УДК 530.1, 539.12

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПИОНА В ФОРМАЛИЗМЕ ДАФФИНА – КЕММЕРА

Е.В. Вакулина[1], **Н.В. Максименко**[2]

[1]*Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

POLARIZABILITY OF THE PION IN THE FORMALISM OF DUFFIN – KEMMER

E.V. Vakulina[1], **N.V. Maksimenko**[2]

[1]*I.G. Petrovsky Bryansk State University, Novozibkov, Russia*
[2]*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

В формализме Даффина – Кеммера на основе принципа калибровочной инвариантности определены в ковариантной форме лагранжиан и уравнение движения пиона в электромагнитном поле с учётом его электрической и магнитной поляризуемостей. На основе решения уравнения взаимодействия пиона с электромагнитным полем, полученного методом функции Грина, определена амплитуда комптоновского рассеяния с учётом отдачи и поляризуемостей пиона.

Ключевые слова*: амплитуда комптоновского рассеяния, теоретико-полевой подход, лагранжиан, электрическая поляризуемость, магнитная поляризуемость, формализм Даффина – Кеммера.*

The Lagrangian in the covariant form and the equation of motion of the pion in the electromagnetic field, taking into account its electric and magnetic polarizabilities were defined in the formalism of Duffin – Kemmer on the basis of the principle of gauge invariance. The amplitude of Compton scattering was defined on the basis of the solution of the equation of the interaction of the pion with the electromagnetic field produced by the method of Green's function, taking into account the impact and polarizabilities of the pion.

Keywords*: Compton scattering amplitude, field-theoretical approach, Lagrangian, electric polarizability, magnetic polarizability, formalism of Duffin – Kemmer.*

Введение

Низкоэнергетические теоремы в основе которых лежат общие принципы релятивистской квантовой теории и разложение амплитуды комптоновского рассеяния по частоте фотонов играют важную роль в понимании структуры адронов. Согласно низкоэнергетической теореме, амплитуда комптоновского рассеяния определяется не только зарядом и магнитным моментом адронов, но и такими важными электромагнитными характеристиками, как аномальные магнитные моменты, электрическая и магнитная поляризуемости.

В последнее время измерение поляризуемостей реализуется не только в экспериментах по комптоновскому рассеянию, но и в других электродинамических процессах [1], [2]. Определение вклада поляризуемостей в амплитуды и сечения двухфотонных электродинамических процессов можно осуществить в последовательном релятивистском теоретико-полевом подходе [3], [4]. В работах [4], [5], [6] были развиты ковариантные методы получения лагранжианов, уравнений и амплитуд двухфотонных электродинамических процессов с учетом поляризуемостей адронов. При развитии такого подхода возникает задача определения универсальных ковариантных лагранжианов и адронных электродинамических амплитуд с учетом поляризуемостей для адронов разных спинов.

В настоящей работе в рамках ковариантного теоретико-полевого подхода, используя метод из работы [4], получен лагранжиан, уравнения и амплитуды взаимодействия электромагнитного поля с адронами спина ноль в формализме Даффина – Кеммера, что открывает возможности теоретико-полевого описания поляризуемостей адронов, например спина единица.

1 Описание поляризуемости пиона в формализме Даффина – Кеммера

Используя релятивистские теоретико-полевые свойства полей в формализме Даффина – Кеммера возможно установить новые свойства поляризуемостей структурных частиц [7]. Уравнения Даффина – Кеммера для свободных скалярных частиц имеют вид:

$$\left(\beta_\mu \vec{\partial}_\mu + m\right)\psi(x) = 0, \tag{1.1}$$

$$\overline{\psi}(x)\left(\overleftarrow{\partial}_\mu \beta_\mu - m\right) = 0, \tag{1.2}$$

где $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ – пятимерные волновые функции скалярных частиц, а четырёхмерный импульс определяется компонентами $a_\mu \left\{\vec{a}, a_4 = ia_0\right\}$.

В уравнениях (1.1) и (1.2) пятимерные матрицы $\beta_\mu = \beta_\mu^{(5)}$ являются матрицами Даффина – Кеммера и удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\beta_\mu\ \beta_\nu\ \beta_\rho + \beta_\rho\ \beta_\nu\ \beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\mu + \delta_{\rho\nu}\beta_\mu. \quad (1.3)$$

Из ковариантного формализма Лагранжа следует, что уравнения (1.1) и (1.2) следуют из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}\overline{\psi}\left(\beta_\mu \vec{\partial}_\mu + m\right)\psi + \frac{1}{2}\overline{\psi}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu \beta_\mu - m\right)\psi. \quad (1.4)$$

Чтобы получить уравнения взаимодействия электромагнитного поля с пионами в формализме Даффина – Кеммера с учетом их поляризуемостей, воспользуемся принципом калибровочной инвариантности. Для этого согласно работе [8], в лагранжиан (1.4) необходимо ввести

$$L^{(\gamma)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

и сделать замену производных $\vec{\partial}_\mu$ и $\overleftarrow{\partial}_\mu$ на удлинённые производные

$$\hat{\vec{D}} = \vec{\partial}_\nu \beta_\sigma \eta_{\sigma\nu} + ie\hat{A}, \quad (1.5)$$

$$\hat{\overleftarrow{D}} = \eta_{\sigma\nu}\beta_\sigma \overleftarrow{\partial}_\nu - ie\hat{A}, \quad (1.6)$$

$$\eta_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu} + \frac{2\pi}{m}\left[\alpha_E F_{\sigma\mu}F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right]. \quad (1.7)$$

В соотношениях (1.5)–(1.7) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор, а $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ – дуальный тензор электромагнитного поля. Если в соотношении (1.4) учесть (1.5)–(1.7), то получим

$$\begin{gathered} L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overline{\psi}\overleftrightarrow{\partial}_\mu \beta_\mu \psi - \\ -m\overline{\psi}\psi + ie\overline{\psi}\hat{A}\psi + K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}. \end{gathered} \quad (1.8)$$

В выражении (1.8) введены следующие обозначения:

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m}\left[\alpha_E F_{\sigma\mu}F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right],$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\overline{\psi}\beta_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi,$$

стрелки над производными указывают их действие на волновые функции пиона в пятимерном пространстве, а α_E и β_M – электрическая и магнитная поляризуемости пиона.

Выделим в уравнении (1.8) часть лагранжиана, связанную с поляризуемостями пиона:

$$L^{(\alpha_E, \beta_M)} = K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}. \quad (1.9)$$

В системе покоя пиона лагранжиан (1.9) принимает вид:

$$L^{(\alpha_E, \beta_M)} = -H^{(\alpha_E, \beta_M)} = 2\pi(\alpha_E \vec{E}^2 + \beta_M \vec{H}^2),$$

где $H^{(\alpha_E, \beta_M)}$ – гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля с пионом с учетом наведенных дипольных моментов в статическом пределе.

Убедимся теперь, что в амплитуду комптоновского рассеяния поляризуемости входят в соответствии с низкоэнергетической теоремой. Для этого получим уравнение взаимодействия пиона с электромагнитным полем с учетом поляризуемостей, используя лагранжиан (1.8)

$$\begin{gathered} (\hat{\partial} + m)\psi = \\ = ie\hat{A}\psi - \frac{1}{2}\left[\partial_\mu(K_{\sigma\mu}\beta_\sigma\psi) + K_{\sigma\mu}\beta_\sigma\partial_\mu\psi\right]. \end{gathered} \quad (1.10)$$

Представим дифференциальное уравнение (1.10), в котором будем учитывать только вклад поляризуемостей, в интегральной форме:

$$\psi(x) = \psi^0(x) + \int S(x - x')V^{(\alpha_E, \beta_M)}(x')dx',$$

где потенциал имеет вид:

$$V^{(\alpha_E, \beta_M)}(x') = -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu(K_{\sigma\mu}\beta_\sigma\psi) + K_{\sigma\mu}\beta_\sigma\partial_\mu\psi\right]$$

а функция Грина $S(x - x')$ удовлетворяет уравнению

$$(\hat{\partial} + m)S(x - x') = \delta(x - x').$$

Определим матричный элемент S_{fi} рассеяния фотонов на пионе, следуя работам [9], [10], [11]. Для этого воспользуемся соотношением:

$$\int \overline{\psi}_{p_2}(x)S(x - x')d^3x\Big|_{t\to+\infty} = (-i)\overline{\psi}_{p_2}(x'),$$

где $\overline{\psi}_{p_2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_2}}\overline{\varphi}(\vec{p}_2)e^{-ip_2x}$.

Функция $\overline{\varphi}(\vec{p}_2)$ – импульсное представление волновой функции $\overline{\psi}_{p_2}(x)$, которая в формализме Даффина – Кеммера определяется следующим образом:

$$\overline{\varphi}(\vec{p}_2) = -\frac{i}{2}\left(\varepsilon^{10} - \frac{i}{m}p_{2\mu}\varepsilon^{1\mu}\right),$$

где ε^{AB} – элементы полной матричной алгебры, которые удовлетворяют соотношениям:

$$(\varepsilon^{AB})_{DC} = \delta_{AD}\delta_{BC},$$

$$\varepsilon^{AB}\ \varepsilon^{CD} = \delta_{BC}\varepsilon^{AD},$$

индексы A, B, C, D пробегают значения от 0 до 4.

В результате получим

$$S_{fi} = (-i)\int \overline{\psi}_{p_2}(x')V^{(\alpha_E, \beta_M)}(x')d^4x'. \quad (1.11)$$

Используя граничные условия [9], [10], [11] и перекрёстную симметрию, выражение (1.11) можно представить в виде:

$$S_{fi} = \frac{im\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2\sqrt{4\omega_1\omega_2 E_1 E_2}}M. \quad (1.12)$$

В выражении (1.12) амплитуда комптоновского рассеяния представляется выражением:

$$\begin{gathered} M = \frac{2\pi}{m}\overline{\varphi}(p_2)\left\{\left[\hat{k}_2\, e_\mu^{(\lambda_2)} - k_{2\mu}\,\hat{e}^{(\lambda_2)}\right]\times\right. \\ \times\left[k_{1\mu}(e^{(\lambda_1)}P) - (k_1\, P)e_\mu^{(\lambda_1)}\right] + \\ + \left[k_{2\mu}(e^{(\lambda_2)}P) - (k_2\, P)e_\mu^{(\lambda_2)}\right]\times \end{gathered}$$

$$\times\left[\hat{k}_1 e_\mu^{(\lambda_1)} - k_{1\mu}\hat{e}^{(\lambda_1)}\right]\Bigg\}(\alpha_E + \beta_M)\varphi(p_1) +$$

$$+2\pi\beta_M \bar{\varphi}(p_2)\left[k_{2\mu}e_\nu^{(\lambda_2)} - k_{2\nu}e_\mu^{(\lambda_2)}\right]\times$$

$$\times\left[k_{1\mu}e_\nu^{(\lambda_1)} - k_{1\nu}e_\mu^{(\lambda 1)}\right]\varphi(p_1).$$

В этом выражении $e_\mu^{(\lambda_1)}$ и $e_\mu^{(\lambda_2)}$ – векторы поляризации начального и конечного фотонов, $P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, k_1, p_1 и k_2, p_2 – импульсы начальных, конечных фотонов и пионов соответственно.

В системе покоя начального пиона амплитуда M с учётом электрического заряда и поляризуемостей с точностью до второго порядка по частоте фотонов принимает вид [12]:

$$M = \left(-\frac{e^2}{m} + 4\pi\omega^2\alpha_E\right)(\vec{e}^{(\lambda_2)}\vec{e}^{(\lambda_1)}) +$$

$$+4\pi\omega^2\beta_M\left(\left[\vec{n}_2\vec{e}^{(\lambda_2)}\right]\cdot\left[\vec{n}_1\vec{e}^{(\lambda_1)}\right]\right),$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – единичные вектора, направленные по $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, что согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния на пионе.

2 Выводы

В формализме Даффина – Кеммера на основе принципа калибровочной инвариантности определены в ковариантной форме лагранжиан и уравнение движения пиона в электромагнитном поле с учётом его электрической и магнитной поляризуемостей.

На основе решения уравнения взаимодействия пиона с электромагнитным полем, полученного методом функции Грина, определена амплитуда комптоновского рассеяния с учётом отдачи и поляризуемостей пиона.

Показано, что разработанный ковариантный формализм Лагранжа для взаимодействия низкоэнергетических фотонов с пионом согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carlson*, *C.E.* Constraining off-shell effects using low-energy Compton scattering / C.E. Carlson, M. Vanderhaeghen // [Electronic resource]. – 2011. – Mode of access: http://physics.atom-ph/1109.3779. – Date of access: 04.10.2011.

2. *Birse*, *M.C.* Proton polarisability contribution to the Lamb shift in mnonic hydrogen at fourth order in chiral perturbation theory / M.C. Birse, J.A. McGovern // [Electronic resource]. – 2012. – Mode of access: http:// hep-ph/1206.3030. – Date of access: 15.08.2012].

3. *Moroz*, *L.G.* Scattering matrix taking into account the interaction Pauli / L.G. Moroz, F.I. Fedorov // ZhETF. – 1960. – Vol. 2, № 39. – P. 293–303.

4. *Maksimenko*, *N.V.* Polarizability and gyration elementary particles / N.V. Maksimenko, L.G. Moroz // Problems of atomic science and technology. Series: General and nuclear physics. – 1979. – № 4 (10). – P. 26–27.

5. *Levchuk*, *M.I.* The nucleon gyration as one of nucleon electromagnetic structure characteristics / M.I. Levchuk, L.G. Moroz // Proc. Academy of Sciences of BSSR. Ser. fiz.-mat. navuk. – 1985. – № 1. – P. 45–54.

6. *Андреев*, *В.В.* Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевом подходе / В.В. Андреев, Н.В.Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 7–11.

7. *Максименко*, *Н.В.* Ковариантное определение поляризуемости адронов спина единица / Н.В. Максименко // Доклады Академии наук Беларуси. – 1992. – Т. 36. – № 6. – С. 508–510.

8. *Андреев*, *В.В.* Ковариантные уравнения движения в электромагнитном поле частиц спина с учетом поляризуемостей / В.В. Андреев, Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова // 4 конгресс физиков Беларуси. Гл. ред. С.Я. Килин и др. – Минск : Ковчег, 2013. – С. 19–20.

9. *Baryshevsky*, *V.G.* Nuclear optics of polarized media / V.G. Baryshevsky // M. : Energoatomizdat, 1995. – 315 p.

10. *Bogush*, *A.A.* Introduction in the calibration of the field theory of electroweak interactions / A.A. Bogush // Minsk : Science and technology, 1987. – 359 p.

11. *Bjorken*, *J.D.* Relativistic quantum field theory / J.D. Bjorken, E.D. Drell // M. : Science. – 1978. – Vol. 1. – 295 p.

12. *Петрунькин*, *В.А.* Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т.12. – Вып. 3. – С. 692–753.

Поступила в редакцию 26.08.13.