

УДК 535.42

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВОПОДОБНЫХ ПУЧКОВ. II. НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## POLARIZING AND POWER PROPERTIES OF VECTORIAL GAUSSIAN-LIKE BEAMS. II. NON-HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Формализм для описания векторных параксиальных световых пучков распространен на гауссовоподобные пучки с неоднородной поляризацией, включая общие ТМ и ТЕ моды. Предложены простые выражения для поляризации и плотности потока энергии электромагнитного поля таких пучков. Проведенное графическое моделирование поляризационных и энергетических свойств векторных гауссовоподобных ТМ пучков подтверждает и дополняет аналитические расчеты.

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, векторные пучки, гауссовоподобные пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, ТЕ моды, ТМ моды, неоднородная поляризация.

The formalism for the description of vector paraxial light beams is extended to Gaussian-like with non-homogeneous polarization, including the general TM and TE modes. Simple expressions for polarization and the energy flux density of an electromagnetic field of such beams are discovered. The carried-out graphic modeling of polarizing and power properties of vector Gaussian-like TM beams confirms and calculations supplements analytical.

**Keywords:** paraxial beams, vector beams, Gaussian-like beams, polarizable properties, energy properties, TE modes, TM modes, non-homogeneous polarization.

**Введение**

Часто нужно учитывать векторный характер световых полей. Нами был предложен формализм и найдены [1]–[3] выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных параксиальных пучков. В [4] обсуждены векторные однородно поляризованные гауссовоподобные пучки. В настоящей работе этот формализм распространен на векторные параксиальные гауссовоподобные пучки с неоднородной поляризацией. В разделе 2 найдены выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных гауссовоподобных ТЕ и ТМ мод. В разделе 3 проведены аналитические расчеты и графическое моделирование поляризационных и графических свойств для определенного типа ТМ мод.

**1 Общий формализм для описания векторных гауссовоподобных параксиальных пучков**

Под гауссовоподобным пучком мы понимаем пучок, амплитуда которого аподизирована гауссианом для того, чтобы пучок переносил конечную мощность. Комплексная амплитуда  $\mathbf{E}_\perp = G\mathbf{h}_\perp$  содержит гауссиан  $G = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q}\right)$  и является некоторым решением параксиального параболического уравнения

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)\mathbf{E}_\perp = 0. \quad (1.1)$$

Обобщая результаты [1]–[4] находим, что полные векторы электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей гауссовоподобного пучка имеют вид

$$\mathbf{E} = G \left( \mathbf{h}_\perp + \left( \frac{i\nabla_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} - \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right);$$

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} G \left( [\mathbf{e}_z, \mathbf{h}_\perp] + \left( -\frac{i}{k} [\nabla_\perp, \mathbf{h}_\perp] + \frac{[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{h}_\perp]}{q} \right) \right).$$

Всегда можно разложить произвольный вектор  $\mathbf{E}_\perp$  по ортогональному базису ( $\mathbf{E}_\perp = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$ ) и ввести комплексный параметр поляризации соотношением  $\eta = \eta' + i\eta'' = E_y / E_x$ . Сейчас, согласно Федорову [5], можно ввести комплексный угол ( $\psi' + i\psi''$ ) соотношением  $\eta = \operatorname{tg}(\psi' + i\psi'')$ , тогда азимут эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс равен  $\psi'$ , а ее эллиптичность  $\gamma$  выражается как  $\gamma = \operatorname{th} \psi''$ . При численных расчетах удобно пользоваться формулами [6]:

$$\operatorname{tg} 2\psi' = \frac{2\eta'}{1 - |\eta|^2}; \quad \operatorname{th} 2\psi'' = \frac{2\eta''}{1 + |\eta|^2}.$$

Если параметр  $\eta$  является константой, то имеем однородно поляризованные пучки. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и изучались нами в [4].

Плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока энергии светового гауссовоподобного пучка можно записать, как [7]

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |G\mathbf{h}_\perp|^2; \quad S_z = \frac{c}{n} w = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} |G\mathbf{h}_\perp|^2;$$

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c}{8\pi n} \operatorname{Re}(\varepsilon \mathbf{E}_\perp^* \cdot \mathbf{E}_z + \mu \mathbf{H}_\perp^* \cdot H_z),$$

где символ  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть выражения,  $*$  – комплексное сопряжение.

## 2 Векторные гауссовоподобные ТМ и ТЕ моды

Простейшими примерами неоднородно поляризованных мод являются ТЕ и ТМ моды векторного гауссова пучка [3], имеющие соответственно азимутальную и радиальную поляризацию и обладающие орбитальным потоком энергии. В общем случае, однако, у ТЕ и ТМ мод векторы поляризации имеют и азимутальную, и радиальную составляющие. Поперечные потоки энергии таких мод также содержат одновременно и азимутальные, и радиальные компоненты.

Рассмотрим теперь векторные гауссовоподобные ТЕ и ТМ моды. Решения векторного параболического уравнения (1.1) возьмем в форме  $\mathbf{E}_\perp = G\mathbf{h}_\perp$ , где

$$\mathbf{h}_\perp = \frac{ik\mathbf{r}_\perp}{q} + \nabla_\perp f. \quad (2.1)$$

Заметим, что сама функция  $f$  не удовлетворяет уравнению (1.1). Теперь можно воспользоваться общими выражениями для векторных гауссовоподобных пучков раздела 1. Поляризация векторов поля гауссовоподобных ТЕ и ТМ мод следующая:

$$\mathbf{E}^{(TM)} = G \left( \mathbf{h}_\perp + \left( \frac{i\nabla_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} - \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right);$$

$$\mathbf{H}^{(TM)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TE)}; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}^{(TE)} = G [\mathbf{e}_z, \mathbf{h}_\perp]; \quad \mathbf{H}^{(TE)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TM)}.$$

Усредненные по времени плотности энергии  $w$  и потока энергии  $\mathbf{S}$  электромагнитного поля обоих пучков ТЕ и ТМ мод соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |G|^2 |\mathbf{h}_\perp|^2; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} |G|^2 \operatorname{Re} \left( \mathbf{h}_\perp^* \cdot \left( -\frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{h}_\perp}{q} + \frac{i\nabla_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} \right) \right).$$

ТЕ и ТМ моды для круговых гауссовых пучков обсуждались нами в [8]. Здесь, в качестве примера, возьмем  $f = x/q$  в (2.1) и обсудим более общие ТЕ и ТМ моды. Для упрощения анализа целесообразно перейти к безразмерным переменным [4]. Используя характерные продольный масштаб  $q_0''$  и поперечный масштаб  $w_0$ , введем безразмерные нормированные переменные

$$X = \frac{x}{w_0}; \quad Y = \frac{y}{w_0}; \quad Z = \frac{z}{q_0''}; \quad \mathbf{R}_\perp = \frac{\mathbf{r}_\perp}{w_0}.$$

В безразмерных величинах комплексный параметр пучка  $Q$  и гауссиан  $G$ :

$$Q = Z - i; \quad G = \frac{1}{Q} \exp \left( \frac{i\mathbf{R}_\perp^2}{Q} \right);$$

$$|G|^2 = \frac{1}{|Q|^2} \exp \left( \frac{-\mathbf{R}_\perp^2}{|Q|^2} \right).$$

Векторы поля рассматриваемых гауссовоподобных ТЕ и ТМ мод равны

$$\mathbf{E}^{(TM)} = \frac{G}{Q} \left[ \frac{2iX\mathbf{R}_\perp}{Q} + \mathbf{e}_x - \frac{2X\theta}{Q} \left( 2 + \frac{i\mathbf{R}_\perp^2}{Q} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right];$$

$$\mathbf{H}^{(TM)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TE)}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E}^{(TE)} = \frac{G}{Q} \left[ \frac{2iX[\mathbf{e}_z, \mathbf{R}_\perp]}{Q} + \mathbf{e}_y \right];$$

$$\mathbf{H}^{(TE)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TM)}. \quad (2.4)$$

$\mathbf{E}^{(TM)}$  можно рассматривать как когерентную суперпозицию гауссового линейно поляризованного и радиально поляризованного вихревого гауссового пучков.

Выразим плотность потока энергии поля светового пучка в безразмерной форме

$$\mathbf{S} = S_z \mathbf{e}_z + \mathbf{S}_\perp,$$

где

$$S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \frac{|G|^2}{|Q|^4} 4X^2 \left( (\mathbf{R}_\perp^2 - 1) + |Q|^2 \right); \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \frac{|G|^2}{|Q|^6} 40XY \times$$

$$\times \left( \mathbf{e}_x \left( \mathbf{R}_\perp^2 (X^2 - 1) + |Q|^2 \right) + \mathbf{e}_y XY \mathbf{R}_\perp^2 \right).$$

Здесь введен параметр параксиальности  $\theta = w_0 / q_0'' \leq 10^{-3}$ .

## 3 Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков ТМ мод

Для ТМ мод (2.2) выражения (1.1) для поляризационных характеристик принимают вид:

$$\operatorname{tg} 2\psi' = \frac{4XY(2X^2 - 1)}{(2X^2 - 1)^2 + Z^2 - 4X^2 Z^2};$$

$$\operatorname{th} 2\psi'' = \frac{4XYZ}{(2X^2 - 1)^2 + Z^2 + 4X^2 Z^2}.$$

С помощью СКМ Mathematica и Maple проводилось графическое моделирование поляризации и потоков энергии для ТМ мод (2.2) (рисунки 3.1 и 3.2).

Анализируя (2.3)–(2.6) и рисунки 3.1 и 3.2, приходим к следующим выводам.

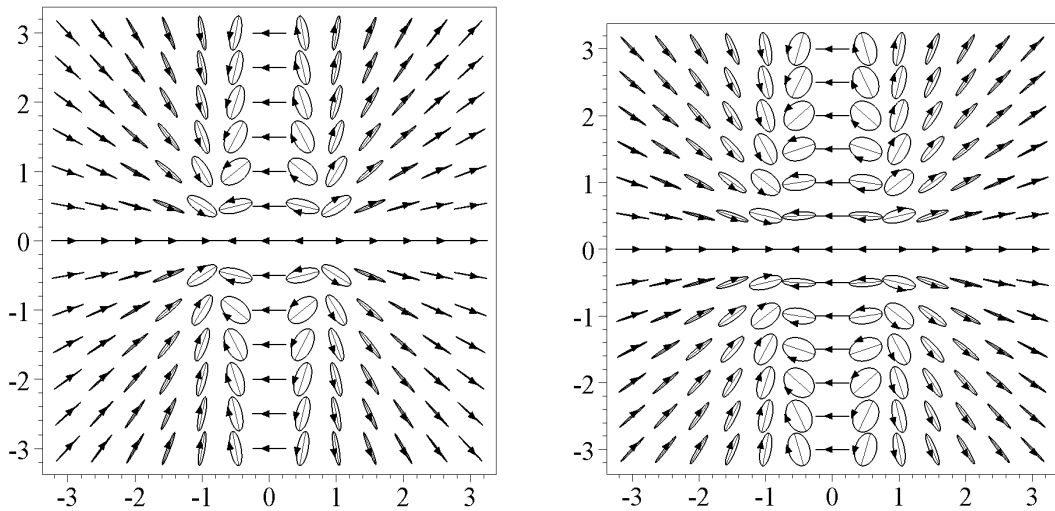


Рисунок 3.1 – Эллипсы поляризации для ТМ мод при  $Z = 1$  и  $Z = 2$

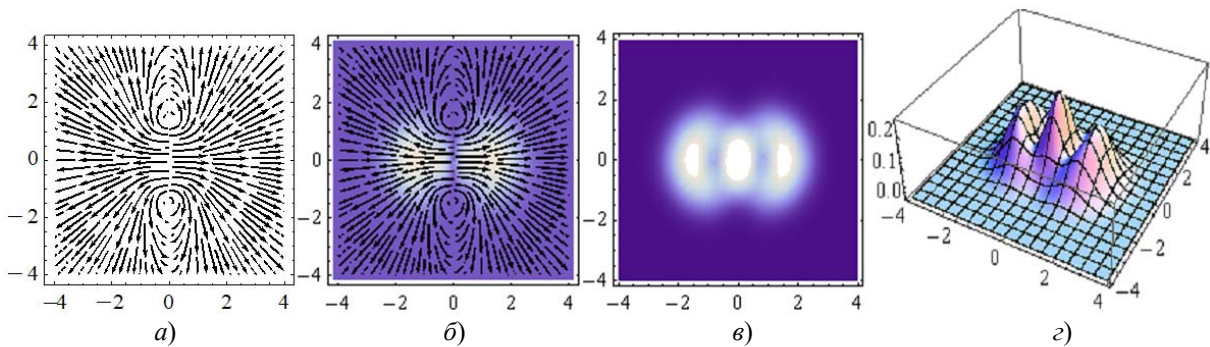


Рисунок 3.2 – Поперечный поток энергии и интенсивность ТМ мод при  $Z = 1$ :  
 а) – поперечный поток энергии; б) – поперечный поток энергии вместе с его интенсивностью;  
 в) и з) – 2D и 3D графики полной интенсивности ТМ моды

В общем случае поляризация рассматриваемых ТМ-мод (по вектору  $\mathbf{E}$ ) – эллиптическая, неоднородная по сечению пучка. Направления вращения эллипсов поляризации изменяются на противоположные при пересечении осей координат  $OX$  и  $OY$ . Поэтому при  $X = 0$  и при  $Y = 0$  поляризация становится линейной, вдоль оси  $OX$ . При  $Z = 0$  поляризация линейна во всем поперечном сечении пучка. Циркулярной поляризации соответствуют 4 точки

$$\left( X = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; Y = \pm \frac{\sqrt{2}Z}{2} \right)$$

в поперечном сечении.

При возрастании расстояния от оси  $OZ$  поляризация стремится к линейной радиальной. Исключение составляет область  $|X| \leq 2$  с эллиптической поляризацией. Заметим [3], что у ТМ мод гауссовых пучков вектор  $\mathbf{E}$  имеет строго радиальную поляризацию.

Эллипсы поляризации для ТЕ мод ортогональны эллипсам поляризации для ТМ мод, т. е. повернуты на  $90^\circ$ . С увеличением  $Z$  пучок постепенно расходится (рисунок 3.1).

Существует также поперечный  $\mathbf{S}_\perp$  поток энергии, который значительно меньше

$$(S_z / |\mathbf{S}_\perp| \approx \theta = w_0 / q_0'' \leq 10^{-3})$$

продольного  $S_z$  потока энергии. Картины эллипсов поляризации и плотности поперечных потоков энергии обладают одинаковой точечной группой симметрии:  $2_2 m$ . Вдали от оси пучка, исключая область  $|X| \leq 2$ , направления поперечных потоков энергии становятся радиальными. Как известно [3], у ТМ и ТЕ гауссовых мод поперечные потоки энергии всегда радиальны.

Интенсивность ТМ пучка (2.3) имеет три максимума интенсивности, как хорошо видно на рисунке 3.2 г. Интенсивности поперечного и продольного потоков энергии обладают, естественно, различными пространственными конфигурациями (рисунки 3.2 б и 3.2 в).

### Заключение

Для описания физических характеристик векторных парааксиальных гауссовоподобных световых пучков с неоднородной поляризацией предложен соответствующий векторный формализм.

Найдены простые выражения для поляризации и плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных гауссовоподобных световых пучков с неоднородной поляризацией, включая общие ТМ и ТЕ моды. Проведенное графическое моделирование поляризационных и энергетических свойств векторных гауссовоподобных ТМ пучков (2.3) наглядно продемонстрировало справедливость выполненных аналитических расчетов.

Следует отметить, что исследований закономерностей распространения поперечных потоков энергии векторных пучков с неоднородной поляризацией пока проведено мало, например: пучки гауссовы [3], Бесселя – Гаусса [7], Лагерра – Гаусса [8], Гельмгольца – Гаусса [9]. Формализм рассматриваемых нами векторных гауссовоподобных пучков пригоден для всех этих и некоторых других типов пучков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
2. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
3. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–24.
4. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 1–5.
5. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.
6. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 587 с.
7. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бессель-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39). – Ч. 1. – С. 49–52.
8. Bandres, M.A. Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2157.
9. Allen, L. The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density / L. Allen, M. I. Padgett // Opt. Commun. – 2000. – Vol. 184, № 1–4. – P. 67–71.

Поступила в редакцию 06.09.17.