МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КРИТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ЛОКАЛЬНОЙ СВЕРХРАДИКАЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

CRITICAL GROUPS OF HEREDITARY LOCAL SUPERRADICAL FORMATION

S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel

В работе для наследственной локальной сверхрадикальной формации описаны все критические группы с единичной подгруппой Фраттини. Построены новые примеры наследственных локальных сверхрадикальных формаций.

***Ключевые слова**: формация, сверхрадикальная формация, критическая группа, простая неабелева группа.*

In this paper all critical groups with an identity Frattini subgroup for hereditary local superradical formation are described. New examples of hereditary local superradical formations are obtained.

***Keywords**: formation, superradical formation, critical group, simple non-abelian group.*

Введение

В Коуровской тетради [1] под номером 14.99 сформулирована задача описания локальных сверхрадикальных формаций. Частные аспекты ее решения приведены в работах [2]–[4].

Как показывает практика рассмотрения частных случаев отмеченной задачи, при ее решении центральную роль играют критические группы формаций. В работах [2]–[4] в качестве нетривиальных критических групп авторами выбирались группы Шмидта. Такое ограничение позволяет достаточно оперативно установить структуру значений локальных экранов рассматриваемых формаций и описать их.

Однако нетривиальные критические группы локальной сверхрадикальной формации далеко не исчерпываются только группами Шмидта. Полное описание минимальных не $\mathfrak{F}$-групп в случае, когда локальная сверхрадикальная формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, приводится в настоящей работе. Реальность таких минимальных не $\mathfrak{F}$-групп подтверждается в примерах и предложениях раздела 3 построением локальных сверхрадикальных формаций, отличных от тех, которые описаны в [2]–[4].

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [5]–[8].

1 Основные определения

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G).

Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Критической группой (*минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*) формации $\mathfrak{F}$ называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Критическая группа формации всех нильпотентных групп – это *группа Шмидта*.

Конечную группу G, которая не имеет факторизаций $G = AB$, где A и B – собственные подгруппы группы G, будем называть *нефакторизуемой группой*.

2 Описание критических групп

Основная цель работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная сверхрадикальная формация и G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;*

2) *группа G является группой Шмидта;*

3) G – *простая неабелева группа*;

4) G – *примитивная группа с абелевым цоколем* N *и* $G=[N]M$, *где* $(|N|, |M|)=1$ *и* $M/\Phi(M)$ – *нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации* $\mathfrak{F}$;

5) G – *примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем* N *и* G/N – *циклическая* q*-группа для некоторого* $q\in\pi(\mathfrak{F})$;

6) G – *примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем* N *и* $(G/N)/\Phi(G/N)$ – *нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации* $\mathfrak{F}$.

Доказательство.

Шаг 1. *Группа* G *обладает единственной минимальной нормальной подгруппой* N.

Так как $\Phi(G)=1$, то существует максимальная подгруппа M такая, что $G=MN$. Поэтому из $M\in\mathfrak{F}$ и $G/N\cong M/M\cap N$ следует, что $G/N\in\mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично показывается, что $G/L\in\mathfrak{F}$. Тогда $G\cong G/N\cap L\in\mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G\notin\mathfrak{F}$. Значит, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Шаг 2. *Справедливо включение* $C_G(N)\subseteq N$, *причем* $C_G(N)=N$, *если* N – *абелева группа, и* $C_G(N)=1$, *если* N – *неабелева группа.*

Утверждение следует из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G)=1$.

Шаг 3. *Подгруппа* N *является* $\mathfrak{F}$*-корадикалом группы* G.

Утверждение следует из определения минимальной не $\mathfrak{F}$-группы и того, что $G/N\in\mathfrak{F}$.

Шаг 4. *Если* $G^{\mathfrak{F}}=G$, *то либо* G – *группа простого порядка* p, *где* $p\notin\pi(\mathfrak{F})$, *либо* G – *простая неабелева группа.*

Если $G^{\mathfrak{F}}=G$, то из равенства $G^{\mathfrak{F}}=N$ следует, что G – простая группа. При этом если G – абелева группа порядка p, то из $G\notin\mathfrak{F}$ следует $p\notin\pi(\mathfrak{F})$.

Шаг 5. *Если* N – *собственная подгруппа группы* G, *то либо* G/N – *циклическая* q*-группа для некоторого* $q\in\pi(\mathfrak{F})$, *либо* $(G/N)/\Phi(G/N)$ – *нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации* $\mathfrak{F}$.

Предположим, что в G/N имеются две максимальные подгруппы M_1/N и M_2/N такие, что $M_1M_2=G$. Тогда из определения минимальной не $\mathfrak{F}$-группы и равенства $G^{\mathfrak{F}}=N$ следует, что M_1 и M_2 – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Так как формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной, то $G\in\mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G\notin\mathfrak{F}$.

Значит, G/N – нефакторизуемая группа. Если группа G/N разрешима, то, очевидно, она является циклической q-группой для некоторого простого числа q. Так как $G/N\in\mathfrak{F}$, то $q\in\pi(\mathfrak{F})$.

Если группа G/N не является разрешимой, то из того, что она не является факторизуемой группой, следует, что в ее главном ряду имеется только один нефраттиниев главный фактор, который является неабелевым и имеет вид $(G/N)/\Phi(G/N)$. Очевидно, $(G/N)/\Phi(G/N)$ – нефакторизуемая группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Шаг 6. *Если* G – *разрешимая группа непростого порядка, то она является группой Шмидта.*

Из предыдущего пункта следует, что G/N является циклической q-группой для некоторого простого q и принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Если N является q-группой, то и G будет q-группой. Но тогда из локальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с тем, что $G\notin\mathfrak{F}$.

Следовательно, N является p-группой и $p\neq q$. Пусть M – силовская q-подгруппа группы G. Покажем, что $|M|=q$.

Предположим, что $|M|=q^n$ и $n>1$. Пусть E и L – циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q. Обозначим через T регулярное сплетение $EwrL$. Если K – база сплетения, то $T=[K]L$.

Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. На основании теоремы 4.7 из [5] формация $f(p)$ является наследственной для любого простого p. Так как $G\notin\mathfrak{F}$, то $M\cong G/N=G/C_G(N)\notin f(p)$. Предположим, что $T\in f(p)$. Так как ввиду утверждения А.18.9 из [6] подгруппа M изоморфна некоторой подгруппе группы T, то из наследственности формации $f(p)$ имеем, что $M\in f(p)$. Пришли к противоречию с тем, что $M\notin f(p)$. Значит, $T\notin f(p)$. Отметим, что T – q-группа и $q\in\pi(\mathfrak{F})$. Поэтому из локальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $T\in\mathfrak{F}$.

Пусть $R=PwrT$, где P – циклическая группа порядка p. Обозначим через C базу сплетения R. Тогда $R=[C]T=[C]([K]L)$. Так как $R/C\cong T\in\mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}}\subseteq C$. Следовательно, подгруппы CK и CL $\mathfrak{F}$-субнормальны в R. Кроме того, из локальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что

$CK \in \mathfrak{F}$ и $CL \in \mathfrak{F}$. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной, то $R \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из равенства $F_p(R) = C$ имеем, что $T \cong R / C \in f(p)$. Получили противоречие. Значит, $n = 1$.

Теперь простая проверка показывает, что в группе G все максимальные подгруппы нильпотентны. Так как сама группа не является нильпотентной, то G – группа Шмидта.

<u>Шаг 7</u>. *Если G – неразрешимая группа с абелевым цоколем N и $(|N|, |G/N|) \neq 1$, то $G = [N]M$, где M – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.*

Из утверждения 5 следует, что $(G/N)/\Phi(G/N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая N. Так как подгруппа N абелева, то M дополняет N в группе G. Значит, $M \cong G/N$, а потому $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Обозначим группу $M/\Phi(M)$ через A.

Предположим, что $\Phi(M) \neq 1$. Обозначим через T регулярное сплетение $\Phi(M) wr A$. Если K – база сплетения, то $T = [K]A$.

Пусть $|N| = p^k$. Предположим, что $T \in f(p)$. Так как ввиду А.18.9 из [6] подгруппа M изоморфна некоторой подгруппе группы T, то из наследственности формации $f(p)$ имеем, что $M \in f(p)$. Но так как группа G не входит в формацию $\mathfrak{F}$, то $M \cong G/N = G/C_G(N) \notin f(p)$. Пришли к противоречию. Значит, $T \notin f(p)$.

Рассмотрим группу $R = PwrT$, где P – группа порядка p. Обозначим через C базу сплетения R. Тогда $R = [C]T = [C]([K]A)$.

Так как $A \in \mathfrak{F}$, то из того, что A – простая неабелева группа, следует $A \in f(q)$ для любого $q \in \pi(A)$. Кроме того, из свойств подгруппы Фраттини имеем, что $\pi(\Phi(M)) \subseteq \pi(A)$ и K – нильпотентная группа. Поэтому для любого T-главного фактора L/S группы K справедливо включение $K \subseteq C_T(L/S)$. Это означает, что группа $T/C_T(L/S)$ принадлежит формации $f(q)$ как гомоморфный образ группы $T/K \cong A$. Таким образом, все главные факторы группы T являются f-центральными. Поэтому из определения локальной формации следует, что $T \in \mathfrak{F}$.

Так как $R/C \cong T \in \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Следовательно, подгруппы CK и CA $\mathfrak{F}$-субнормальны в R.

Так как $N\Phi(M)$ – собственная подгруппа группы G, то $N\Phi(M)$ принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Кроме того, из $N = C_G(N)$ имеем $N = F_p(N\Phi(M))$. Поэтому

$$N\Phi(M)/F_p(N\Phi(M)) \cong \Phi(M) \in f(p).$$

Так как K – прямое произведение нескольких изоморфных копий группы $\Phi(M)$, то $K \in f(p)$. Теперь из того, что C является p-группой и $C \subseteq F_p(CK)$, имеем $CK \in \mathfrak{F}$.

Так как $p \in \pi(A)$, то $A \in f(p)$. Значит, $CA/F_p(CA) \in f(p)$. Отсюда и из определения локальной формации следует, что $CA \in \mathfrak{F}$.

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной, то $R \in \mathfrak{F}$. Так как $F_p(R) = C$, то $T \in f(p)$. Пришли к противоречию, которое и показывает, что $\Phi(M) = 1$. Но тогда $M \cong A$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

<u>Шаг 8</u>. *Если G – неразрешимая группа с абелевым цоколем N, то $G = [N]M$, где $(|N|, |G/N|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.*

Пусть $|N| = p^k$. Предположим, что p делит $|G/N|$. Тогда из утверждения шага 7 следует, что $G = [N]M$, где M – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как $M \in \mathfrak{F}$, то из того, что M – простая неабелева группа, следует $M \in f(p)$. Поэтому $G/C_G(N) \cong M \in f(p)$. Отсюда и из определения локальной формации следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Следовательно, p не делит $|G/N|$.

Теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная сверхрадикальная формация и G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;*

2) *группа G является группой Шмидта.*

***Следствие* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная сверхрадикальная формация и G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини. Если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G разрешим, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;*

2) *группа G является группой Шмидта*;

3) *G – примитивная группа с абелевым цоколем N и* $G=[N]M$, *где* $(|N|,\ |M|)=1$ *и* $M/\Phi(M)$ *– нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации* $\mathfrak{F}$.

3 Примеры сверхрадикальных формаций

Следующие примеры и предложения показывают, что в теореме 2.1 все классы 1)–6) критических групп являются непустыми.

Отметим, что максимальные факторизации почти простых групп получены в работе [9]. Отсюда, в частности, получается перечень всех простых неабелевых нефакторизуемых групп. Таким свойством обладают, в частности, группы $Sz(2^n)$, $PSU_{2n+1}(q)$ и ряд других простых неабелевых групп.

***Пример* 3.1.** Формация $\mathfrak{F}$ всех нильпотентных групп является сверхрадикальной, а минимальные не $\mathfrak{F}$-группы являются группами Шмидта.

***Пример* 3.2.** Формация $\mathfrak{F}$ всех нильпотентных π-групп является сверхрадикальной, а минимальные не $\mathfrak{F}$-группы являются либо группами Шмидта, либо группами простого порядка $p\notin\pi(\mathfrak{F})$.

***Пример* 3.3.** Формация $\mathfrak{F}$ всех разрешимых групп является сверхрадикальной, а все минимальные не $\mathfrak{F}$-группы с единичной подгруппой Фраттини являются минимальными неразрешимыми простыми группами.

***Предложение* 3.1.** *Пусть* $G\cong PSL_2(7)$. *Если* $\pi=\{2,3,7\}$, *а* $\mathfrak{F}$ *– класс всех групп, являющихся расширением разрешимых* π*-групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G, то*:

1) $\mathfrak{F}$ *является наследственной локальной сверхрадикальной формацией*;

2) *если H – минимальная не* $\mathfrak{F}$*-группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений*:

а) группа H имеет простой порядок p, причем $p\notin\pi$;

б) H – простая неабелева группа, изоморфная $PSL_2(8)$ *либо* $PSU_3(3)$;

в) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и H / N – группа простого порядка $q\in\pi$.

Доказательство.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{F}$ является локальной формацией, обладающей локальным экраном f таким, что $f(p)=\mathfrak{S}_\pi\, formG$ ($\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп) для всех $p\in\pi$ и $f(p)$ – пустая формация для всех $p\notin\pi$.

Наследственность формации $\mathfrak{F}$ следует из того, что в группе $PSL_2(7)$ все подгруппы разрешимы.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной. Предположим противное. Пусть R – группа наименьшего порядка, обладающая такими $\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B, что $R=AB$, но $R\notin\mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы следует, что $R^{\mathfrak{F}}\subseteq A\cap B$. Так как $R\notin\mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}}\neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R, содержащаяся в $R^{\mathfrak{F}}$. Ввиду выбора группы R имеем, что $R/L\in\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R. Так как формация $\mathfrak{F}$ локальна, то $\Phi(R)=1$. Поэтому $C_R(L)\subseteq L$.

Из определения формации $\mathfrak{F}$ и условия $L\subseteq R^{\mathfrak{F}}\subseteq A\cap B\in\mathfrak{F}$ следует, что либо L – p-группа, где $p\in\pi$, либо L – прямое произведение групп, изоморфных $PSL_2(7)$.

Если L – p-группа, где $p\in\pi$, то из определения формации $\mathfrak{F}$ и $R/L\in\mathfrak{F}$ следует, что $R\in\mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с выбором группы R.

Значит, L – прямое произведение групп, изоморфных $PSL_2(7)$. Так как $A\in\mathfrak{F}$, $B\in\mathfrak{F}$ и $C_R(L)=1$, то $A\in formG$ и $B\in formG$, т. е. подгруппы A и B являются прямыми произведениями групп, изоморфных $PSL_2(7)$. Теперь из $L\subseteq A$, $L\subseteq B$ и $C_R(L)=1$ имеем, что $L=A$, $L=B$, а значит, $R\cong PSL_2(7)\in\mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию, которое и доказывает, что формация $\mathfrak{F}$ сверхрадикальна.

Из теоремы 2.1 следует, что если H – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа H имеет простой порядок p, причем $p\notin\pi(\mathfrak{F})$;

2) группа H является группой Шмидта;

3) H – простая неабелева группа;

4) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H=[N]M$, где $(|N|,\ |M|)=1$ и $M/\Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$;

5) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и H/N – циклическая q-группа для некоторого $q\in\pi(\mathfrak{F})$;

6) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $(H/N)/\Phi(H/N)$ –

нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Из указанного перечня непустыми являются только классы минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пунктов 1), 3) и 5).

Очевидно, что класс 1) не является пустым.

Простыми неабелевыми группами, у которых множество простых делителей совпадает с множеством π, являются группы $PSL_2(7)$, $PSL_2(2^3)$ и $PSU_3(3)$ [9, с. 20]. Поскольку в $PSL_2(2^3)$ все собственные подгруппы разрешимы, а в $PSU_3(3)$ все собственные подгруппы разрешимы или изоморфны $PSL_2(7)$, то к классу пункта 3) относятся в точности группы $PSL_2(2^3)$ и $PSU_3(3)$.

К классу 5) относится, например, группа $H \cong PGL_2(7) = [PSL_2(7)] < \alpha >$, где α – диагональный автоморфизм второго порядка.

Отметим, что для любой группы H из класса 5) имеет место равенство $|H / N| = q$. Это следует из определения формации $\mathfrak{F}$.

Очевидно, формация $\mathfrak{F}$ не имеет критических групп, являющихся группами Шмидта, поэтому класс 2) будет пустым.

Формации $\mathfrak{F}$ принадлежат группы, у которых все простые неабелевы секции изоморфны факторизуемой группе $PSL_2(7)$. Поэтому классы минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пунктов 4) и 6) пусты. Предложение доказано.

***Предложение* 3.2.** *Пусть* $G \cong Sz(2^3)$ *и* $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация, обладающая таким локальным экраном* f, *что* $f(q)$ *– класс всех групп, являющихся расширением разрешимых групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных* G, *если* $q \in \pi$, *и* $f(q)$ *– класс всех разрешимых групп, если* $q \notin \pi$.

Тогда:

1) $\mathfrak{F}$ *является наследственной локальной сверхрадикальной формацией;*

2) *если* H *– минимальная не* $\mathfrak{F}$*-группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:*

а) H *– простая неабелева группа из следующего списка:* $PSL_2(2^p)$, p *– простое число;* $PSL_2(3^p)$, p *– нечетное простое число;* $PSL_2(p)$, p *– простое число, большее 3, для которого* $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$; $Sz(2^p)$, p *– нечетное простое число;* $PSL_3(3)$; $Sz(2^9)$;

б) H *– примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем* N *(*N *– прямое произведение групп, изоморфных* G*) и* H / N *– группа простого порядка* $q \in \pi(G)$;

в) H *– примитивная группа с абелевым цоколем* N *и* $H = [N]M$, *где* $(|N|, |M|) = 1$ *и* $M / \Phi(M) \cong G$.

Доказательство.

Из определения локальной формации следует, что группа D принадлежит классу $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда для каждого главного qd-фактора A / B группы D выполняются условия:

1) $D / C_D(A / B) \in \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$ – формация всех разрешимых групп), если $q \notin \pi$;

2) $D / C_D(A / B) \in \mathfrak{S}formG$, если $q \in \pi$.

Таким образом, группа D принадлежит формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда одновременно $D / O_\pi(D) \in \mathfrak{S}$ и $D / O_{\pi'}(D) \in \mathfrak{S}formG$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не является наследственной. Пусть D – группа наименьшего порядка, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и обладающая подгруппами, не принадлежащими формации $\mathfrak{F}$. Пусть U – одна из таких подгрупп. Если K – минимальная нормальная подгруппа группы D, то ввиду выбора группы D имеем, что $UK / K \cong U / U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 – минимальная нормальная подгруппа группы D, отличная от K, то аналогично показывается, что $U / U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$U \cong U / (U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$.

Значит, K – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D. Отсюда следует, что либо $O_{\pi'}(D) = 1$, либо $O_\pi(D) = 1$.

Так как $D \in \mathfrak{F}$, то при $O_{\pi'}(D) = 1$ имеем $D / O_\pi(D) \in \mathfrak{S}$ и $D \in \mathfrak{S}formG$. Отсюда по аналогии со следствием 3.1.24 из [7] показывается, что $U \in \mathfrak{S}formG$. Значит, $U / O_{\pi'}(U) \in \mathfrak{S}formG$. Кроме того, из $D / O_\pi(D) \in \mathfrak{S}$ имеем, что $UO_\pi(D) / O_\pi(D) \cong U / U \cap O_\pi(D) \in \mathfrak{S}$. Значит, $U / O_\pi(U) \in \mathfrak{S}$. Теперь из $U / O_\pi(U) \in \mathfrak{S}$ и $U / O_{\pi'}(U) \in \mathfrak{S}formG$ имеем $U \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$.

Если $O_\pi(D) = 1$, то из того, что $D \in \mathfrak{F}$, имеем $D \in \mathfrak{S}$. Тогда U – разрешимая группа. Так как $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$, то $U \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию.

Итак, формация $\mathfrak{F}$ является наследственной.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной. Предположим противное. Пусть R – группа наименьшего порядка, обладающая такими

$\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B, что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы следует, что $R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$. Так как $R \notin \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R. Ввиду выбора группы R имеем, что $R / L \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^{\mathfrak{F}}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ локальна, то $\Phi(R) = 1$. Поэтому $C_R(L) \subseteq L$.

Из определения формации $\mathfrak{F}$ и условия $L \subseteq R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ следует, что либо L – p-группа для некоторого простого p, либо L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Рассмотрим три случая:

1. Пусть L – p-группа и $p \notin \pi$.

Тогда из $L \subseteq A \cap B$ и $C_R(L) = L$ следует, что $O_\pi(A) = 1$ и $O_\pi(B) = 1$. Значит, ввиду того, что $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, подгруппы A и B разрешимы.

Так как $R / L \in \mathfrak{F}$, то

$$(R / L) / O_{\pi'}(R / L) \cong R / O_{\pi'}(R) \in \mathfrak{S}formG.$$

Поэтому из разрешимости подгруппы $O_{\pi'}(R)$ следует, что $R / R_{\mathfrak{S}} \in formG$. Предположим, что подгруппа A не содержит $R_{\mathfrak{S}}$. Тогда из максимальности и разрешимости подгруппы A имеем $R = AR_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $R_{\mathfrak{S}} \subseteq A$. Аналогично показывается, что $R_{\mathfrak{S}} \subseteq B$.

Так как $R / R_{\mathfrak{S}} \in formG$, то

$$R / R_{\mathfrak{S}} = (R_1 / R_{\mathfrak{S}}) \times \ldots \times (R_t / R_{\mathfrak{S}}),$$

где $R_i / R_{\mathfrak{S}} \cong G$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как A – разрешимая максимальная подгруппа группы R, то $R_i A = R$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Следовательно, $t = 1$ и $R / R_{\mathfrak{S}} \cong G$. Теперь из $R_{\mathfrak{S}} \subseteq A$, $R_{\mathfrak{S}} \subseteq B$ и $R = AB$ имеем, что группа $G \cong Sz(2^3)$ факторизуема. Пришли к противоречию. Следовательно, если L – p-группа и $p \notin \pi$, то $R \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть L – p-группа и $p \in \pi$.

В этом случае разрешимый радикал $R_{\mathfrak{S}}$ группы R отличен от единицы. Поэтому ввиду выбора группы R имеем $R / R_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{F}$. Отметим, что из $R / L \in \mathfrak{F}$ следует, что композиционные факторы группы R либо абелевы, либо изоморфны группе $Sz(2^3)$. Поэтому в цоколе группы $R / R_{\mathfrak{S}}$ все минимальные нормальные подгруппы группы $R / R_{\mathfrak{S}}$ неабелевы и их композиционные факторы изоморфны $Sz(2^3)$.

Пусть $Soc(R / R_{\mathfrak{S}}) = (K_1 / R_{\mathfrak{S}}) \times \ldots \times (K_n / R_{\mathfrak{S}})$. Так как $R / R_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{F}$, то для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется условие $R / C_R(K_i / R_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{S}formG$. Значит, $R / \bigcap_{i=1}^{n} C_R(K_i / R_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{S}formG$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы $R / R_{\mathfrak{S}}$ неабелевы, то

$$Soc(R / R_{\mathfrak{S}}) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} C_R(K_i / R_{\mathfrak{S}})) = 1.$$

Отсюда и из определения цоколя следует, что $\bigcap_{i=1}^{n} C_R(K_i / R_{\mathfrak{S}}) = R_{\mathfrak{S}}$. Значит, $R / R_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}formG$. Теперь из определения разрешимого радикала получаем, что $R / R_{\mathfrak{S}} \in formG$ и $R \in \mathfrak{S}formG$. Но тогда $R / C_R(L) \in \mathfrak{S}formG$, т. е. минимальная нормальная подгруппа L группы R f-центральна в R. Отсюда и из того, что $R / L \in \mathfrak{F}$ следует $R \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $R \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, если L – p-группа и $p \in \pi$, то $R \in \mathfrak{F}$.

3. Пусть L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Как отмечено выше, $L \subseteq A$ и $C_R(L) = 1$. Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $A / O_{\pi'}(A) \cong A \in \mathfrak{S}formG$. Отсюда и из $C_R(L) = 1$ следует, что $A_{\mathfrak{S}} = 1$ и $A \in formG$. А так как $L \subseteq A$ и $C_R(L) = 1$, то $A = L$.

Аналогично показывается, что $B \in formG$ и $B = L$.

Отсюда имеем, что $R = AB = L \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию. Значит, и в случае, когда L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$, группа R принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Итак, формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной.

Из теоремы 2.1 следует, что если H – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа H имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) группа H является группой Шмидта;

3) H – простая неабелева группа;

4) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$;

5) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и H / N – циклическая q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;

6) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $H / N / \Phi(H / N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне классы минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пунктов 1) и 2) являются пустыми.

Как отмечено выше, композиционные факторы любой группы из $\mathfrak{F}$ либо абелевы, либо изоморфны группе $Sz(2^3)$. Поэтому если класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 6) не является пустым и H – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини, то $(H/N)/\Phi(H/N) \cong Sz(2^3)$ и все композиционные факторы цоколя N изоморфны $Sz(2^3)$. Но тогда из того, что H – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, формация $\mathfrak{F}$ содержит группу из класса $formG\mathfrak{S}$, имеющую неабелев цоколь и хотя бы один абелев композиционный фактор. Однако это не так. Следовательно, в указанном перечне класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 6) также является пустым.

Из указанного перечня непустыми являются только классы минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пунктов 3), 4) и 5).

Приведем полное описание групп класса 3).

Пусть H – простая неабелева группа, которая является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. В этом случае H не принадлежит формации $\mathfrak{F}$ и всякая собственная подгруппа группы H имеет композиционные факторы, которые изоморфны либо циклической группе Z_r для некоторого простого r, либо группе $Sz(2^3)$. Если $Sz(2^3)$ не вплетена в H, то H – простая неабелева группа, у которой все собственные подгруппы разрешимы. Из цикла работ Дж. Томпсона, приведенных, например, в [8], следует, что H – группа из следующего списка: $PSL_2(2^p)$, p – простое число; $PSL_2(3^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p – простое число, большее 3, для которого $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$; $Sz(2^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_3(3)$.

Далее будем считать, что $Sz(2^3)$ вплетена в H. Последовательно рассмотрим следующие возможные случаи.

(1) $H \cong A_n$, $n \geq 5$. При $n=5$ группа A_5, изоморфная $PSL_2(2^2)$, является минимальной неразрешимой группой. При $n \geq 6$ группа A_n содержит простую неабелеву подгруппу A_{n-1} и $3 \in \pi(A_{n-1})$, что невозможно.

(2) H – простая спорадическая группа. Из [10] следует, что в H вплетена простая неабелева группа, порядок которой делится на 3. Последнее невозможно.

(3) H – простая группа лиевского типа над полем $F_q = F_{p^n}$. Пусть сначала H – группа Ли нормального типа. Если лиевский ранг H равен 1, то $H \cong PSL_2(q)$ и $Sz(2^3)$ не вплетена в H. Поэтому будем считать, что лиевский ранг H не меньше 2. Пусть α – положительный корень в соответствующей системе положительных корней Φ^+. Тогда корневые подгруппы X_α и $X_{-\alpha}$ порождают собственную подгруппу $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$, которая является гомоморфным образом группы $SL_2(q)$ с ядром гомоморфизма порядка 2 или 1. При $q \neq 2$ и $q \neq 3$ группа $SL_2(q)$ неразрешима и $3 \in \pi(SL_2(q))$, что невозможно. Пусть $q=2$. В этом случае либо H имеет неразрешимую собственную параболическую подгруппу P, для которой $3 \in \pi(P)$, что невозможно, либо $H \cong PSL_3(2)$ и $Sz(2^3)$ не вплетена в H, что также невозможно. Если $q=3$, то либо $H \cong PSL_3(3)$ и $Sz(2^3)$ не вплетена в H, что невозможно, либо H обладает неразрешимой параболической подгруппой P и $3 \in \pi(P)$, что также невозможно.

Следовательно, H – группа Ли скрученного типа.

(a) $H \cong PSO^-_{2l}(q)$, $l \geq 4$. В этом случае максимальная параболическая подгруппа P_1 неразрешима и $3 \in \pi(P_1)$, что невозможно.

(b) $H \cong PSU_l(q)$, $l \geq 3$. Если $l > 3$, то максимальная параболическая подгруппа P_1 неразрешима и $3 \in \pi(P_1)$, что невозможно. Поэтому $l = 3$. Максимальные подгруппы $PSU_3(q)$ описаны в [11]–[12]. Из данного описания следует, что $Sz(2^3)$ не вплетена в H. Последнее невозможно.

(c) $H \cong Sz(2^n)$, где $n \geq 3$ – нечетное число. Максимальные подгруппы групп Судзуки описаны в [13]. Из описания следует, что $H \cong Sz(2^9)$ и H имеет максимальные подгруппы, которые либо разрешимы, либо изоморфны $Sz(2^3)$. Поэтому группа $Sz(2^9)$ содержится в классе 3).

(d) $H \cong {}^3D_4(q)$. Группа ${}^3D_4(q)$ содержит собственную простую неабелеву подгруппу $G_2(q)$ (таблица 1 [14]) и $3 \in \pi(G_2(q))$, что невозможно.

(e) $H \cong {}^2F_4(q)'$. Из таблицы 1 [14] следует, что H содержит простую подгруппу $PSL_2(25)$ и $3 \in \pi(PSL_2(25))$, что невозможно.

(f) $H \cong {}^2G_2(q)$. Максимальные подгруппы в ${}^2G_2(q)$ описаны в [15]. Из описания следует, что $Sz(2^3)$ не вплетена в H.

(h) $H \cong {}^2E_6(q)$. В этом случае H имеет максимальную неразрешимую параболическую подгруппу P, для которой $3 \in \pi(P)$.

Таким образом, простыми минимальными не $\mathfrak{F}$-группами являются простые минимальные неразрешимые группы и $Sz(2^9)$.

Пусть $q \notin \pi(Sz(2^3))$ и V – точный и неприводимый $F_q[Sz(2^3)]$-модуль над полем из q элементов. Тогда группа $H = [V]Sz(2^3)$ является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, относящейся к классу групп из пункта 4).

Группа $Sz(2^3)$ имеет полевой автоморфизм α порядка 3. Поэтому к классу 5) относится группа H, являющаяся расширением группы $Sz(2^3)$ с помощью $< \alpha >$. Предложение доказано.

***Предложение* 3.3.** *Пусть* $G \cong Sz(2^3)$ *и* $\pi = \pi(G)$. *Если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi formG\mathfrak{S}_\pi$, *то*:

1) $\mathfrak{F}$ *является наследственной локальной сверхрадикальной формацией*;

2) *если* H *– минимальная не* $\mathfrak{F}$*-группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений*:

а) группа H *имеет простой порядок* q, *причем* $q \notin \pi(\mathfrak{F})$;

б) H *– примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и* $(H / N) / \Phi(H / N)$ *– группа, изоморфная G.*

Доказательство. Простая проверка показывает, что формация $\mathfrak{F}$ обладает таким локальным экраном f, что $f(q) = \mathfrak{S}_\pi formG\mathfrak{S}_\pi$ ($\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп) для всех $q \in \pi$ и $f(q)$ – пустая формация для всех $q \notin \pi$.

Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не является наследственной. Пусть D – группа наименьшего порядка, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и обладающая подгруппами, не принадлежащими формации $\mathfrak{F}$. Пусть U – одна из таких подгрупп. Если K – минимальная нормальная подгруппа группы D, то ввиду выбора группы D имеем, что $UK / K \cong U / U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 – минимальная нормальная подгруппа группы D, отличная от K, то аналогично показывается, что $U / U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $U \cong U / (U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$.

Значит, K – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D. Возможны два случая:

1. Пусть K – разрешимая группа. Тогда из условия $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ получаем $U \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению $U \notin \mathfrak{F}$.

2. Пусть K – неразрешимая группа. Тогда из $D \in \mathfrak{F}$ и $C_D(K) = 1$ следует, что $D \in formG\mathfrak{S}_\pi$ и $D / K \in \mathfrak{S}_\pi$. Значит, $U / U \cap K \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как $|K| < |D|$ и $K \in \mathfrak{F}$, то $U \cap K \in \mathfrak{F}$. Теперь из $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$ снова получаем $U \in \mathfrak{F}$.

Итак, формация $\mathfrak{F}$ является наследственной.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной. Предположим противное. Пусть R – группа наименьшего порядка, обладающая такими $\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B, что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы следует, что $R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$. Так как $R \notin \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R. Ввиду выбора группы имеем, что $R / L \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^{\mathfrak{F}}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ локальна, то $\Phi(R) = 1$. Поэтому $C_R(L) \subseteq L$.

Из определения формации $\mathfrak{F}$ и условия $L \subseteq R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ следует, что либо L – q-группа для некоторого простого $q \in \pi(\mathfrak{F})$, либо L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть L – q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда из условия $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ получаем $R \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению $R \notin \mathfrak{F}$.

2. Пусть L – прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$. Так как $A \supseteq L$, $B \supseteq L$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то из $C_R(L) = 1$ имеем $A_{\mathfrak{S}} = B_{\mathfrak{S}} = 1$ и $A^{\mathfrak{S}} = B^{\mathfrak{S}} = L$. Значит, $R / L = (A / L)(B / L)$ и $A / L \in \mathfrak{S}$, $B / L \in \mathfrak{S}$. По теореме С.А. Сыскина из [16] группа R / L разрешима и $R \in formG\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию, которое и доказывает, что формация $\mathfrak{F}$ сверхрадикальна.

Из теоремы следует, что если H – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа H имеет простой порядок q, причем $q \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) группа H является группой Шмидта;

3) H – простая неабелева группа;

4) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$;

5) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и H / N – циклическая q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$;

6) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N и $H/N/\Phi(H/N)$ – нефакторизуемая простая неабелева группа, которая принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 2) является пустым. Так как $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 4) является пустым. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то в указанном перечне класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 5) также является пустым.

Очевидно, в указанном списке класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 1) не пустой.

Предположим, что класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 3) не является пустым. Пусть H – простая неабелева группа, которая является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. В этом случае H не принадлежит формации $\mathfrak{F}$ и всякая собственная подгруппа группы H имеет композиционные факторы, которые изоморфны либо циклической группе Z_r для $r \in \pi$, либо группе $Sz(2^3)$. Следовательно, H – $3'$-группа и $H \cong Sz(2^{2m+1})$, где $m \geq 1$, причем $\pi(H) \subseteq \pi$. Если $m = 1$, то $H \cong Sz(2^3)$ и H не является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Поэтому $m \geq 2$. Порядок группы H делится на $2^{2m+1}-1$. Поскольку $2m+1$ является нечетным числом, то из [17] следует, что найдется простое число r, которое делит $2^{2m+1}-1$ и не делит 2^i-1 для всех $1 \leq i < 2m+1$. При этом из малой теоремы Ферма следует, что $r \geq (2m+1)+1 = 2m+2$, а значит, $r \geq 2m+3$. Непосредственный подсчет показывает, что $\pi(H)$ не содержится в π для $m \in \{2,3,4,5\}$. При $m \geq 6$ получаем, что $r > 13$ и $\pi(H)$ не содержится в π. Полученное противоречие показывает, что в указанном перечне класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 3) является пустым.

Пусть A и B – группы, изоморфные $Sz(2^3)$. Очевидно, регулярное сплетение V групп A и B не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда либо группа V является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, либо содержит подгруппу W, являющуюся минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

Так как $\pi(W) \subseteq \pi$, то W не может относиться к классам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп из пункта 1). Следовательно, W является группой из класса 6). Предложение доказано.

***Пример* 3.4.** Пусть $G \cong Sz(2^3)$. Тогда мультипликатор Шура группы G имеет вид $M(G) \cong Z_2 \times Z_2$ [8, с. 316]. Так как всякая накрывающая группа простой неабелевой группы является гомоморфным образом универсальной накрывающей этой группы, то имеется центральное фраттиниево расширение D группы G, для которого $F(D) = \Phi(D) = Z(D)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы D, изоморфная циклической группе Z_2, и $D/\Phi(D) \cong G$. Пусть $q \notin \pi(Sz(2^3))$. Тогда по следствию В.10.7 из [6] существует точный и неприводимый $F_q[D]$-модуль V над полем F_q. Если $\mathfrak{F}$ – формация из предложения 3.2, то группа $H = [V]D$ является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, относящейся к классу критических групп из пункта 4) теоремы 2.1.

Пример 3.4 показывает, что в пункте 4) теоремы 2.1 подгруппа $\Phi(M)$ может быть неединичной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь*. – Новосибирск : Институт математики СО РАН, 2006. – 194 с.

2. *Семенчук, В.Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.

3. *Семенчук, В.Н.* Сверхрадикальные формации / В.Н. Семенчук, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, №5. – С. 24-26.

4. *Семенчук, В.Н.* О проблеме классификации сверхрадикальных формаций / В.Н. Семенчук, О.А. Мокеева // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 12. – С. 70-75.

5. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

6. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 256 с.

8. *Горенстейн, Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М. : Мир, 1985. – 352 с.

9. *Liebeck, M.W.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1–150.

10. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.]. – Oxford : Clarendon Press, 1985. – 252 p.

11. *Mitchell, H.H.* Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207–242.

12. *Hartley, R.W.* Determination of the ternary collineation groups whose coefficient lie in $GF(2^n)$ / R.W. Hartley // Ann. Math. – 1925. – Vol. 25, № 2. – P. 140–158.

13. *Suzuki, M.* On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. – Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

14. *Liebeck, M.W.* On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type / M.W. Liebeck, J. Saxl // Proc. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 55. – P. 299–330.

15. *Kleidman, P.* The maximal subgroups of the Chevalley group $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$ and their automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra. – 1988. – Vol. 117. – P. 30–71.

16. *Сыскин, С.А.* Об одном вопросе Р. Бэра / С.А. Сыскин // Сиб. мат. журнал. – 1979. – Т. 20, № 3. – С. 679–681.

17. *Zsigmondy, K.* Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monath. Math. Phis. – 1892. – Bd. 3. – S. 265–284.

Поступила в редакцию 22.02.13.