

УДК 517.925

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.П. Мартынов¹, О.Н. Парманчук², В.М. Пецевич¹¹Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно²Гродненский государственный аграрный университет, Гродно

ON A CROSS SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS

I.P. Martynov¹, O.N. Parmanchuk², V.M. Peceovich¹¹Y. Kupala Grodno State University, Grodno²Grodno State Agrarian University, Grodno

В статье рассмотрена перекрестная система двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной и четвертой степени относительно переменных специального вида. Найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений данной системы.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, упрощенное дифференциальное уравнение.

The article deals with the cross-system of the two differential equations of the second degree and fourth-degree derivative of the variables. The necessary and sufficient conditions for the Painlevé property for solutions of the system are found.

Keywords: system of the differential equations, property of Painlevé, simplified differential equation.

Введение

В работе [1] рассмотрена система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + \\&+ y(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0), \\y'^2 &= c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 + \\&+ x(d_3y^3 + d_2y^2 + d_1y + d_0),\end{aligned}$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{0,3}$ – функции аналитические от t при ограничениях

$$\begin{aligned}|a_3| + |b_3| &\neq 0, \\|c_3| + |d_3| &\neq 0, \\|b_3| + |b_2| + |b_1| + |b_0| &\neq 0, \\|d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| &\neq 0.\end{aligned}$$

Для удобства изучения аналитических свойств системы она была разбита на 4 случая. В случае $b_0 = 0, b_3 = 0, a_3 \neq 0$ найдены необходимые и достаточные условия, при которых данная система не имеет подвижных критических особых точек.

В данной работе продолжим исследование решений системы на наличие свойства Пенлеве в случае $a_0 = K_0b_0, a_3 = K_1b_3, b_0 \neq 0, b_3 \neq 0$, где K_0, K_1 – некоторые постоянные.

1 Используемые результаты

Для дальнейшего исследования нам потребуются

Лемма 1.1 [2]. Для того чтобы уравнение

$(x'' + A(t, x, x'))^n = B(t, x, x')$, где $n = 2, 3, \dots$, A, B – рациональные по x, x' и локально аналитические от t функции, не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы A и B были полиномами по x' степени 2 и $2n$ соответственно.

Лемма 1.2 [3] (правило степени $n + \frac{1}{2}$).

Пусть в дифференциальном уравнении второго порядка второй степени

$$w''^2 = E(w', w, z)w'' + F(w', w, z): w' = p \text{ и}$$

$\Delta(p, w, z) = E^2 + 4F = 4(G(p, w, z))^{2m+1}K(p, w, z)$, где m – неотрицательное целое число и E, F, G, K голоморфны по всем трём комплексным переменным в некоторой области D . Предположим далее, что G имеет, по крайней мере, один простой нуль вида $p = \mu(w, z)$ или $y = v(z)$, где $K \neq 0$ и μ, v не дают особенностей для K^{-1} . Тогда необходимым условием для отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения

$$w''^2 = E(w', w, z)w'' + F(w', w, z)$$

есть $G_z + pG_w + \frac{1}{2}EG_p = 0$ для всех простых нулей G .

2 Необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= K_1 b_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + K_0 b_0 + \\&+ y(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \\y'^2 &= c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 + \\&+ x(d_3 y^3 + d_2 y^2 + d_1 y + d_0),\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $b_0 \neq 0, b_3 \neq 0, |c_3| + |d_3| \neq 0, |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0, a_i, a_2, b_i, c_i, d_i, i = 0, 3$ – функции аналитические от t , K_0, K_1 – некоторые постоянные. С помощью линейного преобразования

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{b_3}}, y \rightarrow y - K_1,$$

аналитической замены независимой переменной и сохранения для коэффициентов прежних обозначений можно записать

$$\begin{aligned}x'^2 &= a_2 x^2 + a_1 x + K_0 b_0 + \\&+ y(x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0), \\y'^2 &= c_3 y^3 + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 + \\&+ x(d_3 y^3 + d_2 y^2 + d_1 y + d_0),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}b_0 &\neq 0, |c_3| + |d_3| \neq 0, \\|d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| &\neq 0.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Построив из системы (2.2) уравнения относительно переменных x и y и требуя для них выполнения условий леммы 1.1, получим следующие соотношения между коэффициентами системы:

$$\begin{aligned}d_0 &= 0, a'_2 = 0, a_0 b'_0 - a'_0 b_0 = 0, \\a_0 b'_1 - a'_0 b_1 + a_1 b'_0 - a'_1 b_0 &= 0, \\a_0 b'_2 - a'_0 b_2 + a_1 b'_1 - a'_1 b_1 + a_2 b'_0 - a'_2 b_0 &= 0, \\a_1 b'_2 - a'_1 b_2 + a_2 b'_1 - a'_2 b_1 - a'_0 &= 0, \\a_2 b'_2 - a'_2 b_2 &= 0, a_2^2 b_0 c_2 - a_0 b_0^2 c_1 + b_0^3 c_0 - a_0^3 c_3 = 0, \\3b_0^2 b_1 c_0 - 3a_0^2 a_1 c_3 + a_0^2 b_1 c_2 - a_1 b_0^2 c_1 + 2a_0 a_1 b_0 c_2 - \\&- a_0 b_0^2 d_1 + a_0^2 b_0 d_2 - 2a_0 b_0 b_1 c_1 - a_0^3 d_3 = 0, \\3b_0^2 b_2 c_0 - 3a_0 a_1^2 c_3 + 2a_0 a_1 b_1 c_2 - 2a_0 b_0 b_2 c_1 - \\&- 3a_0^2 a_1 d_3 + 3b_0 b_0^2 c_0 + a_1^2 b_0 c_2 - a_1 b_0^2 c_1 - \\&- 2a_0 b_0 b_1 d_1 - a_1 b_0^2 d_1 - 2a_1 b_0 b_1 c_1 + \\&+ a_0^2 b_2 c_2 + 2a_0 a_2 b_0 c_2 + a_0^2 b_1 d_2 - \\&- a_0 b_0^2 c_1 - 3a_0^2 a_2 c_3 + 2a_0 a_1 b_0 d_2 = 0, \\-a_1 b_1^2 c_1 - 2a_0 b_0 c_1 - 3a_0^2 a_2 d_3 - 3a_0 a_1^2 d_3 + \\&+ a_1^2 b_0 d_2 + a_0^2 b_2 d_2 - a_2 b_0^2 d_1 - \\&- a_0 b_1^2 d_1 + 3b_0^2 b_2 d_0 + 3b_0 b_1^2 d_0 + a_1^2 b_1 c_2 - \\&- a_1^3 c_3 + a_0^2 c_2 + 3b_0^2 c_0 + b_1^3 c_0 -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-6a_0 a_1 a_2 c_3 + 2a_1 a_2 b_0 c_2 + 2a_0 a_2 b_1 c_2 + \\&+ 2a_0 a_1 b_2 c_2 - 2a_2 b_0 b_1 c_1 - 2a_1 b_0 b_2 c_1 - \\&- 2a_0 b_1 b_2 c_1 - 2a_1 b_0 b_1 d_1 - 2a_0 b_0 b_2 d_1 + \\&+ 2a_0 a_2 b_0 d_2 + 2a_0 a_1 b_1 d_2 + 6b_0 b_1 b_2 c_0 = 0, \\&2a_0 a_1 c_2 - a_2 b_1^2 c_1 - 2a_1 b_0 c_1 - 2a_0 b_1 c_1 - \\&- a_0 b_2^2 c_1 + 6b_0 b_1 c_0 + 3b_0 b_2^2 c_0 - 2a_2 b_0 b_1 d_1 + \\&+ 3b_1^2 b_2 c_0 + a_1^2 b_1 d_2 - a_1 b_1^2 d_1 - 2a_0 b_0 d_1 - \\&- 3a_1^2 a_2 c_3 + a_1^2 b_2 c_2 + a_2^2 b_0 c_2 - \\&- 3a_2^2 a_0 c_3 - a_1^3 d_3 + a_0^2 d_2 + 2a_2 a_1 b_1 c_2 + \\&+ 2a_0 a_2 b_2 c_2 - 2a_2 b_0 b_2 c_1 - 2a_1 b_1 b_2 c_1 - \\&- 2a_1 b_0 b_2 d_1 - 2a_0 b_1 b_2 d_1 - 6a_0 a_1 a_2 d_3 + \\&+ 2a_1 a_2 b_0 d_2 + 2a_0 a_2 b_1 d_2 + 2a_0 a_1 b_2 d_2 = 0, \\&-c_2^3 + a_2 c_2^2 d_3 - a_1 c_3 d_2^2 + a_2 c_3^2 d_1 - \\&- a_1 c_1 d_3^2 + 3a_0 d_1 d_3^2 + 3a_0 d_2^2 d_3 - \\&- 6c_1 c_2 c_3 + b_3 c_2^2 d_2 - b_1 c_2 d_2^2 - b_1 c_0 d_3^2 - \\&- 3c_0 c_3^2 - 2b_1 c_1 d_2 d_3 + 6b_0 d_1 d_2 d_3 + \\&+ b_0 d_2^3 + 2a_2 c_2 c_3 d_2 + 2a_2 c_1 c_3 d_3 - \\&- 2a_1 c_3 d_1 d_3 - 2a_1 c_2 d_2 d_3 + 2b_2 c_2 c_3 d_1 + \\&+ 2b_2 c_1 c_3 d_2 + 2b_2 c_0 c_3 d_3 + 2b_2 c_1 c_2 d_3 - \\&- 2b_1 c_3 d_1 d_2 - 2b_1 c_2 d_1 d_3 = 0, \\&-a_0 d_1 + 3b_2^2 c_0 - 2a_1 b_2 d_1 + 2a_2 a_1 d_2 - \\&- 2b_2 c_1 + a_2^2 c_2 - a_1 c_1 + a_2^2 b_2 d_2 - \\&- a_2 b_2^2 d_1 + 3b_1 c_0 - a_2^3 d_3 - 2a_2 b_1 d_1 = 0, \\2a_2 c_0 c_1 d_1 + a_2 c_0^2 d_2 - a_1 c_0 d_1^2 - 3c_0^2 c_1 + b_2 c_0^2 d_1 &= 0, \\-2a_2 b_0 c_1 - 2a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2^2 c_1 - 2a_0 b_2 c_1 + \\&+ 6b_0 b_2 c_0 + 3b_1 b_2^2 c_0 - 3a_0 a_2^2 d_3 - \\&- 3a_1^2 a_2 d_3 + a_2^2 b_0 d_2 + a_1^2 b_2 d_2 + 2a_0 a_1 d_2 - \\&- a_2 b_1^2 d_1 - 2a_1 b_0 d_1 - 2a_0 b_1 d_1 - \\&- a_0 b_2^2 d_1 + 2a_2 a_0 c_2 - 3a_1 a_2 c_3 + a_2^2 b_1 c_2 + \\&+ a_1^2 c_2 + 3b_1^2 c_0 + 2a_1 a_2 b_2 c_2 - \\&- 2a_2 b_0 b_2 d_1 - 2a_1 b_1 b_2 d_1 + 2a_1 a_2 b_1 d_2 + \\&+ 2a_0 a_2 b_2 d_2 - 2a_2 b_1 b_2 c_1 = 0, \\&-a_2^3 c_3 - 2a_2 b_0 d_1 + a_2^2 b_1 d_2 - 2a_1 b_2 c_1 - a_2 b_2^2 c_1 + \\&+ 2a_1 a_2 c_2 - a_1 b_2^2 d_1 - a_0 c_1 + 2a_0 a_2 d_2 - 2a_2 b_1 b_2 d_1 + \\&+ 2a_1 a_2 b_2 d_2 + 3b_0 c_0 - 3a_1 a_2^2 d_3 - \\&- 2a_0 b_2 d_1 + b_2^3 c_0 + 6b_1 b_2 c_0 + a_1^2 d_2 - \\&- 2a_1 b_1 d_1 + a_2^2 b_2 c_2 - 2a_2 b_1 c_1 = 0, \\&-a_2 c_1 - 2a_2 b_2 d_1 + 3b_2 c_0 - a_1 d_1 + a_2^2 d_2 = 0, \\&-a_2 d_1 + c_0 = 0, \\c_0 d'_1 - c'_0 d_1 = 0, c_1 d'_1 - c'_1 d_1 + c_0 d'_2 - c'_0 d_2 &= 0, \\c_3 d'_3 - c'_3 d_3 = 0, \\c_2 d'_1 - c'_2 d_1 + c_0 d'_3 - c'_0 d_3 + c_1 d'_2 - c'_1 d_2 &= 0, \\-c_0^3 + a_2 c_0^2 d_1 = 0,\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& c_1 d_3' - c_1' d_3 + c_2 d_2' - c_2' d_2 + c_3 d_1' - c_3' d_1 = 0, \\
& c_2 d_3' - c_2' d_3 + c_3 d_2' - c_3' d_2 = 0, \\
& a_2 c_1^2 d_1 + a_2 c_0^2 d_3 - a_1 c_1 d_1^2 + b_2 c_0^2 d_2 - \\
& - b_1 c_0 d_1^2 + a_0 d_1^3 - 3 c_0^2 c_2 - 3 c_0 c_1^2 + \\
& + 2 a_2 c_0 c_2 d_1 + 2 a_2 c_0 c_1 d_2 - 2 a_1 c_0 d_1 d_2 + 2 b_2 c_0 c_1 d_1 = 0, \\
& - c_1^3 + a_2 c_1^2 d_2 - a_1 c_2 d_1^2 - a_1 c_0 d_2^2 + 3 a_0 d_1^2 d_2 - \\
& - 6 c_0 c_1 c_2 + b_2 c_1^2 d_1 + b_2 c_0^2 d_3 - b_1 c_1 d_1^2 + b_0 d_1^3 - \\
& - 3 c_0^2 c_3 + 2 a_2 c_0 c_3 d_1 + 2 a_2 c_1 c_2 d_1 + 2 a_2 c_0 c_2 d_2 + \\
& + 2 a_2 c_0 c_1 d_3 - 2 a_1 c_1 d_1 d_2 - 2 a_1 c_0 d_1 d_3 + 2 b_2 c_0 c_2 d_1 + \\
& + 2 b_2 c_0 c_1 d_2 - 2 b_1 c_0 d_1 d_2 = 0, \\
& a_2 c_2^2 d_1 + a_2 c_1^2 d_3 - a_1 c_3 d_1^2 - a_1 c_1 d_2^2 + 3 a_0 d_1^2 d_3 + \\
& + 3 a_0 d_1 d_2^2 - 6 c_0 c_1 c_3 + b_2 c_1^2 d_2 - b_1 c_2 d_1^2 - b_1 c_0 d_2^2 + \\
& + 3 b_0 d_0^2 d_2^2 + 3 b_0 d_1^2 d_2 - 3 c_1^2 c_2 - 2 b_1 c_1 d_1 d_2 - \\
& - 3 c_0 c_2^2 + 2 a_2 c_1 c_3 d_1 + 2 a_2 c_0 c_3 d_2 + \\
& + 2 a_2 c_1 c_2 d_2 + 2 a_2 c_0 c_2 d_3 - 2 b_1 c_0 d_1 d_3 - 2 a_1 c_1 d_1 d_3 - \\
& - 2 a_1 c_2 d_1 d_2 - 2 a_1 c_0 d_2 d_3 + 2 b_2 c_0 c_3 d_1 + \\
& + 2 b_2 c_1 c_2 d_1 + 2 b_2 c_0 c_2 d_2 + 2 b_2 c_0 c_1 d_3 = 0, \\
& a_2 c_2^2 d_2 - a_1 c_2 d_2^2 - a_1 c_0 d_3^2 - 6 c_0 c_2 c_3 + b_2 c_2^2 d_1 + \\
& + b_2 c_1^2 d_3 - b_1 c_3 d_1^2 - 2 b_1 c_0 d_2 d_3 - b_1 c_1 d_2^2 + \\
& + 3 b_0 d_1^2 d_3 + 3 b_0 d_1 d_2^2 + a_0 d_2^3 - 3 c_1^2 c_3 - \\
& - 3 c_1 c_2^2 + 2 a_2 c_2 c_3 d_1 - 2 b_1 c_1 d_1 d_3 + 2 a_2 c_1 c_3 d_2 + \\
& + 2 a_2 c_0 c_0 d_3 + 2 a_2 c_1 c_2 d_3 - 2 a_1 c_3 d_1 d_2 - 2 a_1 c_2 d_1 d_3 - \\
& - 2 b_1 c_2 d_1 d_2 - 2 a_1 c_1 d_2 d_3 + 6 a_0 d_1 d_2 d_3 + 2 b_2 c_1 c_3 d_1 + \\
& + 2 b_2 c_0 c_3 d_2 + 2 b_2 c_1 c_2 d_2 + 2 b_2 c_0 c_2 d_3 = 0, \\
& - 2 a_1 c_3 d_2 d_3 + b_2 c_3^2 d_1 - 2 b_1 c_3 d_1 d_3 - 2 b_1 c_2 d_2 d_3 - \\
& - b_1 c_3 d_2^2 + 2 a_2 c_2 c_3 d_3 - 3 c_2^2 c_3 + 3 b_0 d_1 d_3^2 - \\
& - b_1 c_1 d_3^2 + 3 b_0 d_2^2 d_3 - a_1 c_2 d_3^2 - 3 c_1 c_3^2 + b_2 c_2^2 d_3 + \\
& + 3 a_0 d_2 d_3^2 + 2 b_2 c_2 c_3 d_2 + a_2 c_3^2 d_2 + 2 b_2 c_1 c_3 d_3 = 0, \\
& a_0 d_3^3 + 3 b_0 d_2 d_3^2 - 2 b_1 c_3 d_2 d_3 + b_2 c_3^2 d_2 - \\
& - a_1 c_3 d_3^2 - 3 c_2 c_3^2 + a_2 c_3^2 d_3 - b_1 c_2 d_3^2 + 2 b_2 c_2 c_3 d_3 = 0, \\
& - c_3^2 - b_1 c_3 d_3^2 + b_0 d_3^3 + b_2 c_3^2 d_3 = 0.
\end{aligned}$$

Для компоненты x из (2.2) построим уравнение вида $(x'' + A(t, x, x'))^2 = B(t, x, x')$, в котором, полагая $x = \varepsilon^{-1} X$, $t = t_0 + \varepsilon \tau$ при $\varepsilon = 0$, получим упрощенное дифференциальное уравнение $X'' - \left(\frac{3}{2} - \lambda \frac{\sqrt{d_3}}{2} \right) \frac{X'^2}{X} = 0$, где $\lambda^2 = 1$. Для однозначности решения последнего уравнения необходимо требовать [4] $d_3 = 0$ или $d_3 = 1$. Подставив $d_3 = 0$ в ранее полученные соотношения (2.4) для коэффициентов системы, получим $c_3 = 0$, что противоречит условиям (2.3). Поэтому необходимо требовать

$$d_3 = 1. \quad (2.5)$$

Построим из системы (2.2) уравнения относительно переменных x и y и потребуем для них выполнения условий леммы 1.2. Тогда с учетом (2.5) получим следующие соотношения между коэффициентами системы (2.2):

$$\begin{aligned}
& -4 d_1 + d_2^2 = 0, \\
& 2 b_2 d_2^2 - 8 b_2 d_1 + 2 a_2 d_2 + 2 c_2 d_2 - 4 c_1 - 4 c_3 d_1 = 0, \\
& 2 b_1 d_2^2 - 8 b_2 c_3 d_1 + 2 a_2 b_2 d_2 - 4 c_1 c_3 - 3 a_2^2 + \\
& + 2 a_1 d_2 + 2 a_2 c_2 - 8 b_1 d_1 + c_2^2 - 4 b_2^2 d_1 = 0, \\
& 2 a_1 c_3 d_2 - 8 b_1 c_1 + 2 b_2 c_2^2 - 8 b_1 c_3 d_1 - 4 b_2^2 c_1 + \\
& + 4 b_1 c_2 d_2 + 2 a_1 c_2 + 2 a_2 b_2 c_3 d_2 + 2 a_1 b_2 d_2 + \\
& + 2 a_2 c_2 c_3 + 2 a_2 b_1 d_2 + 2 b_1 b_2 d_2^2 - 8 b_0 d_1 + 2 b_2^2 c_2 d_2 + \\
& + 2 b_0 d_2^2 - 6 a_2^2 c_3 - 8 b_2 c_1 c_3 - 6 a_1 a_2 - 8 b_1 b_2 d_1 = 0, \\
& b_1^2 d_2^2 + b_2^2 c_2^2 + 2 b_1 c_2^2 - 3 a_1^2 - 3 a_2^2 c_3^2 + 2 a_2 b_1 c_2 + \\
& + 2 a_1 b_2 c_2 + 2 a_1 b_2 c_3 d_2 + 2 a_2 b_1 c_3 d_2 + 2 a_2 b_2 c_2 c_3 + \\
& + 2 K_0 b_0 b_2 d_2 + 2 a_2 b_0 d_2 - 8 b_1 b_2 c_3 d_1 - 8 b_0 b_2 d_1 - \\
& - 8 b_1 b_2 c_1 - 12 a_1 a_2 c_3 + 2 a_1 b_1 d_2 + 4 b_1 b_2 c_2 d_2 - 8 b_1 c_1 c_3 + \\
& + 2 b_0 b_2 d_2^2 + 2 K_0 b_0 c_2 + 2 a_1 c_2 c_3 - 6 K_0 b_0 a_2 - 4 b_1^2 d_1 + \\
& + 4 b_0 c_2 d_2 - 8 b_0 c_1 - 8 b_0 c_3 d_1 - 4 b_2^2 c_1 c_3 + 2 K_0 b_0 c_3 d_2 = 0, \\
& - 8 b_0 c_1 c_3 - 4 b_1^2 c_1 d_3 + 2 b_0 b_1 d_2^2 - 4 b_1^2 c_3 d_1 - \\
& - 6 a_1 a_2 c_3^2 - 6 K_0 b_0 a_1 + 2 b_1 b_2 c_2^2 + 2 K_0 b_0 c_2 c_3 - \\
& - 6 a_1^2 c_3 d_3 + 2 b_1^2 c_2 d_2 + 2 b_0 c_2^2 + 2 a_1 b_0 d_2 + \\
& + 2 a_1 b_1 c_3 d_2 + 2 a_1 b_2 c_2 c_3 + 2 a_2 b_0 c_3 d_2 + \\
& + 2 K_0 b_0 b_1 d_2 + 2 K_0 b_0 b_2 c_2 - 8 b_0 b_2 c_3 d_1 - \\
& - 8 b_1 b_2 c_1 c_3 - 8 b_0 b_1 d_1 - 8 b_0 b_2 c_1 + 4 b_0 b_2 c_2 d_2 + \\
& + 2 a_2 b_0 c_2 + 2 a_1 b_1 c_2 + 2 a_2 b_1 c_2 c_3 + \\
& + 2 K_0 b_0 b_2 c_3 d_2 - 12 K_0 b_0 a_2 c_3 = 0, \\
& - 6 K_0 b_0 a_2 c_3^2 + 2 a_1 b_0 c_2 + 2 a_2 b_0 c_2 c_3 + 2 K_0 b_0 b_2 c_2 c_3 + \\
& + 2 b_0 b_2 c_2^2 - 4 b_0^2 d_1 - 8 b_0 b_1 c_3 d_1 + 2 K_0 b_0 b_1 c_2 + \\
& + 4 b_0 b_1 c_2 d_2 + 2 K_0 b_0^2 d_2 + b_0^2 d_2^2 - 8 b_0 b_2 c_1 c_3 + \\
& + 2 a_0 b_1 c_3 d_2 + 2 a_1 b_1 c_2 c_3 - 8 b_0 b_1 c_1 - 3 a_0^2 - 12 K_0 a_1 b_0 c_3 + \\
& + b_1^2 c_2^2 - 4 c_1 b_1^2 c_3 - 3 a_1^2 c_3^2 + 2 a_1 b_0 c_3 d_2 = 0, \\
& 6 K_0^2 b_0^2 c_3 + 2 b_0 b_1 c_2^2 + 2 K_0 b_0^2 c_3 d_2 - 8 b_0 b_1 c_1 c_3 - \\
& - 4 b_0^2 c_1 d_3 - 4 b_0^2 c_3 d_1 - 6 K_0 b_0 a_1 c_3^2 + 2 K_0 b_0 b_1 c_2 c_3 + \\
& + 2 K_0 b_0^2 c_2 + 2 a_1 b_0 c_2 c_3 + 2 b_0^2 c_2 d_2 = 0, \\
& - 3 K_0^2 c_3^2 b_0^2 + 2 K_0 b_0^2 c_2 c_3 - 4 b_0^2 c_1 c_3 + b_0^2 c_2^2 = 0, \\
& - 6 c_2 c_3 + 2 b_2 c_3 d_2 + 2 a_2 c_3 + 2 b_2 c_2 - \\
& - 4 a_1 + 2 b_2^2 d_2 + 2 a_2 b_2 - 8 b_1 d_2 = 0, \\
& 2 b_2^2 d_1 + 2 b_2 c_2 d_2 + 2 a_2 c_3 d_2 - 8 b_1 d_1 - 8 a_1 d_2 - \\
& - 3 c_2^2 + b_2^2 d_2^2 + a_2^2 + 2 a_2 c_2 + 2 b_2 c_3 d_1 - 6 c_1 c_3 + \\
& + 2 b_2 c_1 + 4 a_2 b_2 d_2 - 4 b_1 d_2^2 = 0, \\
& 2 b_2 c_2 d_1 + 2 b_2^2 d_1 d_2 + 2 a_2^2 d_2 - 4 a_1 d_2^2 - 6 c_0 c_3 + \\
& + 4 a_2 b_2 d_1 - 8 a_1 d_1 + 2 b_2 c_1 d_2 - 8 b_1 d_1 d_2 + 2 a_2 c_1 + \\
& + 2 a_2 c_3 d_1 + 2 b_2 c_0 + 2 a_2 c_2 d_2 + 2 a_2 b_2 d_2^2 - 6 c_1 c_2 = 0,
\end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
&4a_2b_2d_1d_2 + 2a_2c_0 + b_2^2d_1^2 + a_2^2d_2^2 + 2a_2c_2d_1 + \\
&+ 2a_2^2d_1 - 6c_0c_2 - 3c_1^2 + 2b_2c_0d_2 - 8a_1d_1d_2 + \\
&+ 2b_2c_1d_1 - 4b_1d_1^2 + 2a_1c_1d_2 = 0, \\
&2a_2b_2d_1^2 + 2a_2c_0d_2 - 4a_1d_1^2 - 6c_0c_1 + \\
&+ 2a_2c_1d_1 + 2a_2^2d_1d_2 + 2b_2c_0d_1 = 0, \\
&-3c_3^2 + 2b_2c_3 - 4b_1 + b_2^2 = 0, \\
&(-c_0 + a_2d_1)(3c_0 + a_2d_1) = 0.
\end{aligned}$$

Разрешая соотношения (2.4) и (2.6) с учетом условий (2.3) и (2.5), получим следующие наборы решений:

$$\begin{aligned}
a_1 &= K_0K_1b_2 - K_0K_1^2, \quad a_2 = K_0K_1, \quad c_3 = K_1, \\
d_0 &= 0, \quad d_1 = \frac{d_2^2}{4}, \quad b_0 = \frac{1}{4}K_1(b_2 - K_1)^2, \\
b_1 &= \frac{1}{2}K_1b_2 - \frac{3}{4}K_1^2 + \frac{1}{4}b_2^2,
\end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= K_0K_1 \frac{d_2^2}{4}, \\
c_1 &= \frac{1}{4}K_1d_2^2 + K_0K_1d_2, \\
c_2 &= K_0K_1 + K_1d_2; \\
a_1 &= 0, \quad a_2 = 0, \quad b_0 = K_1^3, \quad b_1 = 3K_1^2, \\
b_2 &= 3K_1, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}K_1d_2^2, \\
c_2 &= K_1d_2, \quad c_3 = K_1, \quad d_0 = 0, \quad d_1 = \frac{d_2^2}{4}; \\
a_1 &= K_0K_1b_2 + K_1, \quad a_2 = K_0K_1, \\
b_0 &= \frac{1}{4}K_1(b_2 - K_1)^2, \quad c_0 = K_0K_1d_1, \\
c_1 &= \frac{1}{2}c_2d_2 - \frac{1}{4}K_1d_2^2 + \frac{1}{2}K_0K_1d_2, \\
b_1 &= \frac{1}{2}K_1b_2 - \frac{3}{4}K_1^2 + \frac{1}{4}b_2^2, \\
c_2 &= 4K_1d_2 - 3K_0K_1 - b_2d_2, \\
c_3 &= K_1, \quad d_0 = 0, \quad d_1 = \frac{d_2^2}{4},
\end{aligned} \quad (2.8)$$

где $d_2 = \frac{4K_0K_1}{3K_1 - b_2}$, $b_2 \neq 3K_1$, K_0, K_1 – некоторые постоянные.

Подставляя (2.7)–(2.9) в (2.2), соответственно получим системы:

$$x'^2 = \left(x + \frac{b_2 - K_1}{2}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
y'^2 &= \left(y + \frac{d_2}{2}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1); \\
x'^2 &= (x + K_1)^3 y, \\
y'^2 &= y \left(y + \frac{d_2}{2}\right)^2 (x + K_1);
\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
x'^2 &= \left(x + \frac{b_2 - K_1}{2}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1), \\
y'^2 &= \left(y - \frac{2K_0K_1}{b_2 - 3K_1}\right)^2 (xy + K_1y + K_0K_1), \quad (2.12) \\
b_2 &\neq 3K_1.
\end{aligned}$$

Выполняя линейные преобразования относительно независимых переменных x и y в системах (2.10)–(2.12) получим, что справедлива

Теорема 2.1. Для того чтобы у решений системы (2.2) с условиями (2.3) отсутствовали подвижные многозначные особенности, необходимо, чтобы она линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к виду

$$\begin{aligned}
x'^2 &= (x + b)^2 (xy + H), \\
y'^2 &= (y + d)^2 (xy + H),
\end{aligned} \quad (2.13)$$

где H – постоянная, b, d – функции аналитические от t .

Из системы (2.13) для компоненты y построим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
&(2y(y + d)y'' - (4y + d)y'^2 - 2d'yy' + \\
&+ (y + d)^2 (-by^2 + 2Hy + Hd)) \times \\
&\times (2y(y + d)y'' - (2y + d)y'^2 - 2d'yy' + \\
&+ (y + d)^2 (by^2 + Hd)) = 0,
\end{aligned}$$

которое распадается на два. Рассмотрим первое из них

$$\begin{aligned}
&2y(y + d)y'' - (4y + d)y'^2 - 2d'yy' + \\
&+ (y + d)^2 (-by^2 + 2Hy + Hd) = 0.
\end{aligned} \quad (2.14)$$

Пусть $d \neq 0$. Выполняя в уравнении (2.14) замену переменной по формуле $y = -\frac{du}{u + 1}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}
u'' &= \frac{u'^2}{2u} - \frac{2d'}{d}uu' - \frac{d'^2}{2d^2}u^3 - \frac{dd'' - d'^2}{d^2}u^2 + \\
&+ \frac{bd^3 + Hd^2 - 2dd'' + 3d'^2}{2d^2}u - \frac{H}{2u}.
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Согласно [5], уравнение (2.15) обладает свойством Пенлеве, если $d = M_1 e^{M_2 t}$, где M_1, M_2 – некоторые постоянные.

Если $d = 0$, то, выполняя в уравнении (2.14) замену переменной по формуле $y = \frac{1}{u}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u'' = Hu + \frac{b}{2},$$

которое обладает свойством Пенлеве [4].

Рассмотрим второе уравнение

$$2y(y+d)y'' - (2y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(by^2 + Hd) = 0. \quad (2.16)$$

Пусть $d \neq 0$. Выполняя в уравнении (2.16) замену переменной по формуле $y = -\frac{du}{u-1}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1} \right) u'^2 + u(u-1) \times \left(\frac{H}{2u^2} - \frac{H}{2u} - \frac{bd}{2(u-1)} + \frac{d'^2}{2d^2}u + \frac{2dd'' - 3d'^2}{2d^2} \right). \quad (2.17)$$

Согласно [5], для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (2.17) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $b = M_3 e^{M_4 t}$, $d = M_5 e^{M_6 t}$, где M_i , $i = \overline{3, 6}$ – некоторые постоянные.

Если $d = 0$, то, выполняя в уравнении (2.16) замену переменной по формуле $y = \frac{1}{u}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка $u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{b}{2}$, которое обладает свойством Пенлеве [4], если $b = M_7 e^{M_8 t}$, M_7, M_8 – некоторые постоянные.

Объединяя результаты исследования системы (2.13) для компоненты y , и учитывая, что

$$x = -\frac{y'^2 + Hy^2 + 2Hdy + Hd^2}{y(y^2 + 2dy + d^2)},$$

заключаем, что справедлива

Теорема 2.2. Для того чтобы система (2.2) с ограничениями (2.3) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она

линейным преобразованием x и y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к виду (2.13) с ограничениями $b = Ke^{Lt}$, $d = Me^{Nt}$, где K, L, M, N – некоторые постоянные.

Заключение

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых система (2.2) с ограничениями (2.3) не имеет подвижных критических особых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парманчук, О.Н. Аналитические свойства решений одной перекрестной системы двух дифференциальных уравнений / О.Н. Парманчук // Вестник ГрГУ. Сер. 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление, биология. – 2011. – № 2. – С. 35–41.
2. Березкина, Н.С. О системе двух дробно-линейных дифференциальных уравнений степени n со свойством Пенлеве / Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 1–6.
3. Cosgrove, C. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.
4. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИ, 1939. – 719 с.
5. Bureau, F. Differential equations with fixed critical points / F. Bureau // Ann. di Math. Sci. – 1964. – Vol. 64. – P. 229–364.

Поступила в редакцию 03.06.13.