

УДК 512.567.5

n*-АРНЫЙ АНАЛОГ АФФИННОЙ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА*Д.И. Кирилюк***Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель****n*-ARY ANALOG OF AFFINE DEZARG THEOREM****D.I. Kirilyuk***F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Получен *n*-арный аналог аффинной теоремы Дезарга, разработан новый метод установления справедливости векторных равенств на *n*-арной группе, который основывается на определении нейтральной последовательности.

Ключевые слова: полуабелева *n*-арная группа, вектор *n*-арной группы.

n-Ary analog of affine Dezarg theorem is determined. New method of relaxation to vector equations on *n*-ary group is received.

Keywords: semiabelian *n*-ary group, vector of *n*-ary group.

Введение

Известно, что понятие *n*-арной группы было введено в 1928 году в работе Дернте [1], и многие известные математики посвятили свои труды разработке теории *n*-арных групп [2]–[6], в то же время эта теория в настоящее время уступает в своем развитии теории групп. Это связано, в том числе, с кажущейся сложностью и громоздкостью выкладок при доказательстве различных утверждений и теорем. Преодолению этих трудностей способствует применение геометрических методов, поскольку в этом случае аналитические формулы приобретают наглядность, тем самым их восприятие значительно упрощается. Поэтому разработка новых методов исследования *n*-арных групп через построение и описание объектов аффинной геометрии является достаточно актуальной задачей.

В представляемой работе на основании исследований С.А. Русакова и Ю.И. Кулаженко, заключающихся в разработке способов построения элементов аффинной геометрии на *n*-арной группе (см., например, [7]–[11]), получен *n*-арный аналог аффинной теоремы Дезарга. Отметим, что при доказательстве этого результата был разработан и использован новый метод установления справедливости векторных равенств на *n*-арной группе, который основывается на определении нейтральной последовательности.

1 Определения и понятия, используемые в работе

Напомним следующие определения, которые можно найти в [3], [7].

Определение 1.1. Универсальную алгебру $\langle G, () \rangle$ с одной *n*-арной операцией $()$: $G^n \rightarrow G$ ($n \geq 2$) называют *n*-арной группой, если выполняются следующие условия:

1) операция $()$ ассоциативна на G , т. е.

$$((a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n-1}) = (a_1 \dots a_i (a_{i+1} \dots a_{i+n}) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1});$$

2) каждое из уравнений

$$(a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_n) = b$$

однозначно разрешимо в G относительно x_i для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in G$.

Символ $\overset{2n-4}{x_1 \dots x_n}$ означает последовательность $\overset{2n-4}{x_1 \dots x_n}$. Элемент $a^{[-2]}$ является решением уравнения $a = (\overset{2n-2}{x} a)$.

Определение 1.2. *n*-Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности x_1^n из G справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Определение 1.3. Последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$ ($k \geq 1$) элементов *n*-арной группы G называется нейтральной, если

$$(e_1 \dots e_{k(n-1)} a) = (a e_1 \dots e_{k(n-1)}) = a$$

для любого $a \in G$.

С.А. Русаковым в [3] было доказано, что $\overset{2n-4}{x x^{[-2]} x}$ – нейтральная последовательность для любого $x \in G$.

Определение 1.4. Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком *n*-арной группы G и обозначают $\overline{ab}$.

Определение 1.5. Говорят, что направленные отрезки $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ *n*-арной группы G равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если $\langle a, c, d, b \rangle$ – параллелограмм, т. е. $a = (b d^{[-2]} d c)$.

Пусть $\bar{V}$ – множество всех направленных отрезков n -арной группы G . Из предложения 1 [7] следует, что бинарное отношение $=$ на множестве $\bar{V}$ является отношением эквивалентности и разбивает множество $\bar{V}$ на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{ab}$, имеет вид

$$K(\overrightarrow{ab}) = \{\overrightarrow{uv} \mid \overrightarrow{ab} \in \bar{V}, \overrightarrow{uv} = \overrightarrow{ab}\}.$$

Под вектором $\overrightarrow{ab}$ n -арной группы G понимают класс $K(\overrightarrow{ab})$, т. е. $\overrightarrow{ab} = K(\overrightarrow{ab})$.

Определение 1.6. Пусть $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{bc}$ вектора n -арной группы G . Суммой векторов $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ называют вектор, обозначаемый $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$ и определяемый так $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} = \overrightarrow{ac}$ или $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.

Другие определения и понятия, используемые в работе, смотри в [3], [7].

В представленном ниже результате используется теорема из [8] о сложении векторов n -арной группы, доказанная Ю.И. Кулаженко. Приведем ее формулировку.

Теорема 1.1. Пусть $G = \langle X, ()^{[-2]} \rangle$ – произвольная n -арная группа. Для любых точек $a, b, c, d \in G$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} &= \overrightarrow{a(bc^{[-2]} c d)}, \\ \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} &= \overrightarrow{(cb^{[-2]} b a)d}. \end{aligned}$$

2 n -Арный аналог аффинной теоремы Де-зарга

Теорема 2.1. Пусть $\langle a, b, c \rangle, \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ – произвольные треугольники полуабелевой n -арной rs -группы G , $t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in Q^{(r)}$ и не равны 0. Если существует точка $a_0 \in G$ такая, что

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_0 a} = t_1 \overrightarrow{a_0 a_1} \\ \overrightarrow{a_0 b} = t_2 \overrightarrow{a_0 b_1} \\ \overrightarrow{a_0 c} = t_3 \overrightarrow{a_0 c_1} \end{cases}, \quad (2.1)$$

и выполняются

$$\begin{cases} \overrightarrow{ab} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1 b_1} \\ \overrightarrow{ac} = \lambda_2 \overrightarrow{a_1 c_1} \end{cases}, \quad (2.2)$$

то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\overrightarrow{bc} = \lambda \overrightarrow{b_1 c_1}$.

Доказательство. Пусть треугольник $\langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ такой, что его вершины удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_0 a_2} = \lambda_1 \overrightarrow{a_0 a_1} \\ \overrightarrow{a_0 b_2} = \lambda_1 \overrightarrow{a_0 b_1} \\ \overrightarrow{a_0 c_2} = \lambda_1 \overrightarrow{a_0 c_1} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Умножим первое равенство полученной системы (2.3) на (-1) и прибавим ко второму равенству.

При умножении вектора на (-1) учитываем равенство $-\overrightarrow{xu} = \overrightarrow{ux}$, которое справедливо для любых $x, u \in G$,

$$\overrightarrow{a_2 a_0} + \overrightarrow{a_0 b_2} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1 a_0} + \lambda_1 \overrightarrow{a_0 b_1}.$$

Вынесем λ_1 за скобки

$$\overrightarrow{a_2 a_0} + \overrightarrow{a_0 b_2} = \lambda_1 (\overrightarrow{a_1 a_0} + \overrightarrow{a_0 b_1}).$$

По определению 1.7 имеем

$$\overrightarrow{a_2 b_2} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1 b_1}. \quad (2.4)$$

Учитывая второе равенство системы (2.2) из условия теоремы и равенство (2.4), имеем

$$\overrightarrow{a_2 b_2} = \overrightarrow{ab}.$$

Перенесем все слагаемые в левую часть

$$\overrightarrow{a_2 b_2} - \overrightarrow{ab} = \vec{0},$$

что равносильно $\overrightarrow{a_2 b_2} + \overrightarrow{ba} = \vec{0}$.

Далее к левой части полученного равенства применяем теорему 1.1

$$\overrightarrow{a_2 (b_2 b^{[-2]} b a)} = \vec{0}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) по определению 1.5 получаем

$$a_2 = (b_2 b^{[-2]} b a). \quad (2.6)$$

Умножим (2.6) слева на $a_2 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4}$

$$(a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_2) = (a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2 b^{[-2]} b a).$$

Так как $a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_2$ – нейтральная (см. определение 1.3), то

$$a = (a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2 b^{[-2]} b a).$$

Из полученного равенства по определению следует, что последовательности

$$a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2 b^{[-2]} b \text{ и } a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2 b^{[-2]} b a$$

– нейтральные. Поскольку G полуабелева, имеем

$$a = ((a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2) b^{[-2]} b a),$$

$$a = ((b_2 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a) b^{[-2]} b a),$$

$$a = (a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} (b_2 b^{[-2]} b a)),$$

$$a = (a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} (a b^{[-2]} b b_2)).$$

Следовательно, последовательности

$$b_2 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a b^{[-2]} b, \quad a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a b^{[-2]} b b_2$$

также нейтральные. А нейтральность последовательностей

$$a a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2 b^{[-2]} b, \quad a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} b_2 b^{[-2]} b a,$$

$$b_2 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a b^{[-2]} b, \quad a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a b^{[-2]} b b_2$$

возможна в двух случаях:

1) $a = a_2$ и $b = b_2$;

2) $a_2 = b_2$ и $a = b$.

Покажем, что из второго случая (а именно только из $a = b$) следует требуемое равенство.

Первое равенство системы (2.2) условия теоремы превращается в $\vec{0} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1 b_1}$. Откуда следует, что $a_1 = b_1$. Тогда второе равенство системы (2.2) примет вид $\overrightarrow{bc} = \lambda_2 \overrightarrow{b_1 c_1}$.

Далее будем рассматривать первый случай. Подставляя $a_2 = a$ и $b_2 = b$ в систему (2.3), имеем

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_0 a} = \lambda_1 \overrightarrow{a_0 a_1} \\ \overrightarrow{a_0 b} = \lambda_1 \overrightarrow{a_0 b_1} \end{cases}.$$

Учитывая условия теоремы (2.1), получаем, что

$$t_1 = t_2 = \lambda_1. \quad (2.7)$$

Пусть треугольник $\langle a_3, b_3, c_3 \rangle$ такой, что его вершины удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_0 a_3} = \lambda_2 \overrightarrow{a_0 a_1} \\ \overrightarrow{a_0 b_3} = \lambda_2 \overrightarrow{a_0 b_1} \\ \overrightarrow{a_0 c_3} = \lambda_2 \overrightarrow{a_0 c_1} \end{cases}. \quad (2.8)$$

Первое равенство системы (2.8) умножим на (-1) и прибавим к третьему, имеем

$$\overrightarrow{a_3 a_0} + \overrightarrow{a_0 c_3} = \lambda_2 \overrightarrow{a_1 a_0} + \lambda_2 \overrightarrow{a_0 c_1}. \quad (2.9)$$

Выносим в правой части равенства (2.9) λ_2 за скобки, а в левой используем определение 1.6, тогда получаем

$$\overrightarrow{a_3 c_3} = \lambda_2 (\overrightarrow{a_1 a_0} + \overrightarrow{a_0 c_1}),$$

и, следовательно

$$\overrightarrow{a_3 c_3} = \lambda_2 \overrightarrow{a_1 c_1}. \quad (2.10)$$

Так как по условию теоремы $\overrightarrow{ac} = \lambda_2 \overrightarrow{a_1 c_1}$, то (2.10) примет вид

$$\overrightarrow{a_3 c_3} = \overrightarrow{ac}.$$

Переносим все слагаемые в левую часть

$$\overrightarrow{a_3 c_3} - \overrightarrow{ac} = \vec{0},$$

и с учетом равенства $-\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ca}$, имеем

$$\overrightarrow{a_3 c_3} + \overrightarrow{ca} = \vec{0}. \quad (2.11)$$

По теореме 1.1 из (2.11) следует

$$a_3 (c_3 c^{[-2]} c a) = \vec{0},$$

что в силу определения 1.5 равносильно

$$a_3 = (c_3 c^{[-2]} c a). \quad (2.12)$$

Умножаем полученное равенство (2.12) слева на $a c_3^{[-2]} a_3^{2n-4}$

$$(a a_3^{[-2]} a_3 a_3) = (a a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a). \quad (2.13)$$

В равенстве (2.13) учитываем нейтральность последовательности $a_3^{[-2]} a_3 a_3$ (см. определение 1.3)

$$a = (a a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a). \quad (2.14)$$

Из (2.14) по определению вытекает, что последовательности

$a a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c$ и $a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a$ – нейтральные. Поскольку G полуабелева, имеем

$$a = ((a a_3^{[-2]} a_3 a) c^{[-2]} c a),$$

$$a = ((c_3 a_3^{[-2]} a_3 a) c^{[-2]} c a),$$

$$a = (a a_3^{[-2]} a_3 (c_3 c^{[-2]} c a)),$$

$$a = (a a_3^{[-2]} a_3 (a c^{[-2]} c c_3)).$$

Следовательно, последовательности

$$c_3 a_3^{[-2]} a_3 a c^{[-2]} c,$$

$$a_3^{[-2]} a_3 a c^{[-2]} c c_3$$

также нейтральные. А нейтральность последовательностей

$$a a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c,$$

$$a_3^{[-2]} a_3 c_3 c^{[-2]} c a,$$

$$c_3 a_3^{[-2]} a_3 a c^{[-2]} c,$$

$$a_3^{[-2]} a_3 a c^{[-2]} c c_3$$

возможна в случаях:

1) $a = a_3$ и $c = c_3$;

2) $a_3 = c_3$ и $a = c$.

Из второго случая сразу следует требуемое равенство. Второе равенство системы (2.2) условия теоремы превращается в $\vec{0} = \lambda_2 \overrightarrow{a_1 c_1}$. Откуда следует, что $a_1 = c_1$. Тогда первое равенство системы (2.2) примет вид $\overrightarrow{cb} = \lambda_1 \overrightarrow{c_1 b_1}$, что при умножении на (-1) равносильно $\overrightarrow{bc} = \lambda_1 \overrightarrow{b_1 c_1}$.

Теперь подставим $a_3 = a$ и $c_3 = c$ в систему (2.8), получим, что $t_1 = t_3 = \lambda_2$. Из полученного равенства и (2.7) следует, что

$$t_1 = t_2 = t_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Тогда равенства (2.2) условия теоремы примут вид

$$\begin{cases} \overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{a_1 b_1} \\ \overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{a_1 c_1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \overrightarrow{ba} = \lambda \overrightarrow{b_1 a_1} \\ \overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{a_1 c_1} \end{cases}.$$

Сложив оба равенства (определение 1.6), имеем

$$\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{b_1 a_1} + \lambda \overrightarrow{a_1 c_1}.$$

Откуда

$$\overrightarrow{bc} = \lambda (\overrightarrow{b_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 c_1}). \quad (2.15)$$

Снова, используя определение 1.6, перепишем правую часть равенства (2.15), получим

$$\overrightarrow{bc} = \lambda \overrightarrow{b_1 c_1}.$$

Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dornste, W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornste // *Math. Z.* – 1928. – Bd.29. – S. 1–19.
2. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. *Русаков, С.А.* Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1992. – 264 с.
4. *Курош, А.Г.* Общая алгебра : лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160с.
5. *Гальмак, А.М.* n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф.Скорины, 2003. – 196 с.
6. *Гальмак, А.М.* n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2007. – 323 с.
7. *Русаков, С.А.* Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 182 с.
8. *Кулаженко, Ю.И.* Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // *Вопросы алгебры и прикладной математики* : сб. научн. тр. ; под редакцией С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 47–64.
9. *Кулаженко, Ю.И.* Построение фигур аффинной геометрии на n -арной группе / Ю.И. Кулаженко // *Вопросы алгебры и прикладной математики* : сб. научн. тр. ; под редакцией С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 65–82.
10. *Kulazhenko, Yu.I.* Geometry of semiabelian n -ary groups / Yu. I. Kulazhenko // *Quasigroups and Related Systems.* – 2011. – Vol. 19. – P. 265–278.
11. *Кулаженко, Ю.И.* Векторы и критерии полуабелевости n -арных групп / Ю.И. Кулаженко // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2011. – №1 (6). – С. 65–68.

Поступила в редакцию 02.09.13.