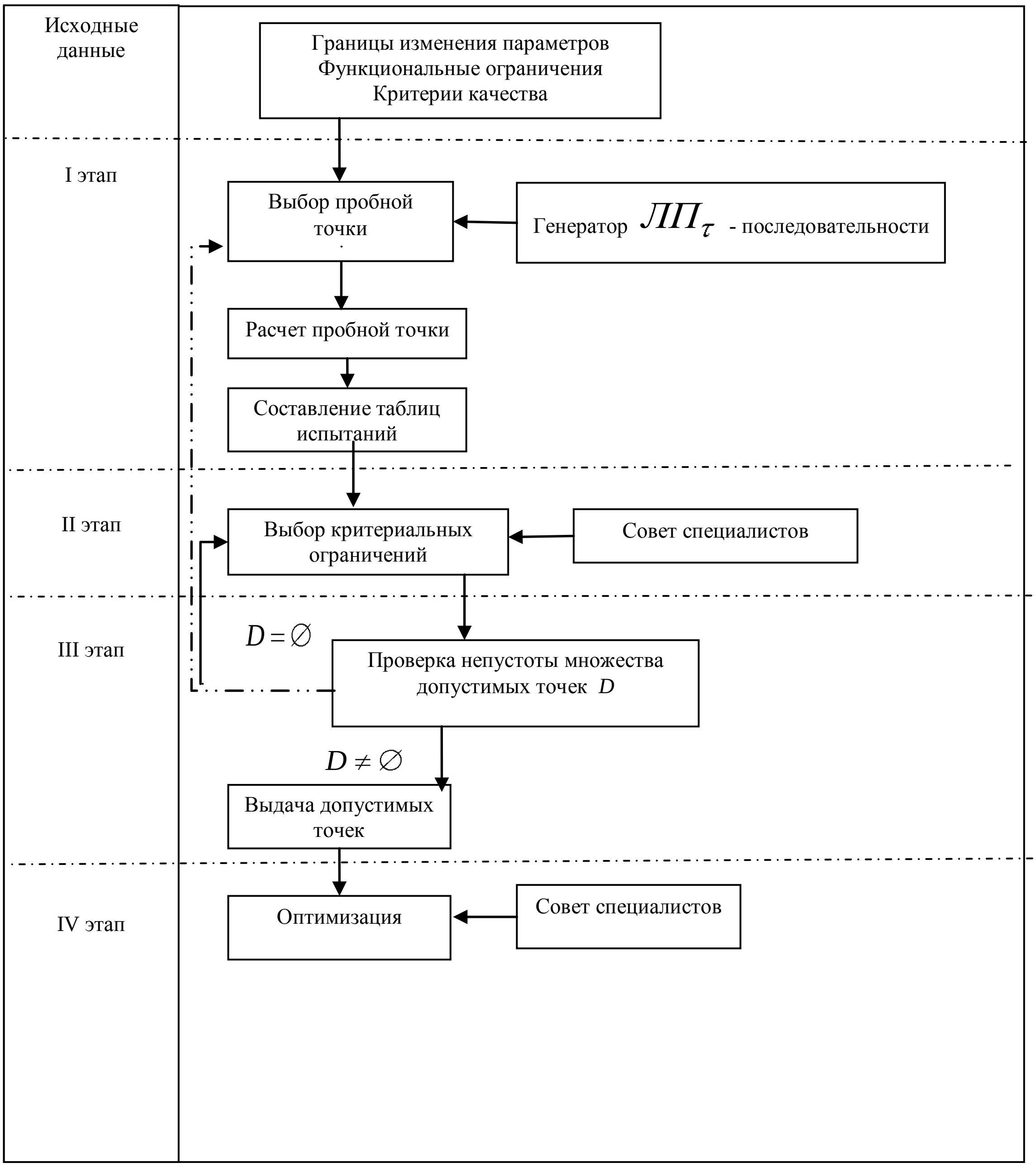

Рисунок 4.2 – Схема диалогового алгоритма метода $ЛП_\tau$ -последовательности

Тема 5
Неформализуемые задачи теории принятия решений

5.1 Вводные замечания

В исследовании операций и науке об управлении разработано много методов и моделей, механически применяемых для решения сложных проблем. Самые большие неудачи этих наук – в сфере обучения и адаптации, политике и разрешении конфликтов. Дело в том, что ни одна достаточно сложная проблема не встречается в таком виде, в каком люди пытаются ее предвидеть и осознать, строя строго формализованные математические модели.

Экономика представляет собой еще один пример сложности. Частые неудачи в прогнозировании экономических процессов подтверждают, что сложность, свойственная социоэкономическому поведению, может превышать пределы наших интеллектуальных возможностей, многие долгосрочные прогнозы всего на несколько лет выливаются не более чем в обоснованные догадки.

Исследователи часто применяют в экономическом прогнозировании методы линейного программирования для нахождения наилучших решений в задачах, включающих не десятки, а сотни и даже тысячи искомых переменных, предполагая, что все они линейно влияют на качество функционирования исследуемой сложной системы (но, например, даже размеры кучи камней больше, чем сумма габаритов всех ее камней). Более того, оптимизация на основе строго формализованной модели вынуждает специалиста по планированию концентрировать внимание на одной или нескольких целях, фактически исключая из рассмотрения остальные.

В 60 – 70-е гг. XX в. быстрое развитие компьютерной техники открыло новые горизонты моделирования и прогнозирования. Кроме того, это была «золотая эра» исследования операций (ИСО), когда специалисты этой области знаний, основываясь на строго формализованных моделях, «дирижировали» всем, начиная от бомбежки Северного Вьетнама и кончая построением национального бюджета США.

Однако, начиная с конца 70-х годов, для исследователей все более очевидным становился тот факт, что большинство задач, связанных с изучением сложных экономических и социальных систем, не может быть строго формализовано. Более того, зачастую строгая математическая формализация задачи приводит к ее упрощению и, как следствие, к получению результатов, являющихся далеко не оптимальными. Именно в этот период возрос интерес к так называемым методам экспертного оценивания, одним из которых и является метод анализа иерархий (МАИ), разработанный американским ученым Т. Л. Саати.

5.2. Метод анализа иерархий (метод Т. Л. Саати)

Метод Саати состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составные части и дальнейшей обработке последовательности суждений ЛПР по парным сравнениям. В результате может быть выражена относительная степень (интенсивность) взаимодействия элементов в иерархии проблемы. МАИ включает в себя процедуры декомпозиции проблемы, синтеза множественных суждений эксперта, получения приоритетных критериев и нахождения альтернативных решений. Метод базируется на следующих принципах:

1 Принцип идентичности и декомпозиции. Данный принцип предусматривает структурирование проблемы в виде иерархии или сети, что является первым этапом применения МАИ. Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня связан со всеми элементами последующего уровня. Простейшая полная иерархия проблемы многокритериального выбора включает в себя следующие три уровня (рисунок 5.1):

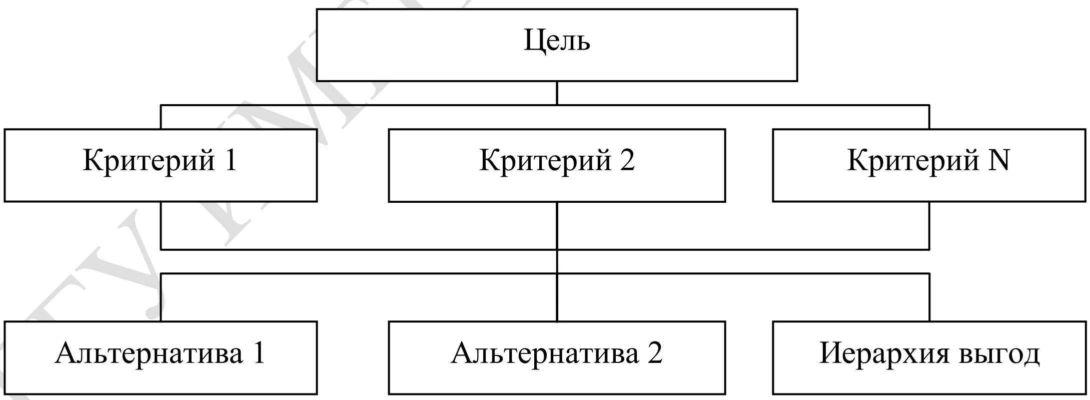

Рисунок 5.1 – Иерархия проблемы

2 Принцип дискриминации и сравнительных суждений. Чтобы установить приоритеты критериев, получить оценки для альтернативных решений в МАИ используется метод парных сравнений: строятся матрицы парных сравнений

$$A = \| a_{ij} \|,$$

где $a_{ij} = w_i / w_j$, w_i — «вес» i-того элемента иерархии. Очевидно, что

$$a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 1 / a_{ji}.$$

При заполнении матриц парных сравнений ЛПР рекомендуется пользоваться следующей шкалой относительной важности для a_{ij} (таблица 5.1):

Таблица 5.1 – Шкала относительной важности

a_{ij}	Пояснения
1	Равная важность сравниваемых элементов иерархии
3	Умеренное превосходство i-го элемента иерархии над j-ым
5	Существенное или сильное превосходство i -го элемента
7	Значительное превосходство i-го элемента
9	Очень значительное превосходство i-го элемента
2, 4, 6, 8	Промежуточные степени превосходства

Следует помнить, что между собой сравниваются элементы принадлежащие к одному уровню иерархии, сравнение происходит по степени их соответствия конкретному элементу вышестоящего уровня.

Таким образом, для проблемы, обладающей, приведенной выше, простой иерархией, необходимо будет составить N+1 матрицу парных сравнений (одну – для сравнения элементов второго уровня, т. е – критериев, по степени их важности для ЛПР при достижении цели, и N матриц – для сравнения элементов третьего уровня, т. е. альтернативных решений, по степени их соответствия каждому из N критериев).

3 Принцип синтеза приоритетов. Итак, будем считать, что построены матрицы парных сравнений: одна для второго уровня иерархии, а на каждом последующем уровне – столько матриц парных сравнений, сколько элементов содержит предшествующий уровень иерархии. Какую информацию содержат эти матрицы?

Для каждой матрицы мы можем рассчитать локальные приоритеты сравниваемых элементов. Каждой строке матрицы, а, следовательно, соответствующему элементу, ставим в соответствие геометрическое среднее ее элементов. Суммируя полученные результаты, делим геометрические средние каждой из строк матрицы на эту сумму.

В результате получаем локальные приоритеты соответствующих сравниваемых элементов.

Важно также вычислить так называемый индекс согласованности (ИС) суждений по каждой матрице

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \tag{5.1}$$

где n – размерность матрицы, а $\lambda_{\max}$ считается следующим образом: вначале суммируется каждый столбец суждений, затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца на вторую компоненту и т. д., затем полученные числа суммируются.

Теперь необходимо сравнить ИС с той величиной, которая получилась бы при случайном выборе суждений по нашей шкале: 1/9...9. Значения этой величины – случайной согласованности (СС) представлены в таблице 5.2:

Таблица 5.2 – Случайная согласованность

Размер матрицы										0
Случайная согласованность			,58	,9	,12	,24	,32	,41	,45	,49

Определяя ИС и СС, находим отношение согласованности

$$ОС = \frac{ИС}{СС}. \tag{5.2}$$

Если для конкретной матрицы окажется, что ОС > 0,17, то можно утверждать, что суждения эксперта, на основе которых заполнена исследуемая матрица, сильно разсогласованы, и ему надлежит заполнить матрицу заново, более внимательно используя при этом шкалу парных сравнений.

Теперь обратимся непосредственно к принципу синтеза приоритетов. Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня вниз.

Локальные приоритеты альтернатив перемножаются на приоритеты соответствующих критериев предшествующего уровня и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями.

Приоритеты элементов второго уровня умножаются на единицу.

Использование метода МАИ может быть проиллюстрировано на следующем примере. Предположим, что некоторая крупная преуспевающая фирма ставит перед собой цель строительства своего филиала в одной из стран с так называемой «переходной экономикой». Пусть в качестве таковых определены Египет, Турция, Хорватия, Беларусь и Россия.

Цель строительства: получение доступа к зарубежным рынкам сбыта и снижение издержек производства за счет более низкой оплаты труда в этих странах. При этом не сбрасываются со счета и потенциальные издержки: некоторая потеря контроля за управлением, преобладание неквалифицированной рабочей силы, риск изменения политических и экономических условий в выбранной стране.

Воспользовавшись методом Саати для решения данной проблемы, надлежит, в первую очередь, четко определить те потенциальные выгоды и издержки, которые необходимо учитывать.

Допустим, что в результате получены следующие иерархии выгод и издержек (рисунки 5.2 и 5.3):

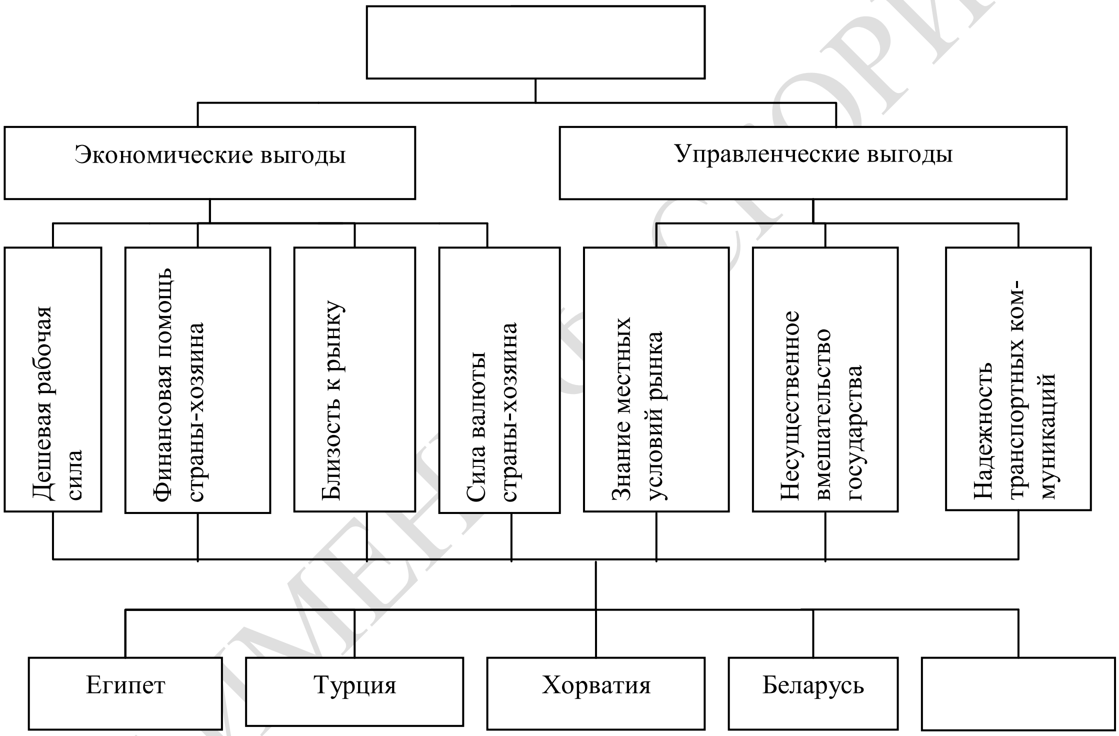

Рисунок 5.2 – Иерархия выгод

Рисунок 5.2 – Иерархия издержек

После создания иерархии проблемы необходимо приступить к заполнению матриц парных сравнений. Матрица парных сравнений для второго уровня первой иерархии имеет следующий вид (предположим, что эксперт фирмы заполнил ее с учетом интересов и суждений своих и руководства) (таблица 5.3):

Таблица 5.3 – Матрица парных сравнений для второго уровня

Сравнение выгод	Экономические выгоды	Управленческие выгоды
Экономические выгоды	1	3
Управленческие выгоды	1/3	1

Из вида заполненной матрицы следует, что эксперт при решении проблемы отдает предпочтение (хотя и незначительное) достижению экономических выгод перед управленческими. После этого для данной матрицы по описанной выше методике рассчитываются локальные приоритеты и ее согласованность. Приведем здесь незаполненные матрицы парных сравнений для третьего уровня критериев (таблицы 5.4 и 5.5):

Таблица 5.4 – Матрица парных сравнений для третьего уровня

Важность критерия при достижении экономических выгод	Дешевая рабочая сила	Финансовая помощь страны-хозяина	Близость к рынку	Сила валюты страны
Дешевая рабочая сила	1			
Финансовая помощь страны-хозяина		1		
Близость к рынку			1	
Сила валюты страны-хозяина				1

Таблица 5.5 – Матрица парных сравнений для третьего уровня

Важность критерия при достижении управленческих выгод	Знание местных условий рынка	Несущественное вмешательство государства	Надежность транспортных коммуникаций
Знание местных условий рынка	1		
Несущественное вмешательство государства		1	
Надежность транспортных коммуникаций			1

Что касается последнего – четвертого уровня, то для него необходимо составить семь (по числу критериев – элементов вышестоящего уровня) матриц для сравнения альтернатив – государств предполагаемого строительства филиала по степени их соответствия каждому критерию (таблицы 5.6 и 5.7).

Таблица 5.6 – Матрица парных сравнений для четвертого уровня

Дешевая рабочая сила	Египет	Турция	Хорватия	Беларусь	Россия
Египет	1				
Турция		1			
Хорватия			1		
Беларусь				1	
Россия					1

Таблица 5.7 – Матрица парных сравнений для четвертого уровня

Надежность транспортных коммуникаций	Египет	Турция	Хорватия	Беларусь	Россия
Египет	1				
Турция		1			
Хорватия			1		
Беларусь				1	
Россия					1

После того как все эти матрицы будут заполнены, будет проверена согласованность суждений эксперта при заполнении каждой из них и в случае удовлетворительного значения ОС по этим матрицам будут рассчитаны локальные приоритеты сравниваемых объектов. Зная локальные приоритеты всех элементов иерархии, можно переходить к этапу синтеза глобальных приоритетов. Таким образом, будут получены глобальные приоритеты стран-альтернатив с точки зрения выгод строительства в них филиала фирмы.

Повторяя описанные выше действия для иерархии издержек, получим глобальные приоритеты стран-альтернатив с точки зрения возможных издержек строительства филиала. И, наконец, вычислив отношения приоритетов выгод к приоритетам издержек по каждой из стран, определим ту страну, для которой это отношение является максимальным. Это и будет та страна, которая в наибольшей степени удовлетворяет требованиям фирмы.

Данный подход, основанный на методе МАИ, опирается на рассмотрение доходов и издержек одновременно. Это выгодно отличает его от подходов, опирающихся в основном лишь на учет доходов. Но единственный критерий величины доходов – не очень подходящая основа для сравнения, поскольку, чем больше ресурсов будет потрачено, тем больше могут быть доходы. Однако ресурсы в большинстве случаев ограничены. С другой стороны, если специалисты по планированию, оценивая возможные проекты, выбирают лишь те из них, которые требуют минимальных инвестиций, то можно скатиться к подходу «ничего неделания» или, что более реально, производить незначительные действия, не способствующие существенным прогрессивным сдвигам (рисунок 5.4):

Рисунок 5.4 – Иерархия издержек пересечения реки

Рассмотрим в качестве примера еще одну проблему. Допустим, что перед неким правительственным комитетом, в ведении которого находится проблема строительства мостов и туннелей, встал вопрос: построить или нет туннель или мост через крупную реку, на которой в настоящее время работает частный паром. Допустим, что эксперты комитета, комплексно подходя к решению данной проблемы, опираясь на метод МАИ, сумели разработать следующие иерархии (рисунок 5.4). После применения процедуры метода Саати решение может быть рекомендовано к принятию после сравнения выгод и издержек по каждому из возможных решений. Уточним понимание конкретных выгод и издержек, приведенных в иерархиях.

Выгоды. Экономические факторы, влияющие на выбор, содержат выгоды, связанные с выигрышем во времени при передвижении по новому мосту или туннелю, по сравнению со временем переправы на пароме. Увеличение транспортного потока в районе может также принести ощутимый доход от эксплуатации дорог при введении платы за проезд, что положительно должно сказаться на местном бюджете. Более интенсивное движение будет способствовать и развитию торговли как в окрестностях моста, так и вдоль всей дороги, будут построены новые бензоколонки, магазины и рестораны. Возникнет также возможность дополнительного привлечения местного населения на строительные работы. Нельзя сбрасывать со счетов и социальные выгоды проекта: мост или туннель может обеспечить большую безопасность и надежность переправы по сравнению с паромом, а также будет способствовать большему количеству пересечений реки для посещения родственников, друзей, в целях посещения музеев, выставок и т. д. Строительство моста или туннеля может привести также к повышению статуса населенного пункта. Выгоды среды напрямую связаны с социальными выгодами и большим психологическим комфортом жителей.

Издержки. Как и выгоды, издержки, связанные с выбором той или иной альтернативы переправы через реку, включают факторы экономического и социального плана, а также факторы среды. Основные экономические издержки: капитальные вложения на строительство, затраты на управление и эксплуатацию, а также последствия свертывания уже налаженного паромного бизнеса. При планировании социальных последствий следует просчитать возможность отрицательного влияния последствий разрушения существующего стиля жизни. Издержки, связанные со средой, должны учитывать возможный вред, причиняемый экосистеме каждой из альтернатив.

Допустим, что при вычислении приоритетов альтернативных проектов экономические факторы имели больший приоритет и глобальные приоритеты по выгодам и издержкам следующие (таблица 5.8):

Таблица 5.8 – Глобальные приоритеты по выгодам и издержкам

Глобальные приоритеты	Мост	Туннель	Паром
Выгода	0,57	0,36	0,07
Издержки	0,36	0,58	0,05

В предыдущем примере при выборе проектов мы опирались на критерий «стоимость – эффективность», определяя проект с наибольшим отношением выгод к издержкам. В данной задаче таким проектом является строительство моста. Однако, поскольку паромная переправа уже существует, то представляется также важным учесть критерий сравнения приращения выгод (0,57 – 0,07) с приращением издержек (0,36 – 0,05), т. е. имеем 0,5 / 0,36 > 0,07 / 0,05. Таким образом, с точки зрения этого подхода, строительство моста – наиболее предпочтительная из всех альтернатив.

Для решения более сложных проблем, иерархия которых не может быть сведена к 3-х или 4-х уровневой структуре, возможна следующая их декомпозиция по иерархии.

В вершине иерархии устанавливается единственный элемент – фокус – формулировка исследуемой проблемы.

Во второй (не обязательный) уровень следует включать различные экономические, политические и социальные силы, влияющие на исход.

Третий уровень – факторы, которые реально влияют на ситуацию путем манипулирования этими силами.

Четвертый уровень – преследуемые цели каждого фактора.

Пятый (не обязательный) уровень включает политики факторов, посредством которых они пытаются достичь своих целей.

Шестой уровень – альтернативные возможные сценарии или исходы, за которые борется каждый фактор ради достижения своих целей.

Седьмой уровень – обобщенный исход как результат реализации и взаимодействия возможных альтернативных сценариев развития проблемы.

5.3 Методы ЭЛЕКТРА, Подиновского и порядковой оптимизации в задачах экспертного выбора

Как уже отмечалось выделение множества Парето при решении многокритериальных задач довольно часто является лишь предварительным этапом процесса принятия решений, поскольку при достаточно большом исходном множестве вариантов множество Парето также оказывается недопустимо большим для того, чтобы ЛПР мог осуществить окончательный выбор без затруднений самостоятельно. Следовательно, выделение множества Парето можно рассматривать лишь как предварительный этап оптимизации, и налицо проблема дальнейшего сокращения этого множества. Собственно говоря, те методы многокритериальной оптимизации, которые нами уже рассматривались ранее, также посвящены проблеме сужения множества Парето. В данном разделе рассмотрим методы оптимизации, основанные на построении бинарного отношения предпочтения, более сильного, чем отношение Парето.

Методы ЭЛЕКТРА. Группа методов (ЭЛЕКТРА I, ЭЛЕКТРА II, ЭЛЕКТРА III) была разработана коллективом французских ученых, возглавляемым профессором Б. Руа. В этих методах бинарное отношение предпочтения, более сильное, чем отношение Парето, строится следующим образом.

Для каждого из n критериев (предполагается, что критерии числовые) определяется вес – число, характеризующее важность соответствующего критерия, которое тем больше, чем важнее для ЛПР соответствующий критерий. Эти веса могут быть определены либо ранжированием, либо, например, по методу Саати. Для того, чтобы определить, превосходит альтернативный вариант $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, вариант $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

(где x_i, y_i - значения i-того критерия, сообщаемые ему вариантами x и y соответственно), производятся следующие действия.

Множество I критериев разбивается на три подмножества:

– $I^{+}(x, y)$ – критерии, по которым x превосходит y;

– $I^{=}(x, y)$ – критерии, по которым x и y имеют одинаковые оценки;

– $I^{-}(x, y)$ – критерии, по которым y превосходит x.

Далее определяется относительная важность P_{xy}^{+}, $P_{xy}^{=}$, P_{xy}^{-} каждого из этих подмножеств. Устанавливается также некоторый порог c и считается, что вариант x превосходит вариант y только в том случае, когда некоторая функция, называемая индексом согласия, удовлетворяет условию

$$f(P_{xy}^{+}, P_{xy}^{=}, P_{xy}^{-}) \geq c. \tag{5.3}$$

Вид Функции f определяется по своему для каждой модификации метода ЭЛЕКТРА.

Условие (5.3) является необходимым, но не достаточным условием превосходства x над y. В методах ЭЛЕКТРА формулируются дополнительные условия, предназначенные учитывать не только порядок следования оценок x и y по критериям, но и значения модулей разностей $x_i - y_i$. Эти условия, называемые индексом несогласия, могут быть записаны в виде

$$d_{xy} \leq d, \tag{5.4}$$

где d – пороговое значение индекса несогласия d_{xy}; d_{xy} для каждой модификации метода ЭЛЕКТРА определяются по-своему.

Таким образом, отношение предпочтения R определяется следующим образом:

$$xRy \Leftrightarrow f(P_{xy}^{+}, P_{xy}^{=}, P_{xy}^{-}) \geq c \wedge d_{xy} \leq d\ . \tag{5.5}$$

Особенность методов ЭЛЕКТРА состоит в том, что в них несколько отступают от традиционных методов выделения подмножества недоминируемых вариантов. Следуя теории игр, их создатели предлагают несколько расширить это подмножество путем выделения в исходном множестве некоего ядра, все элементы которого несравнимы между собой, а любой вариант, в ядро не вошедший, доминируется хотя бы одним элементом ядра.

Выделение ядра на множестве исходных вариантов является заключительным этапом методов ЭЛЕКТРА. Дальнейшее сужение ядра может быть достигнуто заданием других, более жестких ограничений в условиях (5.3) и (5.4), т. е. увеличением порогового значения индекса согласия c и уменьшением порогового значения индекса несогласия d.

Опишем более конкретно применение данного метода.

Во всех модификациях метода ЭЛЕКТРА на первом этапе с помощью ЛПР определяются веса критериев – положительные действительные числа, которые тем больше, чем важнее для ЛПР соответствующий критерий. Такой подход, конечно, имеет существенный недостаток – неоднозначность определения весовых коэффициентов. Однако полностью избежать субъективных оценок в процедуре принятия решений невозможно, следует лишь с большой тщательностью подходить к определению весов. Здесь можно воспользоваться, например, процедурой описанного выше метода Саати. Пусть при назначении весов критериям, по которым предстоит выбрать автомобиль, от ЛПР получена следующая информация: цена (критерий 1) важнее комфортности (критерий 2), а та, в свою очередь, важнее скоростных качеств (критерий 3) и внешнего вида автомобиля (критерий 4). Кроме того, критерий 3 и 4 имеют одинаковую важность, а, рассматриваемые совместно, имеют большую важность, чем критерий 1 (цена). Таким образом, ЛПР сообщил информацию о критериях качественного типа и на ее основе необходимо назначить веса критериев $p_t\,(t$ = 1,2,3.4) так, чтобы выполнялись соотношения:

$$p_1 > p_г > p_э = p_4,\ \ p_3 + p_4 > p_1$$

Ясно, что, например, что решение $p_1 = 5,\ p_2 = 4,\ p_э = p_4 = 3$, далеко не единственное. И хотя описанную неоднозначность при переводе чисто качественной информации о критериях в числовую полностью устранить невозможно, использование метода Саати будет способствовать более корректному выбору весов критериев.

Далее определяются важности групп критериев $I^+(x,y)$, $I^=(x,y)$ и $I^-(x,y)$ для каждой пары сравниваемых альтернатив x и y:

$$P_{xy}^{*} = \sum_{t \in I^{*}(x,y)} p_t \quad ,* \in \{+,-,=\}\,.$$

В качестве условия (5.3) в методе ЭЛЕКТРА I предлагается рассматривать выражение вида:

$$\frac{P_{xy}^{+} + P_{xy}^{=}}{\sum\limits_{t=1}^{n} p_t} > c_1 \quad (\frac{1}{2} \le c_1 \le 1)\,, \tag{5.6}$$

в методе ЭЛЕКТРА II - выражение вида

$$\frac{P_{xy}^{+}}{P_{xy}^{-}} > c_2 \quad (c_2 \ge 1)\ . \tag{5.7}$$

Следует отметить, что условие (5.6) можно применять лишь тогда, когда сравнение альтернатив происходит в строгих шкалах (тогда множество

$P^{=}_{xy}$ пусто) или когда число совпадающих оценок у различных вариантов достаточно мало по сравнению с n. В противном случае отношение предпочтения, может оказаться симметричным: x лучше y (xRy) и y лучше x (yRx) одновременно. Поэтому, если используются нестрогие шкалы, то лучше пользоваться условием (5.7).

Использование порядковых отношений, т. е. отношений, основанных лишь на порядковой информации о сравниваемых альтернативных вариантах, связано с двумя существенными проблемами.

Первая, присущая всему классу порядковых отношений,– это то, что незначительный выигрыш по одному критерию может сопутствовать большому проигрышу по другому критерию. Например, если n = 5, x = (10, 10, 10, 1, 1), y = (9, 9, 9, 10, 10) и все критерии имеют одинаковую важность, то при c_2 = 1 вариант x превосходит y но (5. 7), хотя преимущество x над y по первым трем критериям весьма незначительно, а по двум последним критериям x значительно уступает y. Чтобы как-то избежать подобных ситуаций в ЭЛЕКТРА и используется условие (5,4). Используя это условие, мы определяем некоторую область несравнимости – область несогласия D, такую, что для любых вариантов x и y из того, что $(x, y) \in D$, следует, что x и y не сравнимы. Если, например, $D = \{(x,\ y)\ :\ \exists t = 1,2,..n : x_t - y_t > 5\}$, то это означает, что y не может доминировать x, если уступает ему более пяти единиц хотя бы по одной компоненте (критерию).

Вторая сложность, возникающая при использовании порядковых отношений и их модификаций, связана с возможностью появления циклов, т. е. таких ситуаций, когда x^1 лучше, чем $x^г$, x^2 лучше, чем x^3,..., x^{k-1} лучше, чем x^k, а вот x^k, в свою очередь, лучше x^1. В связи с этим, при использовании порядковых отношений необходимо помнить о возможности возникновения подобных ситуаций и избегать их. В методах ЭЛЕКТРА данная проблема, не рассматривается. Если говорить о методе Саати, то наличие процедуры проверки согласованности матриц парных сравнений как раз и нацелено на то, чтобы избежать подобных ситуаций.

В заключение описания метода ЭЛЕКТРА приведем иллюстративный пример. Пусть в исходном множестве альтернативных вариантов, сравниваемых по пяти критериям, определены следующие семь недоминируемых по Парето:

$x^1 = (5,3,2,7,2)$; $x^5 = (1,6,6,4,5)$;

$x^2 = (4,2,3,5,1)$; $x^6 = (2,7,5,2,6)$;

$x^3 = (3,4,1,6,3)$; $x^7 = (6,5,6,3,4)$.

$x^4 = (7,1,4,1,7)$;

Применим метод ЭЛЕКТРА для того, чтобы, получив у ЛПР дополнительную информацию, сократить число вариантов, которое будет предложено ему для окончательного выбора.

1-й этап. От ЛПР получается информация о сравнительной важности критериев. Пусть ЛПР сообщил, что:

– критерии 1 и 2 имеют одинаковую важность;

– критерии 3, 4 и 5 имеют также одинаковую важность;

– каждый из первых двух критериев важнее каждого из оставшихся.

Пусть в соответствии с этой информацией критериям назначены веса:

$$p_1 = p_2 = 2 \qquad p_3 = p_4 = p_5 = 1$$

2-й этап. Строим матрицу 7×7, в которой элемент a_{tj} определяется следующим образом:

$$a_{tj} = \frac{P^{+}_{x^t x^j}}{P^{-}_{x^t x^j}}.$$

Допустим, что в качестве порогового значения индекса согласия выбрано на основе консультаций с ЛПР c_2 = 1,25. Как видно из таблицы 5.9, любой из семи вариантов доминируется хотя бы одним из остальных.

Таблица 5.9 – Матрица значений a_{tj}

—	6	1,3	0,75	0,75	0,75	0,17
0,17	—	0,75	0,75	0,75	0,75	0,17
0,75	1,3	—	0,75	0,75	0,75	0,17
1,3	1,3	1,3	—	0,75	0,75	0,75
1,3	1,3	1,3	1,3	—	0,4	1,3
1,3	1,3	1,3	1,3	2,5	—	0,75
6	6	6	1,3	0,75	1,3	—

Поэтому без учета индекса несогласия подмножество оптимальных вариантов оказалось бы пустым.

3-й этап. С помощью ЛПР устанавливается индекс несогласия. Пусть

$$D = \{(x.\ y): x_t - y_t > 5\}.$$

В этом случае один из вариантов – x^7 - оказывается недоминируемым, оптимальным будет считаться также и вариант x^5, который несравним с x^7.

Таким образом, применение метода ЭЛЕКТРА позволило более полно учесть мнение ЛПР и сократить исходное множество недоминируемых по Парето решений до двух элементов. Следует, однако, отметить, что группа методов ЭЛЕКТРА не лишена традиционных недостатков, присущих многим современным методам многокритериальной оптимизации.

Метод Подиновского. Метод Подиновского также имеет своей целью построение более сильного, нежели паретовское, бинарного отношения предпочтения. Как и в ЭЛЕКТРА, для этого используется дополнительная информация о сравнительной важности критериев. Однако основное и существенное отличие метода Подиновского состоит в том, что качественная информация о критериях, получаемая от ЛПР, не преобразуется в количественную. Автору метода впервые в практике многокритериальной оптимизации удалось освободиться от необходимости ввода весовых коэффициентов важности критериев, вносящих большую неопределенность в решение задачи.

Информация о сравнительной важности критериев задается совокупностью сообщений ЛПР типа:

– критерий t важнее, чем критерий J (tВJ);

– критерии t и j равноценны (tSJ);

– набор критериев (t_1,..., t_l) важнее, чем набор (j_1,..., j_m);

– наборы критериев (t_1,..., t_l) и (j_1,..., j_m) равноценны по важности.

Построенное на основании информации о важности критериев бинарное отношение предпочтения позволяет существенно сузить множество Парето. Так, если имеется информация о том, что все n критериев равноценны, то при большом числе сравниваемых вариантов это позволяет сузить паретовское множество приблизительно в $n!$ раз.

Рассмотрим применение метода Подиновского для решения описанной выше задачи в наиболее благоприятном случае, когда все критерии для ЛПР равноценны. Тогда, следуя методу Подиновского, нам необходимо упорядочить оценки каждого из альтернативных вариантов (например, по убиванию) и среда полученных векторов выбрать в качестве оптимальных недоминируемые по Парето. Упорядочив оценки, получаем:

$\tilde{x}^1 = (5,3,2,7,2)$; $\tilde{x}^5 = (1,6,6,4,5)$;

$\tilde{x}^2 = (4,2,3,5,1)$; $\tilde{x}^6 = (2,7,5,2,6)$;

$\tilde{x}^3 = (3,4,1,6,3)$; $\tilde{x}^7 = (6,5,6,3,4)$.

$\tilde{x}^4 = (7,1,4,1,7)$;

Среди вновь образованных упорядоченных векторов оценок недоминируемыми по Парето оказались векторы $\tilde{x}^4$ и $\tilde{x}^7$, Следовательно, руководствуясь методом Подиновского, в качестве эффективных решений при равнозначности критериев рекомендуются варианты x^4 и x^7.

Метод Подиновского в описанном виде может быть применен только в случае однородности критериев, т. е. критериев, значения которых принадлежат одному и тому же множеству. Примером однородных критериев может служить, например, множество суждений одинаково компетентных экспертов, оценивающие варианты по одной и той же шкале. В этом случае действительно может быть непринципиально, получил вариант x оценки экспертов x_1 = а, $x_2 = b$ или $x_1 = b$, $x_2 = a$. Сложности появляются, когда критерии оказываются неоднородными, что бывает довольно часто. При неоднородных критериях определение их сравнительной важности сводится, по-существу, к определению коэффициентов важности критериев. Это является основным недостатком метода Подиновского и в этом случае чаще целесообразнее использовать методы ЭЛЕКТРА.

Метод порядковой оптимизации. В основе данного метода лежит аппроксимация изнутри структуры предпочтений ЛПР, описываемой бинарным отношением, некоторым отношением из конечного класса.

В основе метода порядковой оптимизации лежит следующая процедура:

– определение упорядочения критериев по важности;

– нахождение порядковых отношений, удовлетворяющих этому упорядочению;

– построение пересечения по всем этим порядковым отношениям, которое и будет аппроксимацией R^* предпочтений ЛПР.

Для иллюстрации метода вновь рассмотрим пример сравнения семи вариантов по пяти критериям.

Допустим, что в роли ЛПР выступает покупатель автомобиля. Он сформулировал пять критериев, которыми будет руководствоваться при выборе: цена (критерий 1), комфортность (критерий 2), фирма-производитель (критерий 3), скоростные качества (критерий 4), внешний вид автомобиля (критерий 5). Пусть в результате опроса ЛПР получена следующая информация о важности критериев: входящие в группы $L_1= \{1, 2\}$ и $L_2 = \{3, 4, 5\}$ имеют одинаковую важность, причем каждый критерий из L_1 важнее любого критерия из L_2. Кроме того, после дополнительного уточнения структуры предпочтений покупателя, проведенного на основе его опроса специалистом по маркетингу, было определено, что в качественное понятие «быть лучше» ЛПР вкладывает следующий смысл: «быть лучше –- значит, быть лучше по первым двум и по любой паре из оставшихся трех критериев». Нетрудно показать, что в этом случае полином аппроксимирующего отношения имеет вид:

$$f_{R^*}(u) = u_1 u_2 (u_3 u_4 + u_3 u_5 + u_4 u_5).$$

Если рассматривать предыдущий пример, то недоминируемыми по R^* будут варианты x^4, x^5, x^6, x^7. Чем сильнее будут упорядочены критерии, тем меньшее число альтернативных вариантов будет рассматриваться в качестве эффективных. Пусть, например, удалось упорядочить все критерии, кроме двух последних:

$$\text{крит. } 1 \to \text{крит. } 2 \to \text{крит. } 3 \to (\text{крит. } 4 \leftrightarrow \text{крит. } 5).$$

В этом случае аппроксимирующий полином имеет вид:

$$f_{R^*}(u) = u_1 (u_2 + u_3 (u_4 + u_5))$$

и выбранными окажутся только два варианта: x^4 и x^7. Как видим, вариант x^7 всегда оказывался в числе рекомендуемых ЛПР для окончательного выбора.

Метод порядковой аппроксимации также не лишен недостатков. К ним можно отнести следующие:

1 Процесс получения от ЛПР информации о сравнительной важности критериев достаточно трудоемок. В общем случае мы должны задать ЛПР порядка n^2 вопросов. Хотя надо отметить, что на практике при благоприятных условиях число вопросов к ЛПР может быть снижено до n.

2 ЛПР может, не отдавая себе в этом отчета, давать противоречивую информацию о сравнительной важности критериев.

3 Главный недостаток: информация по сравниваемым альтернативам должна быть представлена в строгих шкалах, иначе составление аппроксимирующего полинома будет крайне затруднено.

Что касается положительных сторон данного метода, то следует отметить следующее. Для решения задач выбора в строгих шкалах при сравнительно небольшом числе критериев (5–9) этот метод особенно эффективен. Он дает возможность обоснованно, без внесения произвола, аппроксимировать предпочтения ЛПР. Несомненное достоинство метода также и в том, что он не зависит (в отличие от ЭЛЕКТРА) от числа сравниваемых вариантов. Кроме того, критерии могут иметь произвольную природу, и не обязаны быть однородными, как при использовании метода Подиновского.

5.4 Ранжирование альтернатив и групповой экспертный выбор

5.4.1 Постановка задачи

Эффективное управление большими системами в значительной степени зависит от качества решений, принимаемых в сложных ситуациях на основе оценок и мнений специалистов, т. е. на основе экспертных оценок. Экспертные оценки могут явиться важным источником информации при решении задач управления, формировании целевой функции управляемых объектов, при исследовании объектов, выборе переменных, существенно влияющих на исследуемый процесс и т. д.

Опишем кратко методы выявления, формализации и обработки неявной, качественной, субъективной информации, которая может содержаться во мнениях и высказываниях людей (респондентов). Исследование, проводимое группой специалистов, состоит из нескольких этапов:

– формулирование конкретной цели исследования;
– выбор экспертов, которые должны быть опрошены;
– выбор метода опроса Р;
– разработка опросного листа (анкеты);

Анкета должна состоять из вопросов, на которые эксперты должны дать ответы в определенной форме. Ответ *J*-то эксперте на *t*-ый вопрос анкеты будем в дальнейшем обозначать x_t^j;

– обработка результатов опроса.

Опыт показывает, что к опросу следует привлекать экспертов, принадлежащих к возможно большему числу различных направлений или научных школ в соответствующей области. При составлении экспертной группы необходимо предусмотреть возможность взвешивания ответов экспертов согласно их компетентности. Учет их компетентности может существенно изменить результаты обработки данных опроса.

Под методом опроса *P* подразумеваются: метод составления анкеты (*p*1), число вопросов в анкете (*p*2), число повторных опросов (*p*3), позволяющих скорректировать анкету на основе предыдущих опросов. Опрос может быть как очным, так и заочным. При заочном опросе личный контакт исследователя с экспертом отсутствует. Преимущество этого метода заключается в его простоте и дешевизне, однако этот метод дает большое число незаполненных или неверно заполненных анкет. Очный опрос дает лучшие результаты, но требует больших затрат времени и средств. Кроме того, во время личной беседы исследователь, помимо собственной воли, может определенным образом повлиять на возможные ответы эксперта. Поэтому предварительно должен быть составлен и испытан план личной беседы, которого в ходе опроса, также как и формулировок вопросов, необходимо строго придерживаться.

5.4.2. Ранжирование как порядковый метод измерения качественной информации

Для количественного представления сведений экспертов об объекте, носящих чаще всего качественный характер, применяются специальные методы. Один из способов измерения качественной информации – введение порядковых шкал. Данные, измеренные в порядковой шкале, позволяют установить между объектами отношения «равно», «больше», «меньше» (вспомним методы Саати, Подиновского, ЭЛЕКТРА). Рассмотрим один из методов измерения данных в порядковых шкалах – метод ранжирования. Этот метод состоит в расположении объектов в порядке убывания (возрастания) какого-либо свойства, присущего им. Обычно степень, с которой то или иное свойство присуще объектам, не поддается количественному измерению и оценивается только качественно, а объекты можно сравнить между собой по степени их соответствия данному качеству.

Пусть n элементов, обладающих свойством X, расположены экспертами в порядке возрастания или убывания степени обладания этим свойством. Обозначим через x_i место (ранг) i-го элемента среди остальных $(n-1)$ элементов. Сумма рангов в таком ряду составляет при сравнении в строгих шкалах, т. е. когда нет повторяющихся рангов:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.8}$$

т. к. это есть сумма n членов арифметической прогрессии: $a_1 = 1, \quad a_n = n$.

Это соотношение обычно выполняется, когда число ранжируемых объектов невелико ($n \leq 10$). Если эксперты затрудняются присвоить всем сравниваемым объектам различные ранги, то тогда сравнение будет вестись в нестрогих шкалах, (эксперты будут присваивать нескольким объектам одинаковые ранги). Тогда общее число N рангов будет меньше n. В этом случае полученную ранжировку необходимо привести к так называемому нормальному виду, т. е. к такому виду, при котором условие (5.8) выполняется. Для этого используется процедура развязывания рангов. При ее применении объектам, имеющим одинаковые ранги, приписывается ранг, равный среднему значению мест, которые объекты поделили между собой в ранжировке с совпадающими рангами. Например, пусть имеется следующая ранжировка (x_t) шести объектов (таблица 5.10):

Таблица 5.10 – Начальная ранжировка объектов

Объекты	t	1	2	3	4	5	6
Ранги	x_t	1	2	3	3	2	3

Объекты 2-й и 5-й поделили между собой места второе и третье. Поэтому в новой ранжировке, соответствующей развязанным рангам, этим объектам приписывается, одинаковый ранг, равный (2 + 3)/2 = 2,5. Объекты 3, 4, 6 поделили в ранжировке между собой места 4, 5, 6, поэтому приписываем им ранг, равный (4 + 5 + 6)/3 = 5. Таким образом, новая ранжировка ранги которой уже удовлетворяют соотношению (5.8), имеет вид (таблица 5.11):

Таблица 5.11 – Новая ранжировка объектов

Объекты	t	1	2	3	4	5	6
Ранги	x_t	1	2,5	5	5	2,5	5

5.4.3 Анализ ранжированных данных

В результате использования метода ранжирования получается упорядоченный ряд, элементами которого являются ранги. Будем считать ранги случайными числами и введем для них статистику связи. Показателем связи ранжированных рядов может служить коэффициент ранговой корреляции.

Пусть n объектов ранжированы сначала по степени обладания свойством X, а затем по степени обладания свойством Y. Коэффициент ранговой корреляции оценивает степень связи между этими рядами. Ранжировки представим в виде:

$$X: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$Y: \quad y_1, y_2, \ldots y_n$$

Предположим, что условие (5.8) выполняется. Пусть требуется определить связь между свойствами X и Y для n объектов. Обозначим связь между рангами x_i и x_j через a_{ij}, а связь между y_i u y_j b_{ij} . Для них выполняются соотношения

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0, \quad b_{ij} = -b_{ji}, \quad b_{ii} = 0.$$

Тогда коэффициент корреляции определяется как

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2} \qquad (5.9)$$

Если в формуле (5.9) положить $a_{ij} = x_j - x_i, \quad b_{ij} = y_j - y_i$ и учесть, что ранги x_i и y_j суть числа натурального ряда, то путем несложных преобразований получим коэффициент ранговой корреляции Спирмэна:

$$p = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6S}{n(n^2-1)} \ . \qquad (5.10)$$

В том случае, когда ранжировки содержат совпадающие ранги, выражение для p принимает вид:

$$p = 1 - \frac{\frac{1}{6}(n^3 - n) - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 - T - U}{\left\{\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2T\right\}^{1/2}\left\{\frac{1}{6}(n^3 - n) - 2T\right\}^{1/2}} \quad , \qquad (5.11)$$

где

$$T = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i^2 - 1);$$

$$U = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} u_i(u_i^2 - 1);$$

t_i, u_i – числа повторений i-го ранга в ранжировках по X и $У$ соответственно.

5.4.4 Проверка значимости коэффициента ранговой корреляции

Исследование распределения вероятностей коэффициента ранговой корреляции показывает, что при отсутствии связи в ранжировках распределение величины р стремится к нормальному распределению с дисперсией $\sigma_p^2 = 1/(n-1)$. Поэтому для оценки значимости p можно воспользоваться нормальным законом распределения.

Пример. На предприятии по производству синтетического каучука требовалось установить, существует ли связь между степенью износа сита и производительностью лентоотливочной машины. Для этого были проранжированы степень износа сита (X) и производительность ($У$) для различных (n = 12) моментов времени. Результаты ранжирования представлены в таблице 5.12.

Таблица 5.12 – Ранжировка степени износа сита и производительности

Износ сита x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Производительность y_i	2	3	1	4	6	5	7	10	11	8	12	9
$\lvert x_i - yi \rvert$	1	1	2	0	1	1	0	2	2	2	1	3
$(xi - y_i)^2$	1	1	4	0	1	1	0	4	4	4	1	9

Рассчитав сумму S и коэффициент p, получаем:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 30;$$

$$p = 1 - \frac{6 \cdot 30}{12 \cdot 143} \approx 0{,}895.$$

Для оценки значимости полученного коэффициента воспользуемся таблицей нормального распределения. Для этого вычислим среднеквадратическое отклонение распределения коэффициента p:

$$\sigma_p = (\frac{1}{n-1})^{1/2} \approx 0{,}3.$$

Приняв, например, уровень значимости α = 0,05, определяем $p_{кр}$ = 1,96 – значение аргумента функции Лапласа $\overline{\Phi}(p)$ удовлетворяющее уравнению:

$$\overline{\Phi}(p_{кр}) = \frac{1}{2}(1-\alpha) = \frac{1}{2}p.$$

Так как $p_{кр} < p = p \,/\, \sigma_p = 0{,}895 \,/\, 0{,}3 = 2{,}98$, то гипотеза о том, что $p = 0$ отвергается.

5.4.5 Конкордация

Степень связи между несколькими ранжировками оценивается коэффициентом конкордации (коэффициентом согласия). Коэффициент конкордации определяет согласованность мнений экспертов при ранжировании n объектов по степени обладания некоторым свойством X.

Пусть имеется n объектов 1,2,…i,…,n, в разной степени обладающих свойством X, и пусть m экспертов ранжируют эти объекты по свойству X. В результате ранжировки получится следующая матрица рангов (таблица 5.13):

Таблица 5.13 – Матрица рангов

Эксперты	Объекты					
	1	2	…	i	…	N
1 2 … m	x_1^1 x_1^2 ... x_1^m	x_2^1 x_2^2 ... x_2^m	… … … …	x_j^1 x_j^2 ... x_i^m	… … … …	x_n^1 x_n^2 ... x_n^m
$\sum_{j=1}^{m} x_i^j$	$\sum_j x_1^j$	$\sum_j x_2^j$		$\sum_j x_i^j$		$\sum_j x_n^j$

Средний ранг в последнем ряду таблицы будет равен $\alpha = \frac{m(n+1)}{2}$, так как $(n + 1)/2$ – средний член каждого из рядов, по которым осуществляется суммирование. Сумма квадратов разностей между членами суммарной ранжировки и членами ряда, составленного из средних значений α, равна

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_i^j - m(n+1)/2 \right\}^2 .$$

Величина S достигает максимума, когда все эксперты дают одинаковые ранжировки. Если определить согласованность экспертов как отношение реальной суммы квадратов разностей S к максимально возможной сумме $S_{\max}$, то получается выражение для коэффициента конкордации, предложенное Кендаллом:

$$W = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}.$$

Величина W изменяется от 0 до 1. $W = 1$ означает, что все эксперты дали одинаковые ранжировки; $W= 0$ означает, что связь между ранжировками, данными экспертами, отсутствует. Если в ранжировках присутствуют совпадающие ранги, то формула для W принимает вид:

$$W = \frac{S}{m^2(n^3 - n)/12 - m\sum_{j=1}^{m} T_j},$$

где $T_j = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(t_{ij}^3 - t_{ij})$, t_{ij} – число повторений t-го ранга в j-ом ряду.

Для оценки значимости коэффициента конкордации используется χ^2 -распределение с числом степеней свободы $\varphi = n - 1$, которому подчинена величина $m(n - 1)W$. При $n < 10$ распределение величины $m(n - 1)W$ отличается от χ^2 -распределения и для оценки значимости приходится пользоваться специальными таблицами. При $\varphi = n - 1 > 3\sigma$ может быть использовано нормальное распределение.

5.4.6 Пример использования экспертных оценок

После некоторого усовершенствования технологии производства встал вопрос определения тех или иных факторов, которые оказывают существенное влияние на ход технологического процесса. Был проведен опрос специалистов, работающих с данным оборудованием или, в крайнем случае, хотя бы знакомых с данной технологией. Восемнадцати экспертам необходимо было проранжировать одиннадцать факторов по степени их влияния на ход технологического процесса. В результате была получена следующая матрица ранжированных данных (таблица 5.14).

Таблица 5.14 – Матрица ранжированных данных

Номер эксперта	Номер фактора											T_{ij}
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	2	2	2	3	3	4	1	1	2	4	3+4+2+2
2	1	8	3	6	11	10	7	2	9	5	4	0
3	1	4	7	8	6	10	11	3	5	1	9	0
4	3	8	1	4	8	8	5	8	6	2	7	4
5	7	9	1	5	6	6	2	8	3	1	4	2+2
6	1	1	3	2	2	3	4	1	2	1	4	4+3+2+2
7	1	1	2	2	2	3	4	1	2	2	4	0
8	1	2	3	3	3	3	4	2	3	4	4	0
9	1	3	4	3	4	4	4	2	4	1	2	0
10	1	4	4	2	4	4	4	3	3	5	6	0
11	2	5	5	6	7	7	7	3	4	1	8	0
12	2	1	4	3	2	6	1	1	3	1	3	0
13	3	2	5	4	5	6	2	1	3	3	4	0
14	3	2	4	2	6	7	5	1	4	1	8	0
15	2	1	9	5	7	8	10	3	4	6	2	0
16	1	5	3	5	6	6	6	2	4	1	5	0
17	1	4	10	9	7	8	6	2	5	3	11	0
18	4	4	2	3	5	5	5	1	3	5	6	0

Поскольку строки данной матрицы содержат совпадающие ранги, то необходимо провести процедуру развязывания рангов. После этого по новой матрице, имеющей нормальную форму (из-за громоздкости не будем ее приводить), определяются суммы ее столбцов: 51,5; 88,5; 111; 105,5; 141,5; 160; 140; 57; 97,5; 75; 160,5. На основе полученных данных определяется коэффициент конкордации:

$$W = \frac{14066{,}5}{18^2 \cdot 11 \cdot 120/12 - 18 \cdot 1194/12} = 0{,}415$$

и величина

$$\chi^2 = m(n-1)W = 18 \cdot 10 \cdot 0{,}415 = 74{,}5.$$

Задавшись уровнем значимости $a = 0{,}01$ при числе степеней свободы $\varphi = n - 1 = 10$ по таблице χ^2- распределения находим

$$\chi^2_{кр} = 23{,}2.$$

Поскольку $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то гипотеза о согласованности мнений всей группы экспертов принимается. Степень согласованности оценивается коэффициентом W = 0,415.

Тема 6
Использование методов кооперативного принятия решения в теории благосостояния

6.1 Введение

Положение математики среди всех прочих наук особое. Она возникла и долго развивалась как фундаментальный язык естественных наук, в основном физики и инженерного дела. Однако гуманитарные науки все больше и больше нуждаются в формализованном языке, причем не столько для овеществления своих идей, сколько для анализа *очень непростой логики взаимодействия людей.*

Система распределения затрат и благ должна разрешить так или иначе основную конфликтную ситуацию, связанную с тем, что, вообще говоря, каждый стремится сделать вклад поменьше, получив при этом наибольшее вознаграждение. Конфликт интересов порождает столкновение людей.

Можно говорить о трех основных способах описания этого столкновения:

1 По аналогии с физикой можно представить людей «элементарными частицами», которые взаимодействуют по несколько более сложным законам, чем молекулы идеального газа. Для описания движения толпы в метро, потока машин на улице, изменения линии фронта при боевых действиях такого подхода может оказаться вполне достаточно.

2 По аналогии с биологией можно говорить об эволюции поведения. Стереотипы поведения передаются от одной особи к другой путем наследования, воспитания, подражания. Таким способом могут быть описаны весьма важные механизмы саморегуляции общества, в частности саморегуляция экономики через механизмы рыночной конкуренции.

3 Третий способ описания взаимодействия людей учитывает присущие лишь им взаимодействия: соглашение, договор, компромисс. В самом деле, не могут же сговориться между собой молекулы газа или прийти к компромиссу кролики и удавы. Именно описанием подобных, свойственных человеческому сообществу, взаимодействий и служит такая сравнительно недавно возникшая наука как кооперативное принятие решений. Значительные успехи в теории и приложениях кооперативного принятия решений были достигнуты применительно к теории благосостояния.

Система распределения благ и затрат опирается на представления о справедливости. Если большинство членов сообщества (граждан страны, сотрудников фирмы и т. п.) не признают справедливости существующих принципов распределения, то либо оно развалится, либо будет тратить все больше и больше ресурсов на систему подавления и наказания (вспомним вооруженные стихийные бунты обманутых вкладчиков финансовых пирамид в Албании в феврале – марте 1997 г.). Принципов справедливости достаточно много. Они могут дополнять друг друга, но могут быть и несовместными. Математика позволяет превратить этический постулат в математическую аксиому, говорить о полноте и непротиворечивости системы принципов справедливости, она способствует ограничению возможностей манипулирования общественным мнением.

Два главных принципа коллективного сравнения – равенство и эффективность. Для того, чтобы принцип равенства не приводил к парадоксам (всеобщая нищета – вершина социальной справедливости, если главное – достижение всеобщего равенства), его разумнее формулировать в следующем виде: мнение беднейших слоев учитывается в первую очередь. Умеренный эгалитаризм есть стремление к равенству за счет подтягивания благосостояния бедных, но не за счет уничтожения благосостояния богатых (радикальный (крайний) эгалитаризм). Приверженец разумного эгалитарного подхода всегда поддержит перераспределение от богатого к бедному, если только богатый не становится при этом беднее бедного, но не будет возражать против социальной дифференциации при увеличении благосостояния всех членов общества.

Эгалитаризму противостоит утилитаризм, который при сравнении вариантов опирается на общее (суммарное) благосостояние сообщества. Утилитарист считает, что перераспределение благ – дело второстепенное, а крайние утилитаристы вообще не придают ему сколько-нибудь значимой роли. Какой из этих двух принципов «справедливее», зависит от конкретной ситуации. Дело математики прояснить свойства и следствия принципов, привести модельные примеры, показывающие, что каждый из них может быть в зависимости от ситуации и разумным и абсурдным.

Какие вообще существуют способы коллективного сравнения альтернатив? Для этого вводится понятие порядка коллективного благосостояния (ПКБ), а оценкой коллективного благосостояния служит функция коллективной полезности (ФКП). Вместо двух принципов (равенство, эффективность) необходимо рассматривать всю совокупность возможных принципов коллективного сравнения, выбирая те из них, которые удовлетворяют определенным свойствам. Следует отметить, что каждое требование справедливости резко сужает круг «эффективных» ПКБ и ФКП. Основой для поиска компромисса может служить, например, принцип Пигу-Дальтона, как компромиссный между эгалитаризмом и утилитаризмом. Принципом Пигу-Дальтона поощряется сближение уровней благосостояния участников при сохранении суммарного богатства. Про ПКБ, удовлетворяющие принципу Пигу-Дальтона, говорят, что они сокращают неравенство. Каждый такой порядок порождает так называемый индекс неравенства. Эти индексы широко используются в экономической статистике для анализа дифференциации благосостояния.

Коллективное сравнение альтернатив часто используется для выбора наилучшего (для сообщества в целом) варианта из фиксированного допустимого множества. Такие правила выбора называются функциями коллективного выбора (ФКВ). Оказывается, что ПКБ соответствуют только те ФКВ, которые удовлетворяют аксиоме Нэша о независимости от посторонних альтернатив: коллективный выбор должен сохраняться при отбрасывании любых вариантов, кроме избранного из первоначального допустимого множества.

Аксиома Нэша не так бесспорна, как может показаться. Выбор допустимого варианта часто производится на основе сравнения с идеальным выбором для каждого агента. Такой принцип называется относительным эгалитаризмом, поскольку он требует выравнивания не самих доходов агентов, а их отношений к максимально возможным доходам (выравнивание процента потерь).

Весьма важны аксиомы монотонности по допустимому множеству и составу участников. Первая аксиома утверждает, что при расширении допустимого множества благосостояние каждого агента должно только увеличиваться, или, иными словами, научно-технический прогресс не должен повредить никому из участников. В противном случае кто-то из агентов кооперации будет противиться нововведениям. Вторая аксиома монотонности по составу участников звучит очень естественно – если появляется новый участник, а возможности сообщества остаются прежними, то старые члены коллектива несут убытки. Аксиомы монотонности в сочетании с некоторыми аксиомами независимости приводят к той или иной разновидности эгалитаризма.

Интерпретация теоретических положений в терминах микроэкономических моделей – органичная часть современных исследований. Остановимся чуть подробнее на понятии регулируемой монополии. Оно возникло из желания уравновесить две противоположные тенденции. С одной стороны, если технология производства обладает свойством возрастания доходов на масштаб (чем больше размеры производства, тем больший доход приносит каждая единица капитала), то технологически выгодно слияние мелких производств в одно крупное и, в конечном счете, появление монополии. Но по мере монополизации отрасли перестает работать механизм конкуренции. Если сохранить за монополией право свободно назначать цены, то она «разденет» потребителей. В данной ситуации необходимо либо искусственно сдерживать монополизацию, либо отдать отрасль на откуп монополии, но отобрать у нее право ценообразования. Так появляется регулируемая монополия. Несмотря на то, что государство при этом не вмешивается в технологические проблемы и планирование производства, однако в его руках находится система ценообразования.

6.2 Эгалитаризм и утилитаризм

6.2.1 Эгалитаризм

«Стремление людей к равенству является страстным, ненасытным, вечным, непобедимым», – писал Л. Токвиль в 1860 году. Равное распределение дохода от кооперации есть простой и фундаментальный принцип справедливости. В моделях теории благосостояния он означает уравнивание индивидуальных полезностей. В дальнейшем будем обозначать вектор индивидуальных полезностей политики и для членов кооперации через $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где n – число членов кооперации.

Следующий важный принцип – это принцип единогласия: если для всех агентов решение x лучше решения y, то решение y не должно быть принято. Данный принцип называется также принципом оптимальности по Парето. Оптимальным по Парето решением является такое решение x, что для любого другого решения z, если кто-то (хотя бы один агент) считает, что z лучше x, то кто-то другой считает, что x лучше z. Оптимальное по Парето решение называется также эффективным. Здесь также, как и в дальнейшем, мы видим тесную аналогию с уже рассматривавшимися вопросами принятия решений в условиях неопределенности и многокритериального выбора. Принцип единогласия является самым главным принципом экономики благосостояния. Благосостояние будет растрачиваться попусту, если будут приниматься плохие по Парето решения.

Очень важным фактом является то, что, к сожалению, в большинстве случаев принципы единогласия и равенства оказываются несовместными, при этом возникает дилемма равенство – эффективность.

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий суть проблемы.

Пример 1. Размещение объекта. Два города одинакового размера и статуса выбирают место расположения совместного предприятия сферы обслуживания, финансируемого экзогенно. Города A и B соединены двумя дорогами. Протяженность длинной дороги – 6 км, а короткой – 3 км. Обозначим через C точку, находящуюся на короткой дороге на расстоянии 1 км от города A (рисунок 6.1).

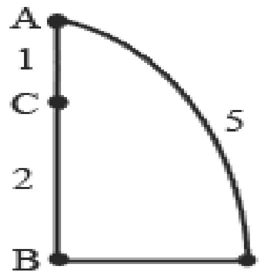

Рисунок 6.1 – Схема размещения городов

Дорога на участке СВ проходит в горах, что не позволяет построить там указанное предприятие. Таким образом, приходится выбирать место расположения предприятия либо на длинной дороге, либо между А и С на короткой. Муниципалитету каждого города хочется, чтобы предприятие было расположено поближе к его городу, поэтому полезности городов – агентов кооперации будем измерять расстоянием до предприятия со знаком минус. То есть, если расположить предприятие, например, в пункте С, то $(u_1, u_2) = (-1,-2)$. Поскольку агентов кооперации два, то множество допустимых векторов полезностей удобно представить графически (рисунок 6.2).

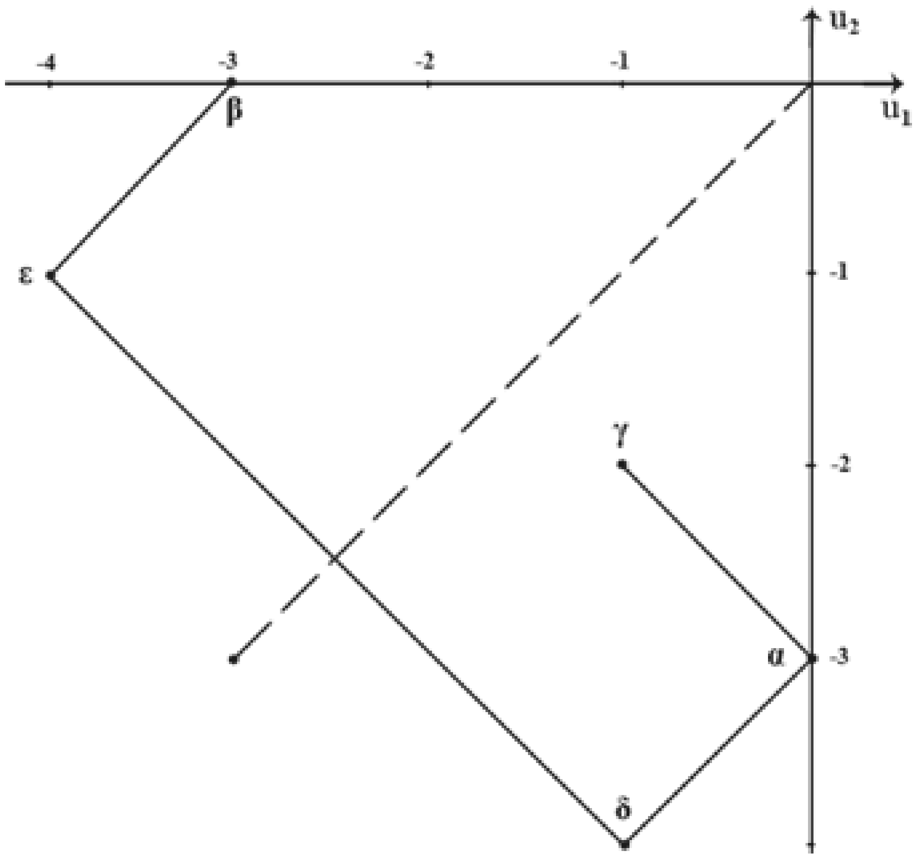

Рисунок 6.2 – Множество допустимых векторов полезности

Отрезок [β,ε] соответствует расположению предприятия на длинной дороге на расстоянии не более 1км от города В. Отрезок [ε,σ] соответствует размещению на длинной дороге на расстоянии не менее 1 км от обоих городов. Отрезок [σ,α] соответствует расположению предприятия на длинной дороге на расстоянии не более 1 км от города А. И, наконец, отрезок [α,γ] соответствует расположению предприятия на короткой дороге между А и С. Оптимальным по Парето является размещение предприятия в городе В или на короткой дороге между пунктами А и С.

Равенство же полезностей достигается лишь в одной точке на полпути от А и от В по длинной дороге: u = (–2,5; –2,5). Но данный вектор полезностей номинируется по Парето вектором (–1; –2), соответствующим расположению предприятия в С. Таким образом, возникает дилемма: можно выбрать размещение либо оптимальным по Парето, либо выравнивающим полезности, но одновременного выполнения этих условий добиться невозможно. Подобная дилемма может возникнуть и в случае выпуклости множества допустимых векторов полезностей.

Даже столь простой пример показывает не только иллюзорность, но и опасность воплощения идей всеобщего равенства, не учитывающих экономической эффективности принимаемых решений. Разрешить возникшую дилемму можно следующим образом: сузить множество допустимых решений до множества эффективных по Парето и только среди них выбирать наиболее эгалитарное (уравнительное) решение. Хотя эффективными будут все решения, которым соответствуют точки отрезка $\alpha\gamma$ и точка β допустимого множества (рисунок 6.2), однако наилучшим будет решение по размещению предприятия в пункте С, поскольку при максимальном суммарном благосостоянии кооперации это будет способствовать минимизации разности между уровнями полезностей городов $|u_1 - u_2|$. Даже более того, в точке С уровень полезности наименее удачливого агента кооперации является наибольшим среди всех возможных векторов полезностей.

В приведенном примере два подхода выделили один и тот же исход С, однако так бывает не всегда. Действительно, предположим, что множество достижимости содержит только два вектора: u = (1; 2) и $u^{|}$ = (4; 1,5). Оба являются эффективными, но вектор u минимизирует $|u_1 - u_2|$, а вектор $u^{|}$ максимизирует $\min\ u_1, u_2$. Если настаивать на симметричности игроков (т. е. считать выполненным принцип анонимности), то более предпочтительным следует признать $u^{|}$. Действительно, из принципа анонимности следует, что векторы u = (1; 2) и $u^{|}$ = (2; 1) для нас социально равнозначны, однако последний доминируется по Парето вектором $u^{|}$.

Максимизация функции коллективной полезности

$$W_e(u_1, u_2, ..., u_n) = \min_{1 \le i \le n}\{u_i\}$$

была предложена по аналогии с принципом максимина (вспомним критерий) философом Джоном Ролсом. Приняв уровень полезности наименее удачливого агента за индекс коллективной полезности, мы можем выполнить эгалитарную программу, не нарушив принципа анонимности (данный уровень полезности гарантирован каждому члену кооперации).

Корректная формулировка принципа эгалитарности не сводится к максимизации эгалитарной функции W_e , которая совпадает с уровнем полезности наименее удачливого агента. Если этот уровень достиг своего максимума, то можно использовать дополнительные возможности так, чтобы к оставшимся агентам применить принцип эгалитарности. Приведем иллюстрирующий пример.

Пример 2. Размещение объекта на кольцевой дороге. Пусть перед муниципалитетами пяти городов A, B, C, D и E, которые соединены кольцевой дорогой, встал вопрос выбора места размещения совместного предприятия (рисунок 6.3).

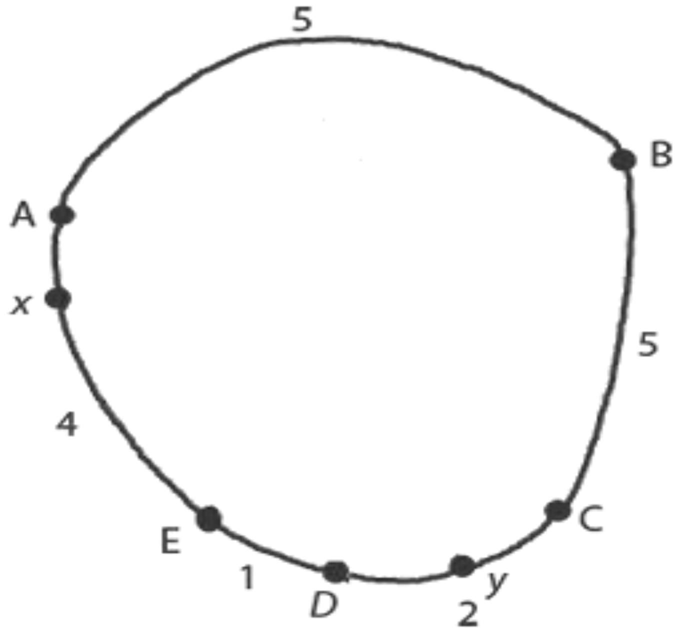

Рисунок 6.3 – Размещение объекта на кольцевой дороге

Полезность вновь будем измерять расстоянием до предприятия со знаком минус. Предприятие можно расположить в любом месте на кольцевой дороге. Максиминная задача для данного примера имеет два решения, а именно: x – на расстоянии 1 км от A на дороге AE и y – на полпути между C и D. Действительно, соответствующие векторы полезностей имеют вид:

$$u(x) = (-1;-6;-6;-4;-3), \quad u(y) = (-6;-6;-1;-1;-2)$$

тогда $W_e(x) = W_e(y) = -6$. Легко проверить, что для любого другого расположения z выполняется неравенство: $W_e(z) < -6$.

Сравним x и y с позиции эгалитаризма. В обоих случаях имеется два города с полезностью – 6; следующий из наименее удачливых агентов в случае x (город D) получает – 4, а соответствующий агент в случае y (город E) получает – 2. Поэтому при сравнении x и y мы выбираем, придерживаясь принципа эгалитаризма, расположение y. Отметим, что y не доминирует x по Парето, но после упорядочения полезностей, например, по возрастанию получаем: $y^* = (-6; -6; -2; -1; -1)$ доминирует по Парето $x^* = (-6; -6; -4; -3; -1)$.

Приведенное упорядочение векторов полезностей называется *лексиминным упорядочением*. Лексиминное упорядочение коллективного благосостояния задает полный порядок на множестве векторов полезностей из $\boldsymbol{R}^n$. Оно уточняет эгалитарную функцию коллективной полезности W_e, когда имеется несколько допустимых векторов с одинаковым значением этой функции.

Определение. Векторы u *и* v *являются эквивалентными в смысле лексиминного порядка, если выполнено равенство* $u^* = v^*$. *Будем говорить, что вектор* u *предпочтительнее* v, *если существует целое число* $k = 0,1,...,n - 1$, *для которого выполнены условия*

$$u_i^* = v_i^*,\quad u_{k+1}^* > v_{k+1}^*,\quad i = \overline{1,k}.$$

В частности, если $W_e(u) > W_e(v)$ (т. е. $u_1^* > v_1^*$), то вектор u лексикографически предпочтительнее v.

Лексиминное упорядочение проводится следующим образом: сначала сравниваются полезности «наиболее бедных» агентов в обоих распределениях благосостояния, если они совпадают, то сравниваются полезности «следующих по бедности» агентов и т. д. Приводимые ниже утверждения показывают, что лексиминный порядок обладает более привлекательными свойствами, чем эгалитарная функция коллективной полезности W_e.

Введем следующие обозначения: для любых двух векторов из $\boldsymbol{R}^n$ обозначим: $u \geq v$, если $u_i \geq v_i$ при $i = \overline{1,n}$,

$u > v$, если $u_i \geq v_i$, $u \neq v$, при $i = \overline{1,n}$,

$u >> v$, если $u_i > v_i$ при $i = \overline{1,n}$.

Обозначим через S множество допустимых векторов полезностей. Это множество является замкнутым подмножеством $\boldsymbol{R}^n$, причем оно ограничено сверху (существует такой вектор $\bar{x}$, что $\bar{x} \geq u$ для всех $u \in S$). Будем говорить, что вектор u оптимален по Парето на S, если для всех векторов v выполнено: из того, что $v > u$, следует, что $v \notin S$. Будем говорить, что вектор u слабо оптимален по Парето на S, если для всех векторов v из того, что $v >> u$, следует, что $v \notin S$. Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема: Рассмотрим эгалитарную функцию коллективной полезности

$$W_e(u_1, u_2, ..., u_n) = \min_{1 \leq i \leq n}\{u_i\}$$

а) Обозначим через S_0 множество решений задачи максимизации $W_e(u)$. Множество $W_e(u)$ непусто, и любой элемент множества S_0 слабо оптимален по Парето в S. Более того, множество S_0 содержит по крайней мере один оптимум Парето.

Предположим, что множество S содержит оптимальный по Парето вектор u^0 (соответственно, слабо оптимальный по Парето вектор u_0), такой, что $u_i^0 = u_j^0$ для всех ($i, j = \overline{1, n}$ (соответственно $(u_0)_i$ = $(u_0)_j$, для всех $i, j = \overline{1, n}$). Тогда $S_o = \{u^\circ\}$ (S_0 содержит u_0).

б) Рассмотрим лексиминный порядок коллективного благосостояния и обозначим через S_Θ множество максимальных по этому порядку элементов множества S. Тогда множество S_Θ непусто и каждый элемент из S_Θ оптимален по Парето в S. Пусть u и v принадлежат S_Θ, тогда $u^* = v^*$, откуда следует конечность множества S_Θ. Более того, если множество S выпукло, то S_Θ состоит из одного элемента.

Отметим, что S_Θ является подмножеством S_0 и содержит только оптимальные по Парето элементы (не содержит слабо оптимальных).

6.2.2 Классический утилитаризм

Кооперация – хрупкое предприятие. Она уязвима, по крайней мере, в двух направлениях.

Во-первых, каждый агент должен осознавать, что в отношении него поступают справедливо, т. е. что он получает справедливую долю кооперативной прибыли. Это гарантирует консенсус (согласие) кооперирующих агентов. Будем понимать под внутренней устойчивостью то, что положительно влияет на прочность консенсуса.

Во-вторых, угроза устойчивости кооперации – низкие доходы. Если прибыль от кооперации по сравнению с ситуацией без кооперации слишком мала, то вряд ли кто-то сочтет кооперацию разумной (зачем связывать себя какими-либо обязательствами по кооперации, если можно достичь почти того же, не лишаясь независимости?). Будем называть внешней устойчивостью то, что является следствием достаточно высоких доходов от кооперации.

Очевидно, что эгалитарная программа призвана обеспечить внутреннюю устойчивость кооперации: кто может чувствовать себя эксплуатируемым, если прибыль поровну делится между равными агентами? Однако, при этом подходе, не обращается внимание на внешнюю устойчивость: ультра-эгалитарист готов пойти на уменьшение доли каждого агента кооперации ради обеспечения их равенства, но это приведет к внешней неустойчивости. Классический утилитарист идет в противоположном направлении: он максимизирует суммарный доход от кооперации, гарантируя тем самым внешнюю устойчивость, но полностью игнорирует внутреннюю устойчивость. Поясним вышесказанное на примерах.

Пример 3. Размещение объекта в городе. Предположим, что крупный объект совместного пользования жителей требуется разместить в некотором городе. Пусть город вытянут в линию, скажем, это отрезок [0,1]. Плотность населения описывается непрерывной функцией $f(x)$, $0 \le x \le 1$. Таким образом, все население города составляет

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Пусть полезность агента (жителя города), постоянно проживающего в точке x, равно расстоянию от точки x до объекта со знаком минус.

Эгалитарный посредник, используя функцию коллективной полезности (ФКП) W_e, бесспорно, порекомендует разместить объект в точке 1/2 (предполагая, что плотность на обоих концах города положительна). Это гарантирует для каждого агента расстояние до объекта не более чем 1/2.

Утилитарный посредник, в свою очередь, выберет размещение объекта в точке a из решения следующей задачи:

$$\min_{0\le a\le 1}\int_0^1 |x-a|\, f(x)dx.$$

Решение этой задачи есть медиана a^* функции $f(x)$, т. е. половина населения города живет левее a^*, а половина - правее:

$$\int_0^{a^*} f(x)dx = \int_{a^*}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

Чтобы показать это, вычислим:

$$I(a) = \int_0^1 |x-a|\, f(x)dx = \int_0^a (a-x)\, f(x)dx + \int_a^1 (x-a)\, f(x)dx =$$

$$= a\int_0^a f(x)dx - a\int_a^1 f(x)dx - \int_0^a xf(x)dx + \int_a^1 xf(x)dx =$$

$$= -a\int_0^1 f(x)dx + 2a\int_0^a f(x)dx - 2\int_0^a xf(x)dx + \int_0^1 xf(x)dx\ .$$

Поскольку решается задача на экстремум, то, используем формулу:

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx + b'(y)\, f(b(y), y) - a'(y)\, f(a(y), y)\,.$$

Тогда

$$I'(a) = \left(2a\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^a xf(x)dx + \int_0^1 xf(x)dx\right)' =$$

$$= 2\int_0^a f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx.$$

Приравнивая $I'(a)$ к нулю, из последнего соотношения находим, что

$$\int_0^{a^*} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx,$$

т. е. a^* - медиана функции $f(x)$. Так как при $a < a^*$ $I'(a) < 0$, при $a > a^*$ $I'(a) > 0$, то a^* – точка минимума $I(a)$.

В рассмотренном примере эгалитарное решение совершенно не зависит от плотности населения, если только какие-то из агентов живут в разных концах города (точки 0 и 1). Утилитарное решение, напротив, существенно зависит от данной плотности: если плотность населения смещена, например, влево, то и медиана тоже. Какое решение является более привлекательным, зависит от контекста. Утилитарный выбор, минимизируя транспортные затраты, является вполне убедительным, если объект, например, театр: если 90 % населения сконцентрировано на отрезке [3/4; 1], то агенты из отрезка [0;1/4] будут нести большие транспортные затраты, но это является справедливой ценой за максимизацию общего благосостояния. Но, с другой стороны, если объект есть пункт скорой медицинской помощи (реанимация), то размещение в точке 1/2 становится более предпочтительным, поскольку оно минимизирует наибольший риск, связанный с возможностью летального исхода.

Классическая утилитарная функция полезности определяется следующим образом:

$$W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Утилитарная программа состоит в максимизации функции на множестве допустимых векторов полезностей. Она согласуется, также как и эгалитарная программа, с принципом единогласия: любой вектор полезностей, максимизирующий W_* на допустимом множестве будет оптимальным по Парето.

Как мы уже видели, нет каких-либо раз и навсегда данных рекомендаций по применению того или иного подхода в любой ситуации. Только анализ ситуации и разумное сочетание эгалитарного и утилитарного подходов приводит к принятию компромиссного решения, способствующего как внутренней, так и внешней устойчивости кооперации. Рассмотрим еще один пример.

Пример 4. Наказание производительности. Два агента преобразуют труд в кукурузу по технологии с постоянными доходами на масштаб. Агент 2 вдвое более производителен, чем агент 1. Начальные запасы каждого агента соответствуют 10 часам рабочего времени, а кукурузы у них нет.

Их функции полезности совпадают и равны

$$u_i(x, y) = y_i^{1/3}(10 - x_i)^{1/3} \quad , \quad i = 1,2,$$

где x_i – затраты труда 1-го агента в часах, y_i – полученная кукуруза в бушелях.

Утилитарная программа выделяет для этой экономики вполне определенный исход

$$\max\ y_1^{1/3}(10 - x_1)^{1/3} + y_2^{1/3}(10 - x_2)^{1/3}$$

Поскольку эта задача является задачей выпуклого программирования, то мы просто решаем систему уравнений, соответствующую условиям первого порядка:

$$\frac{1}{3}\frac{y_1^{1/3}}{(10-x_1)^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{(10-x_1)^{1/3}}{y_1^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{y_2^{1/3}}{2(10-x_2)^{2/3}} = \frac{1}{3}\frac{(10-x_2)^{1/3}}{y_2^{2/3}}.$$

Отсюда $y_1=(10 - x_1)$; $y_2=4(10 - x_2)$ и, подставляя снова в полученные условия первого порядка, имеем $(10 - x_1) = 4(10 - x_2)$, $y_1 = 2y_2$. Таким образом, более производительный агент 2 наделяется в 4 раза меньшим свободным временем и получает вдвое меньше кукурузы, чем агент 1. В данном примере использование чисто утилитарного подхода является крайне несправедливым, поскольку тогда более производительный агент будет вынужден скрывать свои таланты.

Итак, только при учете соизмеримости доходов и возможности обмена полезностями между агентами утилитаризм является жизненным и осмысленным экономическим и политическим принципом. В подавлявшем большинстве социальных ситуаций необходимо рассматривать интересы агентов кооперации именно таким образом.

Литература

1 Бешелев, С. Д. Математико-статистические методы экспертных оценок: учебное пособие / С. Д. Бешелев, Ф. Г. Гурвич. – М. : Статистика, 1980. –263 с.

2 Вилкас, Э. И. Оптимальность в играх и решениях: учебное пособие / Э. И. Вилкас. – М. : Наука, 1990. –256 с.

3 Евланов, Л. Г. Экспертные оценки в управлении: учебное пособие / Л. Г. Евланов, В. А. Кутузов. – М.: Наука, 1978. –175 с.

4 Кемени, Дж. Кибернетическое моделирование: учебное пособие / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М. : Сов. радио, 1972. –192 с.

5 Кендалл, М. Ранговые корреляции: учебное пособие / М. Кендалл. – М. : Статистика, 1975. –216 с.

6 Кини, Р. Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: учебное пособие / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. –560 с.

7 Ларичев, О. И. Наука и искусство принятия решений: учебное пособие / О. И. Ларичев. – М. : Наука, 1979. –200 с.

8 Литвак, Б. Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа: учебное пособие / Б. Г. Литвак.– М. : Наука, 1982. –164 с.

9 Теория выбора и принятия решений: учебное пособие / И. М. Макаров [и др.]. – М. : Наука, 1982. –327 с.

10 Миркин, Б. Г. Проблема группового выбора: учебное пособие / Б. Г. Миркин. – М. : Наука, 1974. –256 с.

11 Мулен, Э. Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели: учебное пособие / Э. Мулен. – М. : Мир, 1991. –464 с.

12 Мушик, Э. Методы принятия технических решений: учебное пособие / Э. Мушик, П. Мюллер. – М. : Мир, 1990. –208 с.

13 Подиновский, В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям: учебное пособие / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. – М. : Сов. радио, 1975. –192 с.

14 Саати, Т. Л. Аналитическое планирование. Организация систем : учебное пособие / Т. Л. Саати, К. Кернс. – М. : Радио и связь, 1991. –224 с.

15 Салуквадзе, М. Е. Методы векторной оптимизации: учебное пособие / М. Е. Салуквадзе. – Тбилиси, 1976. –167 с.

16 Соболь, И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учебное пособие / И. М. Соболь, Б. Б. Статников. – М. : Наука, 1981. –186 с.

17 Юдин, Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений: учебное пособие / Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1989. –320 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Жогаль Сергей Петрович
Каморникова Татьяна Якимовна

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ И ЭКСПЕРТНОГО ВЫБОРА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ по спецкурсу

для студентов специальности 1-31 03 01 02 «Математика» (научно-производственная деятельность) специализации 1-31 03 01 02 15 «Математическая информатика»

В авторской редакции

Подписано в печать 20.03. 2009 (31). Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 4,6.Уч.- изд. л.3,6. Тираж 25 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104