Е.М. Овсиюк[1], Я.А. Войнова[2], В.М. Редьков[3]

[1]УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь
[2]ГУО «Кочищанская средняя школа Ельского района», Ельский район, Беларусь
[3]ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси, Минск, Беларусь

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 0 В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. II

Уравнение, возникающее при рассмотрении релятивистской скалярной частицы в однородном электрическом поле, можно исследовать, не переходя к квадратичной переменной Z вместо исходной z. Рассмотрим уравнение в таком подходе:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - m^2 + 2\varepsilon eEz + e^2E^2z^2 \right)\Phi(z) = 0 . \qquad (1)$$

Рассмотрим поведение решений около $z = 0$ (отмечаем, что это не особая точка уравнения):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - m^2 \right)\Phi(z) \approx 0 , \quad \Phi(z) = e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}\, z} . \qquad (2)$$

Рассмотрим уравнение на бесконечности:

$$z = \frac{1}{y}, \quad \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{2}{y}\frac{d}{dy} + \frac{\varepsilon^2 - m^2}{y^4} + \frac{2\varepsilon eE}{y^5} + \frac{e^2E^2}{y^6} \right)\Phi(y) = 0. \qquad (3)$$

У этого уравнения есть единственная нерегулярная особая точка в бесконечности [1], она имеет ранг 3.

Ищем локальные решения Фробениуса [1] около точки $y=0\,(z=\infty)$ в виде:

$$\Phi(y)=y^{A}e^{B/y}e^{C/y^{2}}f(y);$$

находим уравнение для функции $f(y)$:

$$f''+\left(\frac{2A+2}{y}-\frac{2B}{y^{2}}-\frac{4C}{y^{3}}\right)f'+$$

$$+\left(\frac{A(A-1)+2A}{y^{2}}-\frac{2BA}{y^{3}}-\frac{-\varepsilon^{2}+m^{2}+2CA-B^{2}+2C(A-3)+4C}{y^{4}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\varepsilon eE+4CB}{y^{5}}+\frac{e^{2}E^{2}+4C^{2}}{y^{6}}\right)f=0. \qquad (4)$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при y^{-6}, y^{-5}, y^{-4}:

$$e^{2}E^{2}+4C^{2}=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=+\frac{ieE}{2},\ C_2=-\frac{ieE}{2}. \qquad (5)$$

Дальше

$$2\varepsilon eE+4CB=0,\ B=-\frac{\varepsilon eE}{2C} \quad\Rightarrow\quad B_1=+i\varepsilon,\ B_2=-i\varepsilon. \qquad (6)$$

Третье соотношение

$$-\varepsilon^{2}+m^{2}+2CA-B^{2}+2C(A-3)+4C=0$$

дает

$$A=+\frac{1}{2}-\frac{m^{2}}{4C} \quad\Rightarrow\quad A_1=\frac{1}{2}-i\gamma,\ A_2=\frac{1}{2}+i\gamma \quad \left(\frac{m^{2}}{2eE}=-\gamma\right). \qquad (7)$$

Таким образом, локальные решения Фробениуса в окрестности точки $z=\infty$ имеют вид:

$$\Phi_1(z)=z^{-A_1}e^{B_1 z}e^{C_1 z^{2}}f_1(y)=z^{-1/2}z^{+i\gamma}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^{2}}f_1(z), \qquad (8)$$

$$\Phi_2(z)=z^{-A_2}e^{B_2 z}e^{C_2 z^{2}}f_2(y)=z^{-1/2}z^{-i\gamma}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^{2}}f_2(z). \qquad (9)$$

Обратимся к анализу дифференциального уравнения для функции $f(y),\ y=z^{-1}$ (будем следить одновременно за обоими вариантами $f=f_1, f_2$):

$$f''+\left(\frac{2A+2}{y}-\frac{2B}{y^{2}}-\frac{4C}{y^{3}}\right)f'+\left(\frac{A(A+1)}{y^{2}}-\frac{2BA}{y^{3}}\right)f=0. \qquad (10)$$

Обращаем внимание на то, что наборы параметров $\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\{A_2,B_2,C_2\}$ связаны операцией комплексного сопряжения:

$$\{A_2,B_2,C_2\}=\{A_1^{*},B_1^{*},C_1^{*}\}; \qquad (11)$$

следовательно, так же будут связаны и решения уравнений вида (9): $f_2(y)=f_1^{*}(y)$.

Будем строить решения в виде степенного ряда

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^n \qquad f'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n y^{n-1}, \quad f=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n y^{n-2}\,. \tag{12}$$

Подставляя эти равенства в уравнение

$$y^3 f''+(2A+2)y^2 f'-2Byf'-4Cf'+A(A+1)y-2BAf=0\,, \tag{13}$$

получим

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n y^{n+1}+$$

$$+(2A+2)\sum_{n=1}^{\infty}nc_n y^{n+1}-2B\sum_{n=1}^{\infty}nc_n y^{n}-4C\sum_{n=1}^{\infty}nc_n y^{n-1}+$$

$$+A(A+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^{n+1}-2AB\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^{n}=0\,.$$

После изменения индексов суммирования имеем:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)c_{n-1}y^n+$$

$$+(2A+2)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)c_{n-1}y^n-2B\sum_{n=1}^{\infty}nc_n y^n-4C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}y^n+$$

$$+A(A+1)\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}y^n-2AB\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^n=0\,.$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях x^n:

$$n=0, \quad -4Cc_1-2ABc_0=0,$$

$$n=1, \quad -2Bc_1-8Cc_2+A(A+1)c_0-2ABc_1=0,$$

$$n=2, \quad (2A+2)c_1-4Bc_2-12Cc_3+A(A+1)c_1-2ABc_2=0,$$

$$n=3, \quad (n-1)(n-2)c_2+(2A+2)c_2-6Bc_3-16Cc_4+A(A+1)c_2-2ABc_3=0,$$

....

$$n=4,5,6....$$

$$(n-1)(n-2)c_{n-1}+(2A+2)(n-1)c_{n-1}-2Bnc_n-$$

$$-4C(n+1)c_{n+1}+A(A+1)c_{n-1}-2ABc_n=0\,.$$

Таким образом, приходим к 3-членным рекуррентным соотношениям $n=4,5,6....$:

$$\left[(n-1)(n-2+2A+2)+A(A+1)\right]c_{n-1}-$$

$$-\left(2Bn+2AB\right)c_n-4C\left(n+1\right)c_{n+1}=0. \tag{14}$$

Радиус сходимости R_{conv} степенного ряда можно вычислить согласно формуле Даламбера (предполагаем существование предела c_n/c_{n+1}, $n\to\infty$ и конечность радиуса сходимости, включая и равный нулю)

$$[(n-1)(n-2+2A+2)+A(A+1)]\frac{c_{n-1}}{c_n}\frac{c_n}{c_{n+1}}-(2Bn+2AB)\frac{c_n}{c_{n+1}}-4C\left(n+1\right)=0;$$

при этом получаем

$$R_{conv}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0\,. \qquad (15)$$

Этот ответ при возвращении к исходной переменной z должен интерпретироваться как бесконечный радиус сходимости.

Чтобы лучше понять смысл построенных решений, исследуем структуру тока для этих решений:

$$j_z=\frac{ie}{2m}\left(\Phi(z)\frac{d\Phi^*(z)}{dz}-\Phi^*(z)\frac{d\Phi(z)}{dz}\right). \qquad (16)$$

Учитывая

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)=z^{-1/2}z^{+i\gamma}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^2}f_1(z)\,,$$
$$\Phi^*(z)=\Phi_2(z)=z^{-1/2}z^{-i\gamma}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^2}f_2(z)\,,$$

находим выражения для производных

$$\frac{d\Phi^*}{dz}=-\frac{1}{2}z^{-3/2}z^{-i\gamma}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^2}f_2(z)-i\gamma z^{-1/2}z^{-i\gamma-1}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^2}f_2(z)-$$
$$-i\varepsilon z^{-1/2}z^{-i\gamma}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^2}f_2(z)-i\varepsilon z z^{-1/2}z^{-i\gamma}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^2}f_2(z)+$$
$$+z^{-1/2}z^{-i\gamma}e^{-i\varepsilon z}e^{-i(\varepsilon/2)z^2}f'_2(z);$$

$$\Phi(z)\cdot\frac{d\Phi^*(z)}{dz}=-\frac{1}{2}z^{-2}f_1(z)f_2(z)-i\gamma z^{-2}f_1(z)f_2(z)-i\varepsilon z^{-1}f_1(z)f_2(z)-$$
$$-i\varepsilon f_1(z)f_2(z)+z^{-1}f_1(z)\frac{df_2(z)}{dz};$$

$$\frac{d\Phi}{dz}=-\frac{1}{2}z^{-3/2}z^{+i\gamma}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^2}f_1(z)+i\gamma z^{-1/2}z^{+i\gamma-1}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^2}f_1(z)+$$
$$+i\varepsilon z^{-1/2}z^{+i\gamma}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^2}f_1(z)+i\varepsilon z z^{-1/2}z^{+i\gamma}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^2}f_1(z)+$$
$$+z^{-1/2}z^{+i\gamma}e^{+i\varepsilon z}e^{+i(\varepsilon/2)z^2}f'_1(z);$$

$$\Phi^*(z)\cdot\frac{d\Phi(z)}{dz}=-\frac{1}{2}z^{-2}f_1(z)f_2(z)+i\gamma z^{-2}f_1(z)f_2(z)+$$
$$+i\varepsilon z^{-1}f_1(z)f_2(z)+i\varepsilon f_1(z)f_2(z)+z^{-1}f_2(z)\frac{df_1(z)}{dz}.$$

Таким образом, получаем выражение:

$$j_z=\frac{ie}{2m}\left(\Phi(z)\frac{d\Phi^*(z)}{dz}-\Phi^*(z)\frac{d\Phi(z)}{dz}\right)=$$

$$= \frac{ie}{2m}\left(-2i\gamma z^{-2} f_1 f_2 - 2i\varepsilon z^{-1} f_1 f_2 - 2i\varepsilon f_1 f_2 + \left(z^{-1} f_1 \frac{df_2}{dz} - z^{-1} f_2 \frac{df_1}{dz} \right) \right) =$$

$$= \frac{ie}{2m}\left(-\frac{2i\gamma}{z^2} f_1 f_1^* - 2i\varepsilon\left(\frac{1}{z}+1\right) f_1 f_1^* + \frac{1}{z}\left(f_1 \frac{df_1^*}{dz} - f_1^* \frac{df_1}{dz} \right) \right).$$

Учитываем, что на асимптотике $f_1 \longrightarrow 1$, оставляя главный член асимптотического разложения для тока, получаем:

$$\Phi_1, \qquad j_z = +\frac{ie}{2m}(-2i\varepsilon) f_1 f_1^* = \frac{e\varepsilon}{m} f_1 f_1^*. \tag{17}$$

Для комплексно-сопряженного решения Φ_2 будем иметь похожее выражение для тока, но с противоположным знаком:

$$\Phi_2, \qquad j_z = -\frac{ie}{2m}(-2i\varepsilon) f_1 f_1^* = -\frac{e\varepsilon}{m} f_1 f_1^*. \tag{18}$$

Из двух комплексных решений Φ_1, Φ_2 легко получить два вещественных решения с нулевым током:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = R, \qquad R^* = +R; \qquad \Phi_1 - \Phi_2 = M, \qquad M^* = -M\,;$$

эти решения представляют стоячие волны.

Таким образом, исследовано дифференциальное уравнение, возникающее при рассмотрении релятивистской частицы со спином 0 во внешнем однородном электрическом поле. Уравнение может быть классифицировано как имеющее в $z = \infty$ единственную и нерегулярную особую точку ранга 3. Построены два линейно независимых локальных решения Фробениуса около точки $z = \infty$; показано, что возникающие при этом степенные ряды являются 3-членными и они сходятся во всей области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$. Построенные решения являются комплексно-сопряженными друг другу во всей области пространства. С использованием асимптотик решений найдены выражения для компоненты j_z сохраняющегося тока; они противоположны по знаку для найденных решений.

Литература

1. Slavyanov, S.Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S.Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York : Oxford University Press, 2000. – 312 p.