РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Е.М. Овсиюк[1], Я.А. Войнова[2], В.М. Редьков[3]

[1]УО «Мозырский государственный педагогический университет
имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь
[2]ГУО «Кочищанская средняя школа Ельского района»,
Ельский район, Беларусь
[3]ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,
Минск, Беларусь

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 0 В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. I

Исследуем дифференциальное уравнение, возникающее при изучении квантовой механики скалярной релятивистской частицы в однородном электрическом поле:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + (\varepsilon + eEz)^2 - \mu^2 \right) \Phi(z) = 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) перейдем к новой переменной (полагаем $eE > 0$):

$$Z = i\frac{(\varepsilon + eEz)^2}{eE} = iZ_0, \quad Z_0 > 0,$$

тогда (1) примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{1/2}{Z}\frac{d}{dZ} - \frac{1}{4} + \frac{i\sigma}{Z} \right)\Phi(Z) = 0, \quad \sigma = \frac{\mu^2}{4eE}.$$

Это уравнение с двумя особыми точками. Точка $Z = 0$ – регулярная, поведение решений около нее описывается функциями: $Z \to 0,\ \Phi(Z) = Z^A,\ A = 0,\ 1/2$. В точке $Z = \infty$ имеем нерегулярную особенность ранга 2. Действительно, в переменной $y = Z^{-1}$ уравнение запишется так:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{3/2}{y}\frac{d}{dy} - \frac{1}{4y^4} + \frac{i\sigma}{y^3} \right)\Phi = 0.$$

Асимптотики решений при $y \to 0$ должны иметь вид:

$$y \to 0, \quad \Phi = y^C e^{D/y}, \quad D_1 = +\frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{4} + i\sigma; \quad D_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{4} - i\sigma,$$

т. е. на бесконечности возможны два поведения решений:

$$Z \to \infty, \qquad \Phi = Z^{-C}e^{DZ} = \begin{cases} Z^{-C_1}e^{D_1 Z} = Z^{-1/4-i\sigma}e^{+Z/2} \\ Z^{-C_2}e^{D_2 Z} = Z^{-1/4+i\sigma}e^{-Z/2} \end{cases},$$

используем главную ветвь логарифмической функции.

Обратимся к построению решений во всей области переменной. Вводя подстановку $\Phi(Z) = e^{-Z/2}\ f(Z)$, получаем гипергеометрическое уравнение

$$\left(Z\frac{d^2}{dZ^2} + (2A + 1/2 - Z)\frac{d}{dy} - (A + 1/4 - i\sigma) \right) f(Z) = 0,$$

$$a = 1/4 - i\sigma, \quad c = +1/2, \quad \Phi(Z) = e^{-Z/2}\ f(Z).$$

Введем сначала следующие два независимых решения

$$Y_1(Z) = F(a, c; Z) = e^Z F(c - a, c; -Z),$$

$$Y_2(Z) = Z^{1-c}F(a - c + 1, 2 - c; Z) = Z^{1-c}e^Z F(1 - a, 2 - c; -Z).$$

Эти решения дают две соответствующие функции Φ:

$$\Phi_1 = e^{-Z/2}F(a, c; Z) = e^{+Z/2}F(c - a, c; -Z),$$

$$\Phi_2 = e^{-Z/2}Z^{1-c}F(a - c + 1, 2 - c; Z) = Z^{1-c}e^{+Z/2}F(1 - a, 2 - c; -Z).$$

Учитывая тождества:

$$c - a = a^*, \quad Z^* = -Z, \quad a - c + 1 = (1 - a)^*,$$

заключаем, что первое решение $\Phi_1(Z)$ задается вещественной функцией, второе решение $\Phi_2(Z)$ обладает определенной симметрией:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\Phi_1(Z) = +[\Phi_1(Z)]^*, \qquad \Phi_2(Z) = i[\Phi_2(Z)]^* .$$

Отмеченное свойство функции $\Phi_2(Z)$ можно представить как свойство вещественности, если использовать другую нормировку:

$$\bar{\Phi}_2(Z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\Phi_2(Z) = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\Phi_2(Z)\right)^* = (\bar{\Phi}_2(Z))^* . \qquad (2)$$

Для больших $Z = iZ_0$, $Z_0 \to +\infty$ можно воспользоваться асимптотической формулой [1, с. 266]

$$F(a,c,Z) = \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-Z)^{-a} + \ldots\right) + \left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^Z Z^{a-c} + \ldots\right).$$

Дальше, учитывая соотношения

$$(-Z)^{-a} = (-iZ_0)^{-1/4+i\sigma} = \left(e^{\ln Z_0 - i\pi/2}\right)^{-1/4+i\sigma} = e^{-(-1/4+i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0} ,$$

$$Z^{a-c} = (iZ_0)^{-1/4-i\sigma} = \left(e^{\ln Z_0 + i\pi/2}\right)^{-1/4-i\sigma} = e^{+(-1/4-i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0} ,$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4+i\sigma)}, \qquad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\sigma)},$$

устанавливаем, что на бесконечности решение ведет себя так:

$$Y_1(Z) = \left\{\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4+i\sigma)}\ e^{-(-1/4+i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\sigma)} e^{+(-1/4-i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0} e^{+iZ_0/2}\right\}.$$

Отсюда после перехода к функции $\Phi_1(Z)$ находим

$$\Phi_1(Z) = \left\{\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4+i\sigma)}\ e^{-(-1/4+i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\sigma)} e^{+(-1/4-i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0} e^{+iZ_0/2}\right\}; \qquad (3)$$

решение ведет себя как сумма двух комплексно сопряженных слагаемых. Аналогично, используя общую асимптотическую формулу [1, с. 266]

$$F(a-c+1, 2-c, Z) = \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}(-Z)^{-a+c-1} + \ldots\right) + \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}e^Z Z^{a-1} + \ldots\right)$$

и учитывая равенства

$$(-Z)^{-a+c-1} = (-iZ_0)^{-3/4+i\sigma} = \left(e^{\ln Z_0 - i\pi/2}\right)^{-3/4+i\sigma} = e^{-(-3/4+i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-3/4+i\sigma)\ln Z_0} ,$$

$$Z^{a-1} = (iZ_0)^{-3/4-i\sigma} = \left(e^{\ln Z_0 + i\pi/2}\right)^{-3/4-i\sigma} = e^{+(-3/4-i\sigma)i\pi/2}\ e^{(-3/4-i\sigma)\ln Z_0} ,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)}, \qquad \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)},$$

устанавливаем поведение второго решения на бесконечности:

$$F(a-c+1,2-c,Z)=e^{iZ_0/2}\times$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)}e^{-(-3/4+i\sigma)i\pi/2}\;e^{(-3/4+i\sigma)\ln Z_0}e^{-iZ_0/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)}e^{+(-3/4-i\sigma)i\pi/2}\;e^{(-3/4-i\sigma)\ln Z_0}e^{+iZ_0/2}\right\}.$$

Отсюда после перехода к функции $\bar{\Phi}_2(Z)$ получаем

$$\bar{\Phi}_2(Z)=\left\{\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)}e^{-(-3/4+i\sigma)i\pi/2}\;e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0}e^{-iZ_0/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)}e^{+(-3/4-i\sigma)i\pi/2}\;e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0}e^{+iZ_0/2}\right\}; \tag{4}$$

этот результат согласуется со свойством (2).

Можно в явном виде выделить решения, которые на бесконечности ведут себя как комплексно-значные функции. Для этого нужно воспользоваться другой парой решений гипергеометрического уравнения [1, с. 246]

$$Y_5(Z)=\Psi(a,c;Z), \quad Y_7(Z)=e^Z\Psi(c-a,c;-Z).$$

Пары решений $\{Y_5,Y_7\}$ и $\{Y_1,Y_2\}$ связаны соотношениями Куммера [1, с. 266]:

$$Y_5=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}Y_1+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}Y_2\,, \quad Y_7=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}Y_1-\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi c}\,Y_2\,.$$

Соответствующие Φ-решения задаются соотношениями

$$\Phi_5(Z)=e^{-Z/2}\Psi(a,c;Z), \quad \Phi_7(Z)=e^{+Z/2}\Psi(c-a,c;-Z);$$

функции $\Phi_5(Z)$, $\Phi_7(Z)$ являются комплексно-сопряженными друг другу.

При больших Z справедливы асимптотические формулы:

$$Y_5=\Psi(a,c;Z)=Z^{-a}=(iZ_0)^{-1/4+i\sigma}=\left(e^{\ln Z_0+i\pi/2}\right)^{-1/4+i\sigma},$$

$$Y_7(Z)=e^Z\Psi(c-a,c;-Z)=e^Z(-iZ_0)^{a-c}=e^{iZ_0}(-iZ_0)^{-1/4-i\sigma}=e^{iZ_0}\left(e^{\ln Z_0-i\pi/2}\right)^{-1/4-i\sigma}.$$

Эти соотношения после преобразования к функциям $\Phi(Z)$ примут вид:

$$\Phi_5=e^{-iZ_0/2}\left(e^{\ln Z_0+i\pi/2}\right)^{-1/4+i\sigma}, \quad \Phi_7=e^{+iZ_0/2}\left(e^{\ln Z_0-i\pi/2}\right)^{-1/4-i\sigma}.$$

Это комплексно-сопряженные друг другу функции; именно они присутствуют в суперпозициях (3) и (4).

Исследуем на асимптотиках выражения для сохраняющегося тока j_z:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$j_z = \frac{ie}{2m}\left(\Phi(z)\frac{d\Phi^*(z)}{dz} - \Phi^*(z)\frac{d\Phi(z)}{dz} \right).$$

Необходимо пересчитать это соотношение к переменной Z:

$$j_z = \frac{ie}{2m} 2i\sqrt{eE}\sqrt{-iZ}\left(\Phi(Z)\frac{d\Phi^*(Z)}{dZ} - \Phi^*(z)\frac{d\Phi(Z)}{dZ} \right).$$

Исходим из функций $\Phi_5(Z)$ и $\Phi_7(Z)$:

$$\Phi_5(Z) = e^{-Z/2} Z^{-1/4+i\sigma}, \qquad \Phi_7(Z) = e^{+Z/2}(-Z)^{-1/4-i\sigma}.$$

После простого вычисления находим:

$$j_Z = \frac{ie}{2m} 2i\sqrt{eE}\sqrt{-iZ} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{2} Z^{-1/4+i\sigma}(-Z)^{-1/4-i\sigma} + \left(\frac{1}{4} + i\sigma\right) Z^{-1/4+i\sigma}(-Z)^{-1/4-i\sigma}(-Z)^{-1} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}(-Z)^{-1/4-i\sigma} Z^{-1/4+i\sigma} - \left(\frac{1}{4} - i\sigma\right)(-Z)^{-1/4-i\sigma} Z^{-1/4+i\sigma} Z^{-1} \right].$$

Оставляя главный член в асимптотике для тока на бесконечности, получаем:

$$\Phi_5(Z), \quad j_Z = -\frac{e}{m}\sqrt{eE}\sqrt{-iZ}\left(Z^{-1/4+i\sigma}(-Z)^{-1/4-i\sigma} \right).$$

Для сопряженного решения имеем результат с противоположным знаком:

$$\Phi_7(Z), \quad j_Z = +\frac{e}{m}\sqrt{eE}\sqrt{-iZ}\left(Z^{-1/4+i\sigma}(-Z)^{-1/4-i\sigma} \right).$$

Учитывая тождество

$$Z = iZ_0 = e^{\ln iZ_0} = e^{\ln Z_0 + i\pi/2},$$

для тока находим

$$\Phi_5(Z), \quad j_Z = -\frac{e}{m}\sqrt{eE}\sqrt{Z_0}\left(Z^{-1/4+i\sigma}(-Z)^{-1/4-i\sigma} \right) =$$

$$= -\frac{e}{m}\sqrt{eE}\sqrt{Z_0}\left(e^{\ln Z_0 + i\pi/2}\right)^{-1/4}\left(e^{\ln Z_0 + i\pi/2}\right)^{-i\sigma} \times [\text{comp. cong.}].$$

Окончательно получаем:

$$\Phi_5(Z), \qquad j_Z = -\frac{e}{m}\sqrt{eE}\sqrt{Z_0}\,\frac{e^{\sigma\pi}}{\sqrt{Z_0}} = -\frac{e}{m}\sqrt{eE}e^{\sigma\pi},$$

$$\Phi_7(Z), \qquad j_Z = +\frac{e}{m}\sqrt{eE}\sqrt{Z_0}\,\frac{e^{\sigma\pi}}{\sqrt{Z_0}} = +\frac{e}{m}\sqrt{eE}e^{\sigma\pi}.$$

Таким образом, исследованы свойства решений для релятивистской частицы со спином 0 во внешнем однородном электрическом поле. Построены и проанализированы две пары линейно независимых решений. С использованием асимп-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

тотик решений найдены выражения для компоненты j_z сохраняющегося тока; они обращаются в ноль для решений из первой пары, и противоположны по знаку для решений из второй пары.

Литература

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. с англ. Н.Я. Виленкина. – 2-е изд., стер. – М. : Наука, 1973 – Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 294 с.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ