УДК 535.23

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МОЛЕКУЛЯРНОЙ СРЕДЕ

Б. М. Смирнов и *Г. В. Шляпников*

В рамках статистической теории найдена функция распределения по оптическим толщинам для слоя молекулярного газа. Проведено сравнение параметров переноса инфракрасного излучения в молекулярной среде, полученных на основе статистической модели, с точным при условиях, когда возможно точное решение задачи. На основе развитого подхода к статистической модели найдены параметры переноса инфракрасного излучения в слое молекулярного газа переменной температуры. Полученные результаты могут быть использованы для расчета потоков излучения в атмосферах планет.

Спектр поглощения молекулярного газа или смеси молекулярного газа в инфракрасной области состоит из большого числа линий, отвечающих определенным колебательно-вращательным или вращательным переходам молекул. При давлениях газа, не превышающих атмосферное давление, ширина спектральной линии отдельного перехода значительно меньше разности частот соседних переходов. В этом случае коэффициент поглощения молекулярной среды имеет осцилляционную структуру, причем его значения в центре соответствующего перехода и в промежутке между двумя соседними переходами могут сильно различаться. Это усложняет теорию переноса инфракрасного излучения в молекулярной среде, и для правильного понимания физической картины используются модельные представления коэффициента поглощения молекулярного газа.

Одним из способов описания переноса инфракрасного излучения в молекулярной среде в случае, когда коэффициент поглощения имеет сложный вид, основан на статистической модели полосы (под полосой обычно понимают совокупность большого числа спектральных линий). В статистической модели полосы задана средняя плотность отдельных линий в рассматриваемом частотном интервале, а также распределение интенсивностей в этих линиях. При этом полагается, что положение центров соответствующих линий в данном интервале частот носит случайный характер. Последнее обстоятельство позволяет относительно простым способом определить параметры переноса излучения через слой молекулярного газа. К таким параметрам относятся функция поглощения A — средняя вероятность поглощения фотона слоем газа — и поток излучения J, создаваемый этим слоем в данном интервале частот. На основании статистической модели в существующем виде [1, 2] эти характеристики определяются при постоянной температуре слоя. В данной работе развит иной подход к статистической модели полосы, что позволяет обобщить ее на случай слоя газа с переменной температурой. Кроме того, проведено сравнение результатов статистической модели с точными результатами в тех случаях, когда возможно точное решение задачи.

§ 1. Функция распределения по оптическим толщинам

Оптическая толщина слоя газа, параметры которого зависят только от его высоты, вводится на основе соотношения

$$u = \int_0^L k_\omega(z)\,dz, \tag{1}$$

где $k_\omega(z)$ — коэффициент поглощения на высоте z, L — высота всего слоя. Коэффициент поглощения на заданной частоте является суммой коэффициентов поглощения за счет отдельных переходов

$$k_\omega = \sum_i S_i a(\omega - \omega_i), \tag{2}$$

где S_i — интенсивность линии отдельного перехода, ω_i — центр линии этого перехода, а $a(\omega - \omega_i)$ — функция распределения фотонов, испускаемых в результате рассматриваемого перехода, по частотам. Эта функция нормирована условием $\int a(\omega - \omega_i)\,d\omega = 1$ и содержит наиболее резкую зависимость от частоты. В частности, для линейных молекул, когда излучение создается колебательно-вращательными переходами, индекс i отвечает вращательному квантовому числу и коэффициент поглощения имеет регулярную структуру. Центры спектральных линий переходов приходятся на частоты $\hbar\omega_j = \hbar\omega_0 \pm 2Bj$ ($\hbar\omega_0$ — энергия колебательного возбуждения, B — вращательная постоянная, j — наибольшее значение вращательного момента из двух, отвечающих состояниям, между которыми происходит данный переход). При медленном изменении интенсивности линий с частотой формула (2) для коэффициента поглощения принимает вид [3]

$$k_\omega = S(\omega) \sum_j a(\omega - \omega_j). \tag{3}$$

Формула для плавной функции $S(\omega)$, дающей зависимость интенсивности линий от частоты, приведена в [3]. При лорентцовской форме спектральной линии $a_\omega = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{[(\omega-\omega_j)^2 + (\gamma/2)^2]}$ (γ — ширина линии) теорема Миттага—Лефлера [4] позволяет произвести суммирование, которое дает для коэффициента поглощения

$$k_\omega = \frac{S(\omega)}{\delta} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\gamma}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\gamma}{\delta} - \cos\frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\delta}}, \tag{4}$$

δ — расстояние между соседними линиями. Эта функция является квазипериодической с периодом δ, причем ее значения в соседних максимумах или минимумах близки в силу вида функции $S(\omega)$. Такое представление коэффициента поглощения является модификацией регулярной модели Эльзассера [5, 6], согласно которой спектр состоит из равноудаленных линий одинаковой интенсивности и формы. В рассматриваемых условиях, когда ширина линии $\gamma \ll \delta$, отношение коэффициентов поглощения в соседних максимуме и минимуме составляет $(2\delta/\pi\gamma)^2$, т. е. много больше единицы.

Коэффициент поглощения газа линейных молекул введен нами как пример простейшего реального случая, когда возможно точное решение задачи. С этим случаем в дальнейшем мы будем сравнивать результаты статистической модели.

В рамках статистической модели введем функцию распределения $f(u)$ так, что величина $f(u)$ представляет собой вероятность того, что оптическая толщина слоя в рассматриваемой области частот сосредоточена в интервале от u до $u+du$.[1] На основе выражения (2) для коэффициента поглощения, считая, что заданное положение i-го перехода носит случайный характер, определим искомую функцию $f(u)$. Для этого используем метод, разработанный в статистической теории уширения спектральных линий [9].

Введем характеристическую функцию

$$\chi(t) = \int_0^\infty e^{itu} f(u)\, du = \prod_i \int_0^\infty e^{itu_i} p(u_i)\, du_i = \prod_i \chi_i(t), \tag{5}$$

$\chi_i(t)$ — характеристическая функция оптической толщины u_i, создаваемой i-линией, $p(u_i)\,du_i$ — вероятность того, что u_i имеет значение в пределах от u_i до $u_i + du_i$. Здесь было использовано, что $f(u) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_i p(u_i) \times \delta\left(u - \sum_i u_i\right) du_i$ (полная оптическая толщина слоя $u = \sum_i u_i$). Обращая формулу (5), получим для вероятности данного значения u

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\, e^{-itu} dt. \tag{6}$$

Рассмотрим большое число линий в интервале частот $\Delta\omega$. Вероятность того, что оптическая толщина слоя газа за счет i-й линии имеет величину от u_i до $u_i + du_i$, равна $d\omega_i/\Delta\omega$ ($d\omega_i$ — интервал частот, в котором оптическая толщина меняется от u_i до $u_i + du_i$). Отсюда находим характеристическую функцию величины u_i

$$\chi_i(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \int e^{itu_i(\omega_i)} d\omega_i = 1 + \frac{1}{\Delta\omega} \int d\omega_i \left[e^{itu_i(\omega_i)} - 1\right].$$

Поскольку при $\Delta\omega \to \infty$ величина $\chi_i(t) \to 1$, то в этом предельном случае

$$\ln \chi_i(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \int d\omega_i \left[e^{itu_i(\omega_i)} - 1\right],$$

отсюда $\ln \chi(t) = \sum_i \ln \chi_i(t) = \frac{\Delta\omega}{\delta} \ln \chi_i(t)$, где δ — среднее расстояние между линиями. При получении данного соотношения было использовано, что $\chi_i(t)$ одинакова для всех линий. На основе этого соотношения и формулы (6) получаем искомую функцию распределения

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-itu - \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{itSLa_\omega}\right) d(\omega - \omega_0)\right] dt, \tag{7}$$

где $a_\omega \equiv a(\omega - \omega_0)$, а величина SLa_ω представляет собой оптическую толщину слоя u_i за счет отдельной линии (для простоты записи считается, что интенсивность и форма линии не зависят от точки пространства). Если имеется некоторое распределение линий по интенсивностям $P(S)$ $\left(\int_0^\infty P(S) \times dS = 1\right)$, то формула (7) преобразуется к виду

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-itu - \frac{1}{\delta} \int_0^\infty P(S)\, dS \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{itSLa_\omega}\right) d(\omega - \omega_0)\right] dt. \tag{8}$$

---

[1] Функция $f(u)$ была впервые введена и найдена в рамках регулярной модели в работах [7, 8]. Данная работа является дальнейшим развитием этого метода.

С помощью функции распределения $f(u)$ вычислим функцию поглощения A

$$A = \int_0^\infty (1 - e^{-u}) f(u)\, du. \tag{9}$$

Подставляя в это выражение формулу (8) и вычисляя интеграл по du, имеем

$$A = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+it)} \exp\left[-\frac{1}{\delta} \int_0^\infty P(S)\, dS \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{itSLa_\omega})\, d(\omega - \omega_0) \right].$$

Выражая интеграл по dt через вычет в полюсе $t = i$, получим для функции поглощения

$$A = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\delta} \int_0^\infty P(S)\, dS \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-SLa_\omega})\, d(\omega - \omega_0) \right]. \tag{10}$$

Это выражение совпадает с результатами, получаемыми в рамках обычной статистической модели [1, 2].

§ 2. Сравнение результатов статистической модели с точным решением

В этом параграфе мы сравним результаты, которые дает статистическая модель полосы, с точным в случае, когда излучательная способность газа определяется полосой, соответствующей одному колебательному переходу линейной молекулы, с лоренцовским контуром спектральной линии. Коэффициент поглощения молекулярного газа в рассматриваемой ситуации определяется формулой (4) (регулярная модель). Функция распределения по оптическим толщинам может быть найдена отсюда с учетом того, что заданному расстоянию от центра соответствующего перехода отвечает определенная оптическая толщина слоя, а вероятность попадания в интервал частот от ω до $\omega + d\omega$ пропорциональна величине этого интервала [8]. Это дает для функции распределения по оптическим толщинам в пределах $\gamma/\delta \ll 1$, $\frac{2}{\pi}\int_0^L \frac{S(z)}{\gamma(z)}\, dz \gg 1$ (последнее условие означает, что оптическая толщина слоя в максимумах спектральных линий велика)

$$f(u) = \frac{1}{\pi u} \sqrt{\frac{\beta}{u - \beta}} \tag{11}$$

при $u \geqslant \beta$ и нуль при всех других значениях u. Параметр $\beta = \frac{\pi}{2\delta^2} \int_0^L S(z) \times \gamma(z)\, dz$ представляет в данном случае оптическую толщину слоя в минимумах. Формула (7) в этом случае дает

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(ut - \sqrt{\frac{2\beta t}{\pi}} \right) \exp\left(-\sqrt{\frac{2\beta t}{\pi}} \right) dt. \tag{12}$$

При $\beta \ll 1$ основной вклад в интеграл (9) вносят значения $u \gg \beta$. В этом пределе функции (11) и (12) совпадают и равны $\beta^{1/2}/\pi u^{3/2}$. Поэтому функции поглощения регулярной и статистической модели в данном предельном случае также совпадает.

Сравним результаты обоих подходов к расчету эффективной ширины полосы поглощения $\Delta\omega_{погл.} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A[\beta(\omega)]\, d(\omega - \omega_0)$ и интегрального по частотам потока излучения. С учетом того, что ширина области энергий фотонов, излучаемых слоем газа, значительно меньше его температуры, интегральный по частотам поток излучения изотермического плоского слоя равен

$$J = 2j_{\omega_0}(T) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d(\omega - \omega_0) \int\limits_{0}^{1} \cos\Theta A\left[\frac{\beta(\omega)}{\cos\theta}\right] d\cos\Theta, \tag{13}$$

где

$$j_{\omega_0}(T) = \frac{\hbar\omega_0^3}{4\pi^2 c^2}\left[e^{\frac{\hbar\omega_0}{T}} - 1\right]^{-1}$$

поток излучения в единичном интеграле частот от абсолютно черного тела температуры T [10]. Величину $\Delta\omega_{исп.} = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d(\omega - \omega_0)\int\limits_{0}^{1} \cos\theta A\left[\frac{\beta(\omega)}{\cos\theta}\right] \times$ $\times\, d\cos\theta$ будем называть эффективной шириной молекулярной полосы испускания. Заметим, что эффективная ширина полосы поглощения $\Delta\omega_{погл.}$ представляет собой полуширину полосы испускания под прямым углом к поверхности слоя.

Используем известные значения функций поглощения $A_{рег.} = \operatorname{erf}\sqrt{\beta}$, $A_{стат.} = 1 - e^{2\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}}$ и зависимость $\beta(\omega)$, определяемую формулой работы [3]. В предельном случае $\beta_m \ll 1$ (β_m — максимальное значение параметра β) результаты регулярной и статистической моделей совпадают

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hbar\Delta\omega_{погл.}}{2\sqrt{BT}} &= 4\left(\frac{e}{\pi^2}\right)^{1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\beta_m} = 3.55\sqrt{\beta_m},\\ \frac{\hbar\Delta\omega_{исп.}}{2\sqrt{\beta T}} &= \frac{16}{3}\left(\frac{e}{\pi^2}\right)^{1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\beta_m} = 4.73\sqrt{\beta_m}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$\Gamma(3/4)$ — гамма-функция Эйлера. В другом предельном случае $\beta_m \gg 1$ статистическая модель дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hbar\Delta\omega_{погл.}}{2\sqrt{BT}} &= 2y_0,\ \beta(y_0) = \frac{\pi}{4e^{2C}} = 0.247,\\ \frac{\hbar\Delta\omega_{исп.}}{2\sqrt{BT}} &= 2y_1,\ \beta(y_1) = \frac{\pi}{4e^{2C+1/2}} = 0.15, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$C = 0.577$ — постоянная Эйлера. Это несколько отличается от результатов регулярной модели [3], согласно которой $\beta(y_0) = 0.141$, а $\beta(y_1) = 0.085$.

В таблице представлены численные значения ширины полосы испускания и поглощения в случае одного колебательного перехода, когда зависимость интенсивностей линий от частоты определяется соотношением, приведенным в [3]. Проведенное в данной таблице сравнение результатов статистической модели и регулярной, которая при данных условиях является точной, позволяет определить точность статистической модели при наличии одной полосы (одного колебательного перехода). В случае наложения полос нескольких переходов условия статистической модели выполняются лучше. Таким образом, на основании данных таблицы мы можем оценивать точность статистической модели в общем случае перекрывания полос, когда точное решение задачи весьма затруднительно.

Используем статистическую модель для нахождения ширины зоны поглощения и испускания в случае перекрывания нескольких полос с лоренцовской формой спектральной линии. Интегрируя в формуле (10) по частоте в отдельной линии для каждого из переходов и подставляя полученную функцию поглощения в формулу (12), имеем

$$\frac{\hbar\Delta\omega_{\text{исп.}}}{2\sqrt{BT}} = \int dy. \tag{16}$$

Интеграл в (16) берется по области значений y, где выполняется соотношение

$$\sum_k \beta_k^{1/2} \geqslant \frac{\pi^{1/2}}{2e^{C+\frac{1}{4}}} = 0.387, \tag{17}$$

β_k — параметры β для отдельной полосы. Формула (16) справедлива в том случае, если имеется область частот, где значения β_k велики.

При перекрывании нескольких полос используемая характеристика $\Delta\omega_{\text{исп.}}$ — эффективная ширина полосы испускания — может потерять практический смысл, поскольку была введена нами в случае, когда $\Delta\omega_{\text{исп.}} \leqslant \omega$ и $\hbar\Delta\omega_{\text{исп.}} \ll T$. Если имеет место перекрывание нескольких полос, то эти соотношения могут нарушаться. Тогда поток инфракрасного излучения, испускаемый слоем газа, равен

$$J = \int_{\Delta\omega} j_\omega d\omega. \tag{18}$$

Здесь j_ω — по-прежнему поток излучения (13) с поверхности абсолютно черного тела заданной температуры, а интеграл берется по области частот, где выполняется соотношение (17).

Полученные результаты оказываются справедливы и при нахождении ширины зоны поглощения с той разницей, что формулу (17) следует заменить формулой $\sum_k \beta_k^{1/2}(y) \geqslant 0.497$.

§ 3. Излучение плоского слоя газа переменной температуры

Введенная ранее функция распределения по оптическим толщинам слоя позволяет получить более полную информацию о переносе инфракрасного излучения в молекулярной среде. В частности, в данном параграфе в рамках статистической модели мы определим поток излучения плоского слоя пе-

		β_m																	
		0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	1	2	4	6	10	20	40	60	100	200	400	600	1000
$\frac{\hbar\Delta\omega_{\text{погл.}}}{2\sqrt{BT}}$	Регулярная модель	0.78	1.09	1.52	2.07	2.45	2.96	3.63	4.12	4.46	4.75	5.09	5.40	5.56	5.76	6.02	6.26	6.40	6.56
	Статистическая модель	0.72	0.99	1.33	1.75	2.04	2.45	3.01	3.60	3.92	4.29	4.73	5.09	5.28	5.50	5.77	6.03	6.18	6.35
$\frac{\hbar\Delta\omega_{\text{исп.}}}{2\sqrt{BT}}$	Регулярная модель	1.04	1.44	1.95	2.57	2.97	3.46	4.05	4.39	4.63	4.94	5.27	5.56	5.70	5.88	6.14	6.36	6.48	6.63
	Статистическая модель	0.93	1.25	1.65	2.13	2.43	2.85	3.43	3.86	4.15	4.47	4.87	5.23	5.42	5.65	5.95	6.20	6.35	6.51

ременной температуры. Решение этой задачи имеет практическое отношение к проблеме переноса излучения в атмосферах Земли и планет.

Будем считать, что температура медленно меняется по высоте слоя и в каждой точке поддерживается термодинамическое равновесие. В этом случае формула для потока излучения на данной частоте [11, 12]

$$J_\omega = 2\int_0^\infty f(u)\,du \int_0^1 d\cos\Theta \int_0^u j_\omega [T(z)]\, e^{-\frac{u'}{\cos\Theta}} du'. \tag{19}$$

Здесь $u'(z)$ — оптическая толщина слоя от данной точки z до границы выхода излучения, u — оптическая толщина всего слоя.

Далее мы будем вычислять поток излучения (19), а также поток излучения под прямым углом к поверхности слоя. Идея вычисления этих потоков состоит в следующем. Излучение в основном испускается слоем некоторой толщины. При наших условиях в этой области температура слоя, а следовательно, и поток $j_\omega[T(z)]$ мало меняются. Потому, производя разложение по соответствующему малому параметру, мы сведем задачу к излучению плоского слоя постоянной температуры, соответствующей температуре слоя на некоторой высоте.

Вычислим искомые потоки излучения. Будем считать, что оптическая толщина меняется с высотой слоя по закону $u'=uF(z)$ и разложим плавную функцию $j_\omega[T(z)]$ по степеням $F(z)$ в окрестности некоторой высоты слоя z_1 с точностью до квадратичного члена. Оптимальную высоту слоя z_1 определим из условия равенства нулю интеграла от линейного члена разложения.

В том случае, когда ширина спектральной линии значительно меньше расстояния между соседними линиями, использование формулы (7) для функции распределения $f(u)$ дает (с учетом только нулевого члена разложения)

$$J_\omega = 2j_\omega [T(z_1)] \int_0^1 A\left(\frac{\beta}{\cos\Theta}\right) \cos\Theta\, d\cos\Theta, \tag{20}$$

где функция поглощения $A(\beta) = 1 - \exp(-2\sqrt{\beta/\pi})$, а высота слоя z_1, на которой берется температура, входящая в выражение для J_ω, определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} F(z_1(\beta)) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}, \quad \beta \ll 1, \\ F(z_1(\beta)) &= \frac{\pi}{3\beta}, \quad \beta \gg 1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Используя аналогичным образом регулярную модель с функцией распределения $f(u) = (1/\pi u)\sqrt{\beta/(u-\beta)}$, получим

$$\left.\begin{aligned} F[z_1(\beta)] &= \frac{1}{3} - \frac{4}{15}\beta, \quad \beta \ll 1, \\ F(z_1(\beta)] &= \frac{1}{3\beta}, \quad \beta \gg 1. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Поток излучения здесь также определяется формулой (20), но с функцией поглощения $A = \operatorname{erf}\sqrt{\beta}$. Оценим вклад в интеграл (19) от квадратичного члена разложения. В реальной ситуации это позволит оценить точность выражения (20) для потока излучения. В случае статистической модели получим

$$J_\omega = \begin{cases} \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} \left\{ j_\omega \left[T(z_1) + \dfrac{2}{45} \dfrac{d^2 j_\omega}{dF^2}\Big|_{z=z_1} \right\}, \quad \beta \ll 1, \right. \\ j_\omega [T(z_1)] + \dfrac{23\pi^2}{72\beta^2} \dfrac{d^2 j_\omega}{dF^2}\Big|_{z=z_1}, \quad \beta \gg 1, \end{cases} \tag{23}$$

а в случае регулярной модели

$$J_\omega=\begin{cases}\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}\left\{j_\omega\left[T(z_1)\right]+\dfrac{2}{45}\left.\dfrac{d^2j_\omega}{dF^2}\right|_{z=z_1}\right\}, & \beta\ll 1,\\ j_\omega\left[T(z_1)\right]+\dfrac{19}{144\beta^2}\left.\dfrac{d^2j_\omega}{dF^2}\right|_{z=z_1}, & \beta\gg 1.\end{cases}\tag{24}$$

При этом высота слоя z_1, для которой берется температура, дается соответственно формулами (21) и (22).

В частности, для потока исходящего излучения атмосферы Земли, когда оптическая толщина остающегося слоя экспоненциально падает с высотой ($F=e^{-z/L}$), имеем $\frac{d^2j_\omega}{dF^2}=\frac{1}{F^2}\left(L\frac{dj_\omega}{dz}+L^2\frac{d^2j_\omega}{dz^2}\right)$, а зависимость j_ω от высоты слоя выражается через его зависимость от температуры. В этом случае при $\beta\gg 1$ формулы (23) и (24) преобразуются к виду: $J_\omega=j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{23}{8}\left.\left(L^2\frac{d^2j_\omega}{dz^2}+L\frac{dj_\omega}{dz}\right)\right|_{z=z_1}$ для статистической модели и $J_\omega=j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{19}{16}\left.\left(L^2\frac{d^2j_\omega}{dz^2}+L\frac{dj_\omega}{dz}\right)\right|_{z=z_1}$ для регулярной модели. При $\beta\ll 1$ обе модели дают

$$J_\omega=\frac{8}{3}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}\left\{j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{2}{5}\left.\left(L^2\frac{d^2j_\omega}{dz^2}+L\frac{dj_\omega}{dz}\right)\right|_{z=z_1}\right\}.$$

Подробные результаты для потока излучения под прямым углом к поверхности слоя имеют вид: статистическая модель

$$\left.\begin{aligned}I_\omega&=4\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}\left\{j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{2}{45}\left.\frac{d^2j_\omega}{dF^2}\right|_{z=z_1}\right\}, \quad F(z_1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \beta\ll 1,\\ I_\omega&=2j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{5}{4}\frac{\pi^2}{\beta^2}\left.\frac{d^2j_\omega}{dF^2}\right|_{z=z_1}, \quad F(z_1)=\frac{\pi}{2\beta}, \quad \beta\gg 1;\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

регулярная модель

$$\left.\begin{aligned}I_\omega&=4\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2}\left\{j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{2}{45}\left.\frac{d^2j_\omega}{dF^2}\right|_{z=z_1}\right\}, \quad F(z_1)=\frac{1}{3}-\frac{4}{45}\beta, \quad \beta\ll 1,\\ I_\omega&=2j_\omega\left[T(z_1)\right]+\frac{1}{2\beta^2}\left.\frac{d^2j_\omega}{dF^2}\right|_{z=z_1}, \quad F(z_1)=\frac{1}{2\beta}, \quad \beta\gg 1.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Интегральный по частотам поток излучения можно определить из соотношения $J=\int\limits_0^\infty J_\omega d\omega$. Хотя все предыдущие соотношения (20)—(26) были получены для одной полосы, в рамках статистической модели они справедливы и при перекрывании нескольких полос. В этом случае надо использовать параметр $\beta(\omega)$, просуммированный по всем полосам.

К определению интегрального по частотам потока излучения можно подойти по-другому, вычисляя оптимальную температуру для всей полосы. Искомый поток излучения равен потоку излучения изотермического слоя этой температуры. В случае одной полосы, проводя такое же разложение, как и ранее, и интегрируя в формуле (20) по частотам с учетом зависимости $\beta(\omega)$, характерной для линейных молекул [3], получим в рамках статистической модели для высоты слоя, которой соответствует оптимальная температура,

$$\left.\begin{aligned}F(z_1)&=\frac{1}{3}-\frac{e^{1/4}}{8\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{2\beta_m}{\pi}\right)^{1/2}=\frac{1}{3}-0.104\sqrt{\beta_m}, \quad \beta_m\ll 1,\\ F(z_1)&=\frac{1}{2y_1^2}, \quad \beta(y_1)=0.15, \quad \beta_m\gg 1.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Это не сильно отличается от результата регулярной модели

$$\left.\begin{aligned} F(z_1) &= \frac{1}{3} - \frac{8}{45}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{e^2}{3}\right)^{1/4}\beta_m = \frac{1}{3} - 0.164\beta_m, \ \beta_m \ll 1, \\ F(z_1) &= \frac{1}{y_1^2}\left(1 - \frac{2}{3}C\right) = \frac{0.615}{y_1^2}, \ \beta(y_1) = 0.085, \ \beta_m \gg 1. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Близость результатов статистической и регулярной моделей показывает, что и в случае слоя газа переменной температуры статистическая модель является хорошим приближением.

Следует отметить, что хотя расчеты, проведенные в §§ 2 и 3 относились к лорентцовскому контуру спектральной линии, их можно обобщить и на произвольный контур. Такое обобщение повлечет за собой лишь ряд трудностей математического характера.

§ 4. Инфракрасное излучение углекислого газа атмосферы Земли

В данном параграфе мы продемонстрируем возможность использования полученных результатов для реального случая — излучения углекислого газа в атмосфере Земли. Эта задача рассматривалась многократно [13–16] с использованием полуэмпирических методов и путем трудоемких машинных расчетов. При этом не могла быть получена за-

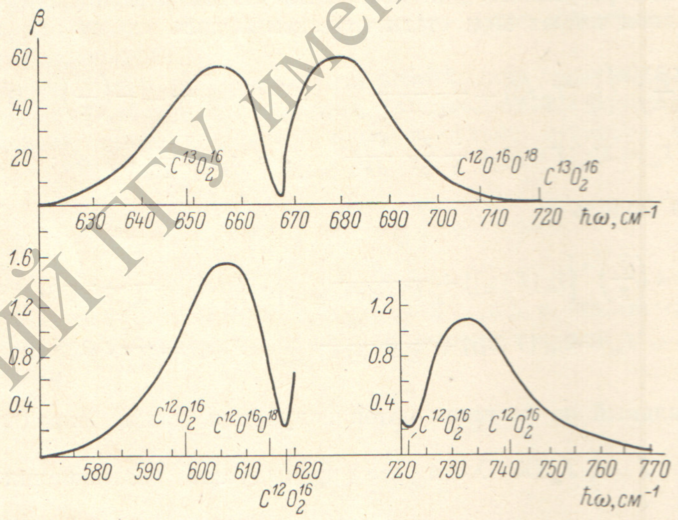

Рис. 1. Зависимость $\beta(\omega)$ для углекислого газа атмосферы Земли.

ω — частота излучения в см$^{-1}$, штрихами отмечены нулевые частоты основных колебательных переходов молекулы углекислого газа и ее изотопов.

висимость результата от характерных параметров задачи. Разработанные здесь методы позволяют это сделать и оценить точность расчета.

На рис. 1 представлена зависимость $\beta(\omega)$ в области инфракрасного спектра 570—770 см$^{-1}$. В этой области излучение связано с несколькими колебательными переходами молекулы CO_2, параметры которых подробно исследованы [13, 17]. На рис. 2 приведена высота слоя, температуру которого следует подставлять в формулу для потока излучения, уходящего за пределы атмосферы на данной частоте. Существенной является точность, которую дает предлагаемый метод при расчете потоков излучения, создаваемых атмосферой Земли. Ошибки расчета связаны с пренебрежением квадратичным и следующими членами разложения по малому параметру, который определяется малым изменением температуры в слое. Эта ошибка может быть оценена по вкладу квадратичных членов в потоки излучения (23) и (25). Для потока излучения, создаваемого углекислым газом атмосферы и направленного на поверхность Земли, отношение вклада квадратичных членов к учитываемым здесь первым двум членам разложения дает $1.16/\beta^2$ в области частот, где оптическая толщина атмосферы велика. Максимальное значение β равно 60, градиент температуры у поверхности Земли для стандартной атмосферы [13] равен 6.5 град/км. Поскольку поток излучения определяется в основном

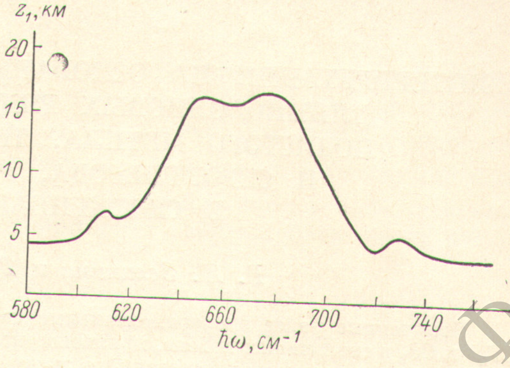

Рис. 2. Зависимость оптимальной высоты z_1 в атмосфере Земли (температура атмосферы на этой высоте входит в формулу (30) для потока исходящего инфракрасного излучения) от частоты ω.

частотами, для которых $\beta \gg 1$, ошибка метода невелика. Для интегрального по частотам потока излучения на поверхность Земли эта ошибка составляет 2%, для потока излучения под прямым углом — 7%. Погрешность в расчете интегрального по частотам потока излучения атмосферы, создаваемого углекислым газом и уходящего за пределы Земли, составляет 4%. Эта погрешность одинакова для полного потока и потока выходящего под прямым углом, ибо для стандартной атмосферы на высотах 12—20 км градиент температуры равен нулю, и погрешность метода определяется областью частот, где оптическая толщина атмосферы мала ($\beta(\omega) \ll 1$). Если бы на высотах 12—20 км имелся градиент температуры 1 град/км, то погрешность расчета полного потока излучения увеличилась бы до 10%, а потока излучения под прямым углом — до 30%.

Авторы благодарны Г. М. Шведу за ценные дискуссии.

Литература

[1] R. M. Goody. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., *78*, 165, 1952.
[2] G. N. Plass. J. Opt. Soc. Am., *48*, 690, 1958.
[3] Б. М. Смирнов, Г. В. Шляпников. ТВТ, *14*, 26, 1976.
[4] Э. Т. Уиттеккер, Д. Н. Ватсон. Курс современного анализа. ФМ, М., 1963.
[5] W. M. Elsasser. Phys. Rev., *54*, 126, 1938.
[6] W. M. Elsasser. Harvard Meteor. Studies, Harvard Univ. Press, 1942.
[7] J. C. Stewart, I. Kuscer, N. J. McCormick. Ann. Phys., *40*, 321, 1966.
[8] A. Arking, K. Grossman. J. Atm. Sciences, *29*, 937, 1972.
[9] О. Б. Фирсов. ЖЭТФ, *21*, 627, 1951.
[10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. «Наука», М., 1964.
[11] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. «Наука», М., 1966.
[12] Б. М. Смирнов. Физика слабоионизованного газа. «Наука», М., 1972.
[13] Р. М. Гуди. Атмосферная радиация. «Мир», М., 1966.
[14] G. Yamamoto, T. Sasamori. Sci. Rep. Tohoku Univ., ser. 5, Gepphysics, *11*, 149, 1959.
[15] S. Manabe, R. M. Wetherald. J. Atm. Sci., *24*, 241, 1967.
[16] Л. Р. Ракипова, О. Н. Вишнякова. Метеорология и гидрология, № 5, 23, 1973.
[17] S. R. Dryson, C. Young. Univ. of Michigan, College of Engineering Tech. Rep. 08183-1-T, November, 1967.

Поступило в Редакцию 8 октября 1975 г.