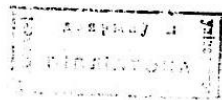


МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЕССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по курсу "Методы вычислений"
Часть 2



Гомель 1987

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом
математического факультета Гомельского государственного
университета

Составители: П.Д. Григорук,
Т.Г. Богдана,
О.В. Иванчикова,
А.А. Цеткова,
Н.А. Курганова

ВВЕДЕНИЕ

Ускорение научно-технического прогресса не представляется возможным без применения ЭВМ в науке, технике, народном хозяйстве и подготовке высоко-квалифицированных специалистов.

Настоящая работа предназначена студентам четвертого курса математического факультета специальности "Математика" и будет способствовать эффективному приобретению практических навыков в области вычислительной математики и использованию при этом вычислительной техники различного ранга.

Лабораторные работы подобраны тематически по разделам в соответствии с программой курса "Модели вычисления" для государственных университетов. Каждая работа содержит задание, краткие методические указания, ссылки на литературу и примеры выполнения заданий. Ряд лабораторных работ содержит задания, требующие теоретических исследований по вопросам обоснования выбранного метода, оценок погрешностей, определения порядка аппроксимации и исследование устойчивости разностных схем. С этой целью в методических указаниях приводятся необходимые теоремы и определения. Задания к работам сформулированы так, что выполнение вычислений можно проводить как на микро-, мини-ЭВМ, так и на больших ЭВМ, используя их математическое обеспечение.

В отчете по лабораторным работам после каждого пункта задания должны быть написаны все необходимые зависимости и формулы сначала в буквенном виде, а затем после знака равенства следует подставить числовые данные и записать результат. В тех случаях, когда выполнение пункта задания проводится на электронно-вычислительной машине, в дополнение к вышеуказанному следует приложить распечатки текста программы, исходных данных и результата, полученные на вычислительной машине. Варианты заданий выдаются преподавателями.

Лабораторная работа № 1 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Задание.

ЗАДАЧА I. Решение задачи Коши

$$y' = ay, \quad y(0) = 1, \quad a < 0, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

отыскивается с помощью разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \alpha(\lambda y_{i+1} + \beta y_i), \quad \lambda + \beta = 1, \quad \lambda, \beta \geq 0, \\ y_0 = 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

Дать ответы на следующие вопросы:

а) каков порядок аппроксимации дифференциального уравнения

(1) разностным из (2)?

б) пригодна ли разностная схема (2) для расчета дифференциальной задачи (1)?

в) рассмотреть отдельно случаи:

1. $\lambda = 0, \beta = 1$

2. $\lambda = 1, \beta = 0$

3. $\lambda = \beta = \frac{1}{2}$

- схема Эйлера.

- схема Эйлера с опережением.

- схема трапеций.

Объяснить поведение разностного решения относительно точного в каждом из трех этих случаев.

ЗАДАЧА 2. Решение задачи Коши

$$y' = \alpha y, \quad y(0) = 1, \quad |\alpha| < 1, \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

отыскивается с помощью разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{\alpha}{6}(y_{i+1} + 4y_i + y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \lambda, \quad y_1 = \beta, \quad h = \frac{1}{N}. \end{cases} \quad (4)$$

1. Каков порядок аппроксимации дифференциального уравнения

из (3) разностным из (4)?

2. Как вы предложите определять λ и β в разностной схеме (4)?

3. Пригодна ли разностная схема (4) для расчета дифференциальной задачи (3)?

Методические указания. При приближенном решении дифференциальной задачи разностными методами вместо отыскания непрерывного решения $y = y(x)$ задачи

$$\lambda y(x) = f(x), \quad x \in G.$$

$$\ell y(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma \quad (5)$$

Γ - граница области определения G , находят опорное решение $y_h(x) \in H_h$ разностной задачи

$$\Lambda_h y_h(x) = \varphi_h(x), \quad x \in \omega_h, \quad (6)$$

$$\ell_h y_h(x) = \chi_h(x), \quad x \in \gamma_h,$$

где ω_h - множество внутренних узлов сетки, покрывающей область G ; γ_h - множество граничных узлов сетки;

$\omega_h + \gamma_h = \bar{\omega}_h$; $\varphi_h(x)$, $\chi_h(x)$ - сеточные функции (они определены только в узлах сетки); Λ_h , ℓ_h - разностные операторы.

Запишем разностную задачу (6) на решении $y(x)$ исходной дифференциальной задачи (5):

$$\Lambda_h [y(x)]_h = \varphi_h(x) + \delta_h^1,$$

$$\ell_h [y(x)]_h = \chi_h(x) + \delta_h^2,$$

где $[y(x)]_h$ - значения $y(x)$ в узлах сетки $\bar{\omega}_h$.

Говорят, что разностная схема (6) аппроксимирует (приближает) дифференциальную задачу (5) с порядком m , если

$$\max \{ \|\delta_h^1\|_{H_h}, \|\delta_h^2\|_{H_h} \} \leq M |h|^m$$

где $M > 0$ - постоянная, не зависящая от $|h|$, $m > 0$.

Разностная схема (6) называется устойчивой, если решение $y_h(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|y_h\|_{H_h} \leq C_1 \|\varphi_h\|_{H_h} + C_2 \|\chi_h\|_{H_h}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА. Если разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу на решении $y(x)$ с порядком m и устойчива, то решение разностной задачи y_h сходится к $[y]_h$, причем имеет место оценка $\|y_h - [y]_h\|_{H_h} \leq C |h|^m$, где $C > 0$ и не зависит от h .

ЗАДАЧА. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' + \alpha y = 0, \quad \alpha = \text{const}, \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = y^* \end{cases} \quad (8)$$

отыскивается с помощью разностной схемы:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h/2} + \alpha(3y_i - y_{i-1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \lambda, \quad y_1 = \beta, \quad h = \frac{1}{N}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $y_i = \tilde{y}(x_i)$ приближенное решение.

1. Определить порядок аппроксимации дифференциального уравнения из (8) разностным из (9)?

2. Как вы предложите определить λ , β в (9)?

3. Пригодна ли разностная схема (9) для расчета задачи (8) при $\alpha > 0$ и при $\alpha < 0$?

Решение.

1. Запишем схему (9) на решении $y(x)$ задачи (8):

$$\begin{cases} \frac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h/2} + \alpha [3y(x_i) - y(x_i-h)] = \delta_i, \\ y(0) = \alpha + \delta_0, \quad y(h) = \beta + \delta_1. \end{cases} \quad (10)$$

$$i=1, 2, \dots, N-1. \quad (11)$$

Раскладывая в ряд Тейлора $y(x_i+h)$ и $y(x_i-h)$ в окрестности точки x_i в уравнении (10) и учитывая, что

$$y'(x_i) + \alpha y(x_i) = c,$$

будем иметь $\delta_i = h^2 [1/3 y'''(\xi_i) - 1/2 \alpha y''(\eta_i)], i=1, 2, \dots, N-1$.

Здесь ξ_i и η_i — некоторые точки интервала $[x_i-h, x_i+h]$. Таким образом, для всех внутренних точек сетки $\delta_i = O(h^2)$.

2. Разложив в ряд Тейлора $y(h)$ в уравнении (11) в окрестности точки $x=0$, получим

$$y(0) + h y'(0) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_0) = \beta + \delta_1$$

и чтобы иметь $\delta_1 = O(h^2)$, достаточно взять $\beta = h y'(0) = -h \alpha y(0) = -h \alpha y^*$. Окончательно, выбирая $\alpha = y^*$, будем иметь схему (9), аппроксимирующую задачу (8) со вторым порядком.

3. Чтобы выяснить пригодность схемы (9), требуется доказать ее устойчивость при каком-либо значении параметра α .

Введем векторы $y_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \end{bmatrix}, i=1, 2, \dots, N$.
Схему (9) можем записать в виде:

$$\begin{cases} y_{i+1} = (1 - \frac{3}{2} \alpha h) y_i + \frac{\alpha h}{2} y_{i-1} \\ y_i = y_i + 0 \cdot y_{i-1} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \bar{y}_{i+1} = T \bar{y}_i \\ \bar{y}_i = \bar{y}_i^*, i=1, N, \end{cases}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\alpha h}{2} & \frac{\alpha h}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y^* = \begin{bmatrix} y^* \\ -h \alpha y^* \end{bmatrix}.$$

Поядя $\bar{y}_{i+1} = T \bar{y}_i$, можем оценить $\|y_{i+1}\|_{N_h} \leq \|T\|_{N_h} \|y_i\|_{N_h}$. Устойчивость решения, т.е. непрерывную его зависимость от входных данных (правых частей), докажем, проверив ограниченность норм степеней оператора T . Имеем

$$\|T^i\|_{N_h} \leq \|T\|_{N_h}^i = \left\| \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\alpha h}{2} & \frac{\alpha h}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{N_h}^i \leq (1 + 2|\alpha|h)^i \leq e^{2|\alpha|h}, \quad i=1, 2, \dots, N-1.$$

Устойчивость доказана. Следовательно, схема (9) пригодна для решения задачи (8) при любых значениях α .

Литература: [2], с. 71-100; [5], с. 33-37.

Лабораторная работа №2

СХЕМА РУНГЕ-КУТТА И АДАМСА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Задание:

1. Методом Рунге-Кутты с точностью до ϵ найти решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ при $y(\alpha) = V$.

2. Методом Адамса продолжить на n шагов таблицу решений уравнения $y' = f(x, y)$, полученных в задании 1. Взять шаг вычислений h . Доказать порядок точности решения по выбранной схеме.

3. Методом Рунге-Кутты на отрезке $[\alpha, \beta]$ найти решение задачи $y'' = \varphi(x, y, y')$, $y(\alpha) = V$, $y'(\alpha) = W$ со 2-м порядком точности.

Методические указания. Наиболее употребительными разностными схемами для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями являются схемы Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса.

Пусть требуется найти приближенное решение задачи $y' = f(x, y)$, $y(\alpha) = V$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на N отрезков. В общем случае разбиение может быть произвольным. Мы ограничимся случаем равноотстоящих узлов:

Приведем две схемы Рунге-Кутты:

$$\Lambda_h y_n = \begin{cases} y_{i+1} - y_i = \frac{2h-1}{2\alpha} K_1 + \frac{1}{2\alpha} K_2, \\ y_0 = V, \end{cases}$$

где α — любое число, $K_1 = f(x_i, y_i)$, $K_2 = f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h K_1)$, (1)

$$\Lambda_h y_n = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ y_0 = V, \end{cases} \quad (2)$$

где $K_1 = f(x_i, y_i)$, $K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hK_1}{2})$, $K_3 = f(x_i + h, y_i + hK_1)$, $K_4 = f(x_i + \frac{3h}{2}, y_i + \frac{3hK_1}{2})$.

Здесь $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, y_i - приближенное значение функции $y(x)$ в узлах сетки: $y_i = y_h(x_i)$.

Схема (1) имеет 2-й порядок аппроксимации, схема (2) - 4-й порядок.

Для контроля правильности выбора шага h делают двойной просчет - сначала с шагом h , затем с шагом $\frac{h}{2}$. Если полученные при этом значения y_i различаются в пределах допустимой точности, то шаг для следующей точки удваивают, в противном случае берут половинный шаг.

В схемах Рунге-Кутты (1), (2) приходится несколько раз пересчитывать функцию $f(x, y)$ в i -й точке, что неудобно, если $f(x, y)$ - сложная функция. С целью упростить дальнейшие вычисления y_i применяются схемы Адамса. Схемы Адамса позволяют таблицу значений с помощью формул:

$$\Lambda_h y_h = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f_i = 0, & i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = V. \end{cases}$$

$$\Lambda_h y_h = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = V, \quad y_1 = \tilde{y}_1. \end{cases} \quad (3)$$

$$\Lambda_h y_h = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i - \frac{5}{12} \Delta^2 f_i = 0, & i = 2, \dots, N-1, \\ y_0 = V \\ y_1 = \tilde{y}_1, \quad y_2 = \tilde{y}_2. \end{cases}$$

$$\Lambda_h y_h = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i - \frac{5}{12} \Delta^2 f_i - \frac{3}{8} \Delta^3 f_i = 0, & i = 3, \dots, N-1, \\ y_0 = V \\ y_1 = \tilde{y}_1, \quad y_2 = \tilde{y}_2, \quad y_3 = \tilde{y}_3. \end{cases}$$

$$f_i = f(x_i, y_i), \quad \Delta f_i = f_i - f_{i-1}, \dots, \Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_i - \Delta^{k-1} f_{i-1}.$$

Формулы (3) можно продолжить и дальше. Первое из уравнений (3) - уравнение Эйлера. Оно имеет первый порядок аппроксимации.

Последующие уравнения имеют 2-й, 3-й и 4-й порядки аппроксимации. Начальные значения y_i во второй, третьей и четвертой схемах вычисляются каким-либо иным путем, например, по схеме Эйлера с меньшим шагом h либо с тем же шагом по схеме Рунге-Кутты не меньшего порядка аппроксимации (чтобы иметь y_i с меньшей точностью).

Схемы (3) называются экстраполяционными формулами Адамса. С целью уточнения получаемых в каждой i -й точке значений проводится пересчет полученных y_i по интерполяционной формуле Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i + \frac{1}{2} \Delta f_i - \frac{1}{12} \Delta^2 f_i + \frac{1}{24} \Delta^3 f_i, \quad (4)$$

где y_{i+1} - уточненное значение y_i .

Для работы на ЭВМ формулы Адамса удобно применять в виде

$$j_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) - \text{экстраполяционная формула}$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) - \text{интерполяционная формула}$$

Для контроля правильности выбора шага h поступают следующим образом. Если разность $y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$ не намного превышает допустимую ошибку расчета, то шаг h считается выбранным верно, и расчет продолжается с выбранным шагом. Если же на некотором этапе расчета указанная разность становится большой, то шаг уменьшают, например в 2 раза, и насчитывают новые конечные разности Δf_k , используя уже имеющиеся точки и формулы интерполяции на середину.

Во всех точках x_i выбранной сетки на $[a, b]$ каждое последующее значение y_{i+1} находится по схемам (1), (2), (3) последовательно через уже насчитанные y_i .

Для того, чтобы найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения порядка выше 1-го, необходимо свести это уравнение к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с соответствующими условиями, а затем для каждого из них применить одну из схем (1), (2), (3) и решать полученные разностные уравнения вместе.

ЗАДАЧА I. Дать схему отыскания приближенного решения задачи

$$y''' = f(x, y, y', y''), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = B, \quad y''(a) = C, \quad x \in [a, b]$$

Решение. Вводя новые переменные $z = y'$ и $w = y''$, сводим исходную задачу к следующей:

$$\begin{cases} w' = f(x, y, z, w), \\ y' = z, \\ z' = w \end{cases} \quad (5)$$

с начальными условиями: $y(a) = A, \quad z(a) = B, \quad w(a) = C$.
Для решения системы (5) применим схему Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации с шагом $h = \frac{b-a}{N}$. Ищем

$$\begin{cases} w_{i+1} - w_i = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} K_1^w + \frac{1}{2\alpha} K_2^w, \\ y_{i+1} - y_i = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} K_1^y + \frac{1}{2\alpha} K_2^y, \\ z_{i+1} - z_i = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} K_1^z + \frac{1}{2\alpha} K_2^z, \end{cases} \quad (6)$$

где $w_0 = C, \quad z_0 = B, \quad y_0 = A$,
 $K_1^w = f(x_i, y_i, z_i, w_i), \quad K_2^w = f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha K_1^y, z_i + \alpha K_1^z, w_i + \alpha K_1^w),$
 $K_1^y = z_i, \quad K_2^y = z_i + \alpha K_1^z, \quad K_1^z = w_i + \alpha K_1^w, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1.$

ЗАДАЧА 2. Показать порядок аппроксимации схемы (I).

Решение. Запишем схему (I) на решении $y(x)$.

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} G[x_i, y(x_i)] + \frac{1}{2\alpha} G[x_i + \alpha h, y(x_i) + \alpha h G[x_i, y(x_i)]] + o(h^2) \quad (7)$$

и найдем чему равна $\| \delta^h \|$. Разложим по h функцию двух переменных по формуле Тейлора:

$$\left. \frac{2\alpha-1}{2\alpha} K_1 + \frac{1}{2\alpha} K_2 \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y(x_i)}} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} G + \frac{1}{2\alpha} \left[G + \frac{\partial G}{\partial x} \alpha h + \frac{\partial G}{\partial y} \alpha h G + o(h^2) \right]_{x=x_i, y=y(x_i)}$$

$$= G + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} G \right)_{x=x_i, y=y(x_i)} + o(h^2) \quad (8)$$

$$\text{Так как } \frac{\partial y}{\partial x} = G(x, y(x)), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} G$$

и по формуле Тейлора

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + o(h^2),$$

то для решения $y(x)$ следует равенство

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \left[G + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} G \right) \right]_{x=x_i, y=y(x_i)} = o(h^2). \quad (9)$$

При подстановке в левую часть равенства (I) вместо y_i и y_{i+1} соответственно значений $y(x_i)$ и $y(x_{i+1})$ решения $y(x)$, получится выражение, совпадающее с левой частью равенства (9) с точностью до $o(h^2)$.

Таким образом, схема имеет второй порядок аппроксимации.

ЗАДАЧА 3. В задаче Коши $y' = y - 2x/y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$, найти первую точку y_i по схеме Эйлера и продолжить счет по схеме Адамса.

Решение. Возьдем $N = 10$, тогда $h = 0.1$. Так как первая схема Эйлера имеет первый порядок аппроксимации, а выбранная нами схема Адамса - второй порядок аппроксимации, то для того чтобы получить y_i для схемы Адамса, мы должны сделать вычисления по схеме Эйлера с шагом в 10 раз меньшим, т.е. $\tilde{h} = h/10 = 0.01$ и просчитать 10 точек. Тогда $\tilde{x}_0 = x_0 = 0.1$ и $\tilde{y}_0 = y_0 = y(0.1)$.

Литература: [1], с. 450-465; [2], с. 157-167.

Лабораторная работа №

РЕШЕНИЕ КРАСНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задание.

1. Составить разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу $y''(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y(a) = \mu, \quad y(b) = \nu, \quad x \in [a, b]$ со вторым порядком. Для аппроксимации краевых условия $y(a) = \mu$ выбрать двухточечный шаблон. Провести исследование сходимости построенной разностной схемы.

2. Используя полученный шаблон найти приближенное решение красной задачи $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x),$

$$\begin{aligned} y(\alpha) + \alpha y'(\alpha) &= \mu, \\ y(\beta) + \beta y'(\beta) &= \nu, \quad x \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Показать устойчивость выбранного алгоритма прогонки при данных α и β . Оценить точность решения.

Методические указания. Пусть дана дифференциальная краевая задача

$$Ly = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad \alpha < x < \beta, \quad (I)$$

$$y = \begin{cases} y(\alpha) + \alpha y'(\alpha) = \mu, & (I') \\ y(\beta) + \beta y'(\beta) = \nu, & (I'') \end{cases}$$

решение которой существует и единственно.

Для отыскания приближенного решения $y_h(x)$ задачи (I), (I'), (I'') поступаем следующим образом.

На отрезке $[\alpha, \beta]$ вводим сетку $\bar{\omega}_h$, которую для простоты возьмем равномерной: $x_n = \alpha + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, $h = (\beta - \alpha)/N$ и аппроксимируем дифференциальные операторы в точках x_n разностными по одной из следующих формул:

$$y''(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}))}{h^2} + o(h^2), \quad (2)$$

$$y'(x_n) = \begin{cases} \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + o(h) & (2') \\ \frac{y(x_n) - y(x_{n-1}))}{h} + o(h) & (2'') \\ \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h} + o(h^2) & (2''') \end{cases}$$

Выбор конкретного разностного оператора среди (2'), (2''), (2''') для x меня $y'(x_n)$ зависит от каждого конкретного случая.

Записанное в точках сетки x_n ($n = 1, 2, \dots, N-1$) уравнение (I) заменяется разностным, подставляя вместо производных их разностные представления в точках x_n . Аналогично поступаем с граничными условиями. Пренебрегая малыми величинами порядка $o(h)$ и $o(h^2)$, получаем разностную краевую задачу:

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} + B_n y_n + C_n y_{n+1} = f_n, & (3) \\ y_0 + \alpha y_1 = \mu, \quad y_N + \beta y_{N-1} = \nu, & (3') \end{cases}$$

приближенную относительно значений y_n искомой функции $y(x)$

в точках x_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Построенная разностная схема (3), (3') должна удовлетворять двум требованиям:

- она должна быть разрешимой, и метод ее решения должен быть устойчивым относительно ошибок округления;
- должна иметь место сходимость схемы, т.е. она должна аппроксимировать задачу (1), (I'), (I'') и быть устойчивой;

$$\|y_h\| \leq C \max \{ \|f_n\|, \|\varphi\|, \|\psi\| \}. \quad (4)$$

Рассмотрим вопросы разрешимости задачи (3), (3'). Сначала изучим случай: $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Будем говорить, что разностная краевая задача (3), (3') хорошо обусловлена, если при любых достаточно малых h она имеет единственное решение $\{y_n\}$ при произвольных правых частях $\{f_n\}$, φ , ψ , которое удовлетворяет оценке

$$\|y_n\| \leq M \max \{ \|\varphi\|, \|\psi\|, \max_m \|f_m\| \},$$

где M не зависит от h . Следующая теорема задачи (3), (3') признак хорошей обусловленности задачи (3), (3').

Теорема. Если ко-коэффициенты A_n , B_n , C_n удовлетворяют условию

$$|B_n| \geq |A_n| + |C_n| + \delta, \quad \delta > 0, \quad (5)$$

то задача (3), (3') хорошо обусловлена, причем решение $\{y_n\}$ удовлетворяет оценке.

$$\|y_n\| \leq \max \{ \|\varphi\|, \|\psi\|, \frac{1}{\delta} \max_m \|f_m\| \} \quad (6)$$

В случае постоянных коэффициентов A , B , C критерий хорошей обусловленности разностной краевой задачи принимает более удобный вид:

$$|B| \geq |A + C| + \delta, \quad \delta > 0. \quad (5)$$

Оценка (6) одновременно может служить и для показателя устойчивости схемы (3), (3'). Действительно, выразив в качестве нормы $\|U_h\| = \max \|U_n\|$, получим

$$\|y_h\| = \max \|y_n\| \leq \max \{ \|\varphi\|, \|\psi\|, \frac{1}{\delta} \|f_n\| \} \leq \max \{ \|\varphi\|, \|\psi\|, \|f_n\| \},$$

где $C = \max \{ 1, 1/\delta \}$, т.е. справедлива оценка (4).

Решение задачи (3), (3') найдем методом прогонки, будем искать решение в виде:

$$y_n = L_n y_{n+1} + K_n. \quad (7)$$

Подставив $y_{n-1} = L_{n-1} y_n + K_{n-1}$ в уравнение (3) и преобразовав его к виду (7), получим следующие рекуррентные формулы для отыскания коэффициентов прогонки (прямой ход):

$$L_n = \frac{-C_n}{B_n + A_n L_{n-1}}, \quad K_n = \frac{-f_n - A_n K_{n-1}}{B_n + A_n L_{n-1}}. \quad (8)$$

Из граничного условия $y_0 = L_0 y_1 + K_0$ следует: $L_0 = 0, K_0 = \varphi$. Выполним подсчет всех $L_n, K_n, n=1, 2, \dots, N-1$ по формулам (8), приступаем к вычислению неизвестных y_n .

$n = N-1, \dots, 1$ по формуле (7) (обратный ход прогонки).

Ошибка, допущенная при вычислении y_{n+1} не возрастает при счете y_n , если $|L_n| \leq 1$. Можно показать, что при выполнении условий (5) или (5') и $|L_0| \leq 1$ все $|L_n| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots, N-1$) и знаменатель в формулах (8) никогда не обратится в нуль. Таким образом, если выполняется критерий хорошей обусловленности задачи (3), (3') и $|L_0| < 1$, то алгоритм прогонки (7), (8) для решения задачи устойчив относительно ошибок округления при подсчете неизвестных y_n и дает единственное решение $\{y_n\}$ системы (3), (3').

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Для того чтобы оценить обусловленность системы (3), (3'), исключим y_0 из системы (3) с помощью граничного условия, а y_N найдем, решив совместно уравнения: $y_{N-1} = L_{N-1} y_N + K_{N-1}, y_N + \beta y_{N-1} = \varphi$. И если в новой системе уравнений $A'_n y_{n-1} + B'_n y_n + C'_n y_{n+1} = f'_n, n=1, 2, \dots, N-1$ коэффициенты A'_n, B'_n, C'_n удовлетворяют оценке (5) или (5'), то система (3), (3') хорошо обусловлена, причем выполняется оценка

$$|y_n| < C \max\{|\varphi|, |\varphi|, \max |f'_n|\}, \quad n=1, N, \text{ где } C = \max\{1, \frac{|L_0|}{\beta}, 1 + \frac{|L_0|}{\beta}\}.$$

Алгоритм прогонки устойчив, если $|L_0| = -\alpha$ и $|L_0| \leq 1$.

Если это условие не выполняется, но зато выполняется оценка $|y'_i| \leq 1$, то прогонку начинают с другого конца, при этом обратным ходом прогонки будут вычисления по формуле

$$y_n = L_n y_{n+1} + K_n, \quad n=1, 2, \dots, N-1. \quad (7')$$

Прямым ходом будут вычисления коэффициентов L_n и K_n .

$n=N-1, \dots, 1$ по формулам

$$L_n = \frac{-A_n}{B_n + C_n L_{n+1}}, \quad K_n = \frac{-f_n - C_n K_{n+1}}{B_n + C_n L_{n+1}}. \quad (8')$$

14

Для получения приближенного решения для всех $x \in (a, b)$ по найденной таблице решений $\{y_n\}$ выполним интерполирование.

ЗАДАЧА I. Методом прогонки найти приближенное решение краевой задачи:

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad (9)$$

$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 1 + \ell. \quad (9')$$

Решение. Выберем следующую разностную схему:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - 2Kh \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 2y_k = -4Kh \quad (10)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - hy_0 = y_0, \quad y_N = 1 + \ell \quad (10')$$

Аппроксимация уравнения (10) показывается как и в лабораторной работе В 2. Аппроксимацию граничного условия исследуем. Раскладываем в ряд Тейлора y_1 , имеем $y_1 \approx y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{6} y'''_0$. Откуда находим

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} y''_0 - \frac{h^2}{6} y'''_0. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражение y'''_0 из (9); получаем

$$y'_0 \approx (y_1 - y_0)/h - hy_0 - h/6 y''_0.$$

Таким образом, уравнения, (10') аппроксимируют уравнения (9') со вторым порядком. Перепишем (10) и (10'):

$$\alpha_k y_{k-1} - C_k y_k + \beta_k y_{k+1} = -4Kh$$

$$y_0 = xy_1, \quad y_N = 1 + \ell.$$

Здесь

$$\alpha_k = \frac{1}{h^2} + K, \quad C_k = \frac{2}{h^2} + 2, \quad \beta_k = \frac{1}{h^2} - K, \quad x = \frac{1}{1+h^2+h}$$

Выпишем прогоночные коэффициенты:

$$y_k = \alpha_{k-1} y_{k+1} + \beta_{k-1}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{\beta_k}{C_k - \alpha_k \alpha_k},$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k \beta_k + 4Kh}{C_k - \alpha_k \alpha_k}, \quad K = \frac{1}{h^2} - 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_1 = x.$$

Прогонка устойчива, так как $\alpha_k > 0, C_k > 0, x < 1$

$$\beta_k = \frac{1}{h^2} - K = N^2 - K \geq 0, \quad \alpha_k + \beta_k < C_k$$

Литература: [2], с. 38-60; [6], с. 38-66.

Лабораторная работа № 4
АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАЗНОСТНОЙ СХемой

Задание.

1. Для задачи $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$, $0 < x \leq X$,
 $0 < t \leq T$, $U(0, x) = \mu(x)$, $U(t, 0) = \nu(t)$
построить явную и неявную разностные схемы и определить порядок аппроксимации.

2. Построить разностные схемы, аппроксимирующие задачу
 $\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$, $U(0, x) = g(x)$, $\frac{\partial U(t, 0)}{\partial x} = \mu(t)$,
 $U(t, X) = \nu(t)$, $0 \leq x \leq X$, $0 < t \leq T$
с первым и вторым порядком аппроксимации по τ и по h .

3. Построить трехслойную разностную схему для задачи
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 \leq x \leq X$, $0 < t \leq T$
 $U(t, 0) = U(t, X) = 0$, $U(0, x) = \mu(x)$, $\frac{\partial U(0, x)}{\partial t} = \nu(x)$
второго порядка аппроксимации.

Методические указания. 1. Пусть в области G с границей Γ определена дифференциальная задача

$$\begin{cases} Lu = f(x) \\ \ell u = \mu(x) \end{cases} \quad (1)$$

где L , ℓ — некоторые дифференциальные операторы,
 $f(x)$, $\mu(x)$ — известные функции векторного аргумента x .

Введем сеточную область $\bar{\omega}_h = \omega_h$ с векторным шагом
сетки h , т.е. $h = (h_1, h_2, \dots, h_p, \tau)$.

Поставим в соответствие задаче (1) разностную схему

$$\begin{cases} L_h V = \varphi \\ \ell_h V = \chi \end{cases}, \quad x \in \omega_h, \quad (2)$$

где L_h , ℓ_h — разностные операторы (разностные
аналоги дифференциальных операторов L и ℓ), φ , χ — раз-
ностные аналоги правых частей задачи (1), V — решение задачи
(2), в области ω_h , которое является приближенным решением
задачи (1) в узлах сетки, т.е. $[U]_h = V_h$ в узлах
сетки. (Величины, которые берутся в узлах сетки, имеют зна-
чок h).

Скажем, что оператор L_h локально аппроксимирует в какой-
либо точке оператор L на функции U с порядком n ,

если в этой точке имеет место неравенство: $|L_h V - (LU)_h| \leq C|h|^n$,

C — любая положительная постоянная. Оператор L_h аппрок-
симирует оператор L на функции U , если

$$\|L_h V - [LU]_h\| \leq C|h|^n.$$

Говорят, что разностная схема (2) аппроксимирует задачу (1)
с порядком n на решении исходной задачи U , если для
всех достаточно малых h имеет место неравенство

$$\|L_h [U]_h - \varphi_h\| \leq C_1 |h|^{n_1}, \quad \|\ell_h [U]_h - \chi_h\| \leq C_2 |h|^{n_2}, \quad n = \min(n_1, n_2),$$

где C_1 , C_2 — любые положительные постоянные, не зависящие
от h .

Выписав схему (2) на решении задачи (1) в произвольной
точке сеточного пространства, получим погрешности аппроксимации
схемы:

$$\delta_h' = L_h [U]_h - \varphi \quad \text{и} \quad \delta_h'' = \ell_h [U]_h - \chi. \quad (3)$$

Порядок аппроксимации схемы найдем, разложив слагаемые в (3) в
ряд Тейлора в окрестности выбранной точки и вычтя затем уравне-
ния

$$(LU - f)_h = 0, \quad (\ell U - \mu)_h = 0.$$

Если

$$L_h V - [LU]_h = \psi_h^1 = O(|h|^{k_1}),$$

$$\ell_h V - [\ell U]_h = \psi_h^2 = O(|h|^{k_2}),$$

$$\ell_h V - [LU]_h = \psi_h^3 = O(|h|^{k_3}),$$

$$\chi - [\mu]_h = \psi_h^4 = O(|h|^{k_4}),$$

где через ψ_h^1 , ψ_h^4 обозначены погрешности локальной
аппроксимации дифференциальных операторов разностными, через
 ψ_h^2 , ψ_h^3 — погрешность аппроксимации правых частей, то

$$\delta_h' = \psi_h^1 - \psi_h^2 \quad \text{и} \quad \delta_h'' = \psi_h^3 - \psi_h^4. \quad (4)$$

Из равенства (4) видно, что порядок аппроксимации в погрешнос-
тях δ_h' и δ_h'' зависит от аппроксимации как дифферен-
циальных операторов, так и правых частей и может быть повышен
при их совместном рассмотрении:

$$n_1 \geq \min(k_1, k_2), \quad n_2 \geq \min(k_3, k_4).$$

прием подбора разностных аналогов, при котором $n_1 = \min(K_1, K_2)$, $n_2 = \min(K_3, K_4)$, называется повышением порядка аппроксимации схем на решении исходной задачи.

Рассмотрим, например, для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = \mu(y),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x), \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

схему

$$\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h_2^2} = \varphi_{i,j}$$

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad M = \frac{1}{h_1}, \quad N = \frac{1}{h_2}, \quad x_i = i h_1, \quad y_j = j h_2,$$

$$V_{i,j} - V_{i+1,j} = \mu_j, \quad 0 \leq j \leq N,$$

$$\frac{V_{i,1} - V_{i,0}}{h_2} = \nu_i + \gamma_i, \quad V_{i,N} = 0, \quad 0 \leq i \leq M.$$

Выписав схему на решении u в (i, j) - узле сетки

$$\frac{V(x_{i-1}, y_j) - 2V(x_i, y_j) + V(x_{i+1}, y_j)}{h_1^2} + \frac{V(x_i, y_{j-1}) - 2V(x_i, y_j) + V(x_i, y_{j+1})}{h_2^2} = \varphi(x_i, y_j) + \delta_{i,j}^{\prime\prime},$$

$$V(0, y_j) = V(1, y_j) = \mu(y_j) + \delta_j^{\prime},$$

$$\frac{V(x_i, y_1) - V(x_i, 0)}{h_2} = \nu(x_i) + \gamma(x_i) + \delta_{i,0}^{\prime\prime},$$

$$V(x_i, y_N) = 0 + \delta_{i,N}^{\prime\prime}.$$

Разложим слагаемые в ряд Тейлора в окрестности точек (x_i, y_j) , $(0, y_j)$, $(x_i, 0)$, $(x_i, 1)$ соответственно в каждом уравнении и вычтем уравнения исходной задачи, написанные в этих точках. Получим

$$\delta_{i,j}^{\prime\prime} = O(h^2), \quad \delta_j^{\prime} = 0, \quad \delta_{i,N}^{\prime\prime} = 0,$$

$$\delta_{i,0}^{\prime\prime} = \frac{1}{h} [V(x_i, 0) + h V_y(x_i, 0) + \frac{h^2}{2} V_{yy}(x_i, 0) + O(h^3) -$$

$$-V(x_i, 0)] = \nu(x_i) - \gamma(x_i) =$$

$$= V_y(x_i, 0) + \frac{h}{2} V_{yy}(x_i, 0) + O(h^2) - \nu(x_i) - \gamma(x_i) =$$

$$= \frac{h}{2} V_{yy}(x_i, 0) + O(h^2) - \gamma(x_i), \quad \text{т.к. } V_y(x_i, 0) = \nu(x_i).$$

Если теперь положить $\gamma_i = 0$, то получится схема первого порядка аппроксимации. Если положить $\gamma_i = \frac{h}{2} V_{yy}(x_i, 0)$, то получится схема второго порядка аппроксимации. Но γ_i неизвестно. Воспользуемся уравнением исходной задачи. Имеем $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{x_i, 0} = f(x_i, 0) - \frac{V_{i+1,0} - 2V_{i,0} + V_{i-1,0}}{h_1^2} + O(h_1^2)$. Следовательно, γ_i в схеме с целью повышения порядка аппроксимации можно выбрать как

$$\gamma_i = \frac{h_1^2}{2} \left[f_{i,0} - \frac{V_{i+1,0} - 2V_{i,0} + V_{i-1,0}}{h_1^2} \right].$$

Тогда граничное условие в схеме запишется так:

$$V_{i,1} = h V_i + \frac{h^2}{2} f_{i,0} - \frac{1}{2} V_{i+1,0} + 2V_{i,0} - \frac{1}{2} V_{i-1,0}.$$

Рассмотрим еще один пример. Для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < x < X,$$

$u(0, x) = \alpha$, $0 \leq x \leq X$, $u(t, 0) = u(t, X) = 0$. Составим семейство схем:

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = L_h [\sigma V_i^{n+1} + (1-\sigma) V_i^n] + \varphi_i^n, \quad 0 < i < M,$$

$V_i^0 = \alpha$, $V_0^n = V_M^n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $N = \frac{T}{\tau}$, где σ - параметр схемы

Выписав схему на решении u и разложив слагаемые в ряд Тейлора в окрестности точки (t_n, x_i) , получим, что схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй по h . Разложим слагаемые в ряд Тейлора в окрестности точки $(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i)$, где $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\tau}{2} = \tau n + \frac{\tau}{2}$. Для сокращения выкладок, запишем

$$\begin{aligned} \sigma V(x_i, t_{n+1}) + (1-\sigma) V(x_i, t_n) &= \sigma [V(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau}{2} V_t(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \\ &+ O(\tau^2)] + (1-\sigma) [V(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau}{2} V_t(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2)] = \\ &= V(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + (2\sigma-1) \frac{\tau}{2} V_t(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Проведя необходимые разложения, окончательно получим:

$$V_t(x, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2) = L_h[V(x, t_{n+\frac{1}{2}}) + (2\sigma-1)\frac{\tau}{2}V_t(x, t_{n+\frac{1}{2}})] + \\ + \tau(\tau^2) + O(h^2) + \varphi(x, t_n) + \delta_{i,n}.$$

Погрешность в дополнительных условиях на решении U не допущена. Отсюда видно, что при $\sigma = \frac{1}{2}$, $\varphi(x_i, t_n) = f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$ построенная схема будет аппроксимировать исходную задачу со вторым порядком по t и по x , т.е. $\delta_{i,n} = O(h^2, \tau^2)$.

$$\text{Схема } \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = L_h \left(\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{2} \right) + \varphi_i^{n+\frac{1}{2}}$$

называется схемой Кранка-Николсона.

Заметим, что в схеме решение $\{V_i^n\}$ будет найдено на "целой" сетке ($n = 1, 2, 3, \dots, N$), тогда как решение

$V_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V_i^n + V_i^{n+1})$ проинтерполированное на новую ("половинную") сетку, будет более точным.

2. Простейшие приемы построения аппроксимирующих разностных схем.

При замене дифференциальных операторов их разностными аналогами по формулам:

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \approx \frac{V(t+\Delta t, x) - V(t, x)}{\Delta t}, \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \approx \frac{V(t, x+\Delta x) - V(t, x)}{\Delta x}, \quad (I.2)$$

$$\frac{\partial U_x(t, x)}{\partial x} \approx \frac{V(t, x) - V(t, x-\Delta x)}{\Delta x}, \quad (I.3)$$

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \approx \frac{V(t, x) - V(t-\Delta t, x)}{\Delta t}, \quad (I.4)$$

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \approx \frac{V(t, x+\Delta x) - V(t, x-\Delta x)}{2\Delta x}, \quad (I.5)$$

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \approx \frac{V(t+\Delta t, x) - V(t-\Delta t, x)}{2\Delta t}, \quad (I.6)$$

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} \approx \frac{V(t, x+\Delta x) - 2V(t, x) + V(t, x-\Delta x)}{\Delta x^2}, \quad (I.7)$$

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} \approx \frac{V(t+\Delta t, x) - 2V(t, x) + V(t-\Delta t, x)}{\Delta t^2}, \quad (I.8)$$

получаем различные порядки аппроксимации этих операторов. При построении разностных схем получаются двухслойные схемы по времени t с использованием формул (I.1), (I.4), трехслойные схемы по времени t с использованием формул (I.6), (I.8).

Пример I. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} = f(t, x), \quad x \in]-\infty, +\infty[, \quad (2)$$

$$0 < t \leq T, \quad U(0, x) = \mu(x).$$

Построим для нее аппроксимирующие схемы. В качестве сетки $\mathcal{D}_h$ используем совокупность точек пересечения прямых $x = ih, t = n\tau$,

$i = 0, \pm 1, \dots, n = 0, 1, \dots, N, \tau = \frac{T}{N}$. Замена производные $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial U}{\partial x}$ разностными аналогами по формулам (I.1) и (I.2), используя трехточечный шаблон

$(n, i), (n, i+1), (n, i-1)$ получим двухслойную схему (она содержит значения искомой функции V на двух слоях). Узел с координатами (t_k, x_k) будем обозначать коротко (k, ℓ) .

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{h} = \varphi_i^n, \quad x_i = ih, t_n = n\tau, \quad (3)$$

$V_i^0 = \mu(x_i), i = 0, \pm 1, \dots, n = 0, 1, \dots, N$. Здесь V_i^n — приближенные значения искомой функции V в узлах сетки $(t_n, x_i) = (n\tau, ih)$. Запишем схему (3) на решении задачи (2). Разложим все члены (3) в ряд Тейлора в окрестности точки (t_n, x_i) и, учитывая, что краевые условия аппроксимируются точно, получаем погрешность аппроксимации схемы порядка $O(\tau+h)$.

$$V_i^{n+1} = (1+\gamma)V_i^n - \gamma V_{i+1}^n + \tau \varphi_i^n, \quad \gamma = \frac{\tau}{h}. \quad (3')$$

Значение V_i^{n+1} в каждой точке $n+1$ слоя $t = t_{n+1}$ выражается по явной формуле (3') через значения V_i^n n -ого слоя. Так как при $t = 0$ задано начальное значение $V_i^0 = \mu(x_i)$, то формула (3') позволяет последовательно определить значение V_i^n на любом слое. Схема (3') называется явной (по способу

хождения решения).

Явная схема получается при использовании формулы (I.3) для $\frac{\partial u}{\partial x}$, т.е. используется трехточечный шаблон $\bullet (n, i-1) \quad \bullet (n, i) \quad \bullet (n, i+1)$

Двухслойная явная схема имеет вид

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{h} = \varphi_i^n, \quad (4)$$

$$V_i^0 = \mu(x), \quad x_i = ih, \quad t_n = n\tau, \quad i=0, \pm 1, \dots, n=0, 1, \dots, N.$$

Порядок аппроксимации этой схемы $O(\tau + h)$.

Третья схема (явная трехслойная) получается при замене производных разностными отношениями по формулам (I.5) и (I.6), т.е. используется пятиточечный шаблон $\bullet (n, i-2) \quad \bullet (n, i-1) \quad \bullet (n, i) \quad \bullet (n, i+1) \quad \bullet (n, i+2)$

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{2\tau} - \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2h} = \varphi_{n,i} \quad (5)$$

$$V_i^0 = \mu(x_i), \quad i=0, \pm 1, \dots, n=0, 1, \dots, N, \quad x_i = ih, \quad t_n = n\tau.$$

Записав схему (5) на решении и задачи (2) и разложив в ряд Тейлора члены (5) в окрестности точки (t_n, x_i) , получаем

$$\frac{u(t, x) - u(t-\tau, x)}{2\tau} - \frac{u(t, x+h) - u(t, x-h)}{2h} = [u_t - u_x + \frac{\tau^2}{2!} u_{tt} - \frac{h^2}{2!} u_{xx}] + O(h^3\tau^3) \approx \varphi(t, x) + O(h^2\tau^2).$$

Так как краевые условия аппроксимируются точно, то в этом случае погрешность аппроксимации схемы $O(h^2 + \tau^2)$. Таким образом, увеличение числа узлов сетки может привести к повышению порядка аппроксимации.

Рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, x) = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, 1) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6)$$

С помощью формул (I.1) и (I.7) получаем

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \frac{V_{i+1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \varphi_i^n, \quad (7)$$

$$V_i^0 = \psi(x_i), \quad V(t, 0) = \chi_1(t), \quad V(t, 1) = \chi_2(t).$$

Эта схема неявная. В полученной схеме разностное уравнение, написанное для фиксированных i и n , нельзя разрешить относительно V_i^{n+1} , выразив это значение через известные значения $V_{i+1}^n, V_i^n, V_{i-1}^n$ с предыдущего слоя. Дело в том, что в это уравнение входят не только неизвестные значения V_i^{n+1} , но также и неизвестные $V_{i-1}^{n+1}, V_{i+1}^{n+1}$.

Схема имеет порядок аппроксимирования $O(\tau + h^2)$.

3. Повышение порядка аппроксимации.

Погрешность аппроксимации дифференциального оператора на решении дифференциального уравнения может быть повышена без изменения шаблона. Рассмотрим это на примере следующих разностных схем.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u = f(t, x), & 0 < x < X, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, x) = g(x), & 0 \leq x \leq X. \end{cases} \quad (8)$$

Разностное уравнение, соответствующее уравнению (8), запишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} + A \frac{V_i^{j+1} + V_i^j}{2} = \varphi_i^{j+\frac{1}{2}}, \\ V_i^0 = g, \end{cases}$$

$$V^j = \begin{Bmatrix} V_0^j \\ V_1^j \\ \vdots \\ V_i^j \\ \vdots \\ V_n^j \end{Bmatrix},$$

где $\varphi^{j+\frac{1}{2}} = \varphi(t_{j+\frac{1}{2}})$.

Разностная схема (9) обычно называется схемой Кранка-Николсона. Схема (9) является результатом попеременного применения схем первого порядка точности, явной и неявной, записанных для интегралов

$t_j \leq t \leq t_{j+\frac{1}{2}}$ и $t_{j+\frac{1}{2}} \leq t \leq t_{j+1}$ соответственно (если A - линейный оператор, не зависящий от t).

$$\begin{cases} \frac{V^{j+\frac{1}{2}} - V^j}{\tau/2} + AV^j = \frac{1}{2} \varphi^{j+\frac{1}{2}}, \\ \frac{V^{j+1} - V^{j+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + AV^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \varphi^{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Исключая из системы разностных уравнений неизвестные $V^{j+\frac{1}{2}}$, приходим к схеме Кранка-Николсона.

Запишем решение схемы (9) на решении задачи (8) и разложим в ряд Тейлора U^{j+1} и U^j в окрестности точки $j+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{U^{j+1} - U^j}{\tau} &= \frac{1}{\tau} \left[U^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} (U_t)^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{2^2 2!} (U_{tt})^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^3}{2^3 3!} (U_{ttt})^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^4) \right] - \\ &- U^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} (U_t)^{j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau^2}{2^2 2!} (U_{tt})^{j+\frac{1}{2}} + \frac{\tau^3}{2^3 3!} (U_{ttt})^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^4) = \\ &= (U_t)^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) \end{aligned}$$

Задача (8) аппроксимируется задачей (9) со вторым порядком по τ .

Таким образом, за счет определения сеточной функции и правой части на $j+\frac{1}{2}$ - слое, можно увеличить порядок аппроксимации по τ до величины $O(\tau^2)$.

Литература: [2], с. 172-193; [5], с. 57-97.

Задание:

1. Исследовать устойчивость схемы

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \alpha \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{h} = \varphi_i^n,$$

$$V_i^0 = \mu_i, \alpha_i = ih, t_n = n\tau, x \in (-\infty, +\infty), t \in [0, T]$$

построенной для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), u(x, 0) = \mu(x)$$

2. Используя принцип максимума, доказать устойчивость явной схемы для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(1, t) = \mu_2(t).$$

Показать устойчивость схемы Кранка-Николсона по спектральному признаку.

Методические указания.

1. Понятие устойчивости схемы.

Пусть в области G с границей Γ требуется найти решение задачи

$$\begin{aligned} Lu &= f(x), x \in G, \\ \ell u &= \mu(x), x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(x)$, $\mu(x)$ - заданные функции (входные данные задачи), L и ℓ - некоторые дифференциальные операторы.

Заменим область $G + \Gamma$ дискретным множеством точек - узлов сетки и пусть h - векторный шаг сетки. Задаче (1) поставим в соответствие разностную схему

$$\begin{aligned} L_h V &= \varphi, \\ \ell_h V &= \chi, \end{aligned} \quad (2)$$

где L_h , ℓ_h - разностные операторы, φ , χ - известные сеточные функции, V - искомая сеточная функция, представляющая приближенное решение u в узлах сетки.

Исследуем условия, при которых решение задачи (2) будет стремиться к решению задачи (1) при $|h| \rightarrow 0$.

Будем говорить, что решение разностной задачи V сходится по норме к решению исходной задачи U в узлах сетки, если

$$\|V_h - U_h\| \rightarrow 0 \text{ при } |h| \rightarrow 0.$$

Разностная схема имеет K -й порядок точности или сходится со скоростью $O(|h|^K)$, если при достаточно малом $|h|$ выполняется неравенство

$$\|V_h - U_h\| \leq M |h|^K,$$

где $M > 0$ - постоянная, независимая от $|h|$.

Пусть схема (2) аппроксимирует задачу (1) с порядком m . Это означает, что схема (2) выписанная на решении исходной задачи (1), дает погрешность аппроксимации

$$\psi_h = L_h U_h - \varphi_h \quad \text{и} \quad \nu_h = \ell_h U_h - \chi_h,$$

причем

$$\|\psi_h\| = O(|h|^m), \quad \|\nu_h\| = O(|h|^m).$$

Возникает вопрос: как зависит порядок точности схемы от порядка аппроксимации на решении исходной задачи? Погрешность $V_h - U_h$ есть решение задачи (2) с правыми частями ψ_h и ν_h . Поэтому вопрос о связи порядка точности с порядком аппроксимации сводится к вопросу о характере зависимости решения разностной схемы от входных данных. Если это решение непрерывно зависит от входных данных, то схему называют устойчивой, и порядок точности совпадает с порядком аппроксимации. Из чего следует, что

$$\|V_h - U_h\| \rightarrow 0 \text{ при } |h| \rightarrow 0,$$

т.е. решение, полученное по схеме (2), сходится к решению задачи (1) на сетке или разностная схема сходится.

В случае линейных операторов для доказательства устойчивости схемы достаточно в неравенстве

$$\|V_h\| \leq C_1 \|\varphi_h\| + C_2 \|\chi_h\| \quad (3)$$

выбрать постоянные C_1 и C_2 , не зависящие от $|h|$. При $\chi_h \equiv 0$ из неравенства (3) следует устойчивость схемы только по правой части, а при $\varphi_h \equiv 0$ - устойчивость только по начальным данным.

Познакомимся с наиболее удобными приемами исследования устойчивости схем.

2. Исследование устойчивости по принципу максимума

С этим приемом мы уже познакомились, когда исследовали устойчивость краевых разностных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим еще один пример

Пусть дана задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$$

$$U(x, 0) = \mu(x), \quad x \in]-\infty, +\infty[, \quad t \in]0, T]$$

Построим схему

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{h} = \varphi_i^n,$$

$$V_i^0 = \psi_i, \quad x_i = ih, \quad t_n = n\tau, \quad i=0, \pm 1, \dots, \quad n=0, 1, \dots, \frac{T}{\tau}.$$

Перепишем схему в виде

$$V_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) V_i^n + \frac{\tau}{h} V_{i+1}^n + \tau \varphi_i^n \quad (4)$$

и оценим V_i^{n+1} при условии $1 - \frac{\tau}{h} \geq 0$

$$\text{Пусть } \|V_h\| = \max_{i,n} |V_i^n|, \quad \|\varphi_h\| = \max_{i,n} |\varphi_i^n|, \quad (5)$$

$$\|\psi_h\| = \max_i |\psi_i|$$

из (4) имеем

$$|V_i^{n+1}| \leq \left(1 - \frac{\tau}{h} + \frac{\tau}{h}\right) \max_{i,n} |V_i^n| + \tau \max_{i,n} |\varphi_i^n|,$$

откуда

$$\max_{i,n} |V_i^{n+1}| \leq \max_{i,n} |V_i^n| + \tau \max_{i,n} |\varphi_i^n|.$$

Сложим неравенства

$$\max_{i,n} |V_i^1| \leq \max_{i,n} |V_i^0| + \tau \max_{i,n} |\varphi_i^1|,$$

$$\begin{aligned} \max |V_i^2| &\leq \max |V_i^1| + \tau \max |\varphi_i^1|, \\ \max |V_i^3| &\leq \max |V_i^2| + \tau \max |\varphi_i^2|, \\ &\dots \\ \max |V_i^n| &\leq \max |V_i^{n-1}| + \tau \max |\varphi_i^{n-1}|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\max |V_i^0| = \max |\psi_i|$,

получим

$$\max |V_i^n| \leq \max |\psi_i| + n\tau \max |\varphi_i^1|,$$

отсюда

$$\max |\varphi_i^n| \leq \max |\psi_i| + \tau N \max |\varphi_i^1|.$$

Согласно (5) имеем

$$\|V_h\| \leq \|\psi_h\| + T\|\varphi_h\|, \quad \text{где } T = \tau N$$

Таким образом, построенная схема устойчива при условии $1 - \frac{\tau}{h} > 0$ или $\tau \leq h$. Схемы, устойчивые при любых шагах сетки, называются абсолютно или безусловно устойчивыми. Схемы, устойчивость которых зависит от некоторых ограничений на шаги сетки, называются условно устойчивыми.

3. Устойчивость как ограниченность норм степеней оператора перехода

Рассмотрим схему

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} = A_h [\sigma V^{n+1} + (1-\sigma) V^n] = f^n, \quad (6)$$

$V^0 = \alpha$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $\tau = \frac{T}{N}$
где $\sigma \in [0, 1]$ - параметр схемы.
Выразим V^{n+1} через V^n

$$[E + \tau \sigma A_h] V^{n+1} = [E - \tau(1-\sigma) A_h] V^n + \tau f^n,$$

или

$$V^{n+1} = [E + \tau \sigma A_h]^{-1} [E - \tau(1-\sigma) A_h] V^n + \tau [E + \tau \sigma A_h]^{-1} f^n.$$

Будем называть запись разностной схемы

$$V^{n+1} = R_h V^n + \tau \varphi^n, \quad V^0 = \alpha \quad (7)$$

канонической, а R_h - оператором перехода. Из (7) следует, что

$$\begin{aligned} V^1 &= R_h \alpha + \tau \varphi^0, \\ V^2 &= R_h [R_h \alpha + \tau \varphi^0] + \tau \varphi^1 = R_h^2 \alpha + \tau R_h \varphi^0 + \tau \varphi^1, \\ V^n &= R_h^n \alpha + \tau R_h^{n-1} \varphi^0 + \tau R_h^{n-2} \varphi^1 + \dots + \tau \varphi^{n-1}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\|V^n\| \leq \|R_h^n\| \|\alpha\| + \tau \sum_{i=0}^{n-1} \|R_h^{n-i}\| \|\varphi^{n-i}\|. \quad (8)$$

Из (8) видно, что если будет установлена равномерная относительно τ ограниченность норм степеней операторов перехода, т.е.

$$\|R_h^n\| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

то оценка $\|V_h\| \leq C [\|\alpha\| + T\|\varphi_h\|]$,

является

доказательство устойчивости схемы (6).

Приведем оценки норм некоторых операторов:

$$\|(E + \sigma \tau A_h)^{-1}\| \leq 1, \quad \|(E - \sigma \tau A_h)(E + \sigma \tau A_h)^{-1}\| \leq 1,$$

где A_h - положительно определенный оператор и $\sigma \geq 0$.

В схеме (6) при $\sigma = 1$ нормы степеней оператора перехода

$R_h = (E + \sigma \tau A_h)^{-1}$ будут ограничены: $\|R_h^n\| \leq 1$, если A_h - положительно определенный оператор.

Для симметричных операторов в качестве нормы можно взять верхнюю границу спектра оператора

$$\|A_h\| = \max_k |\lambda_k|, \quad \text{где } \lambda_k \text{ - собственные числа, найденные из решения спектральной задачи:}$$

$$A_h x_k = \lambda_k x_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак, в схеме (6) в этом случае имеем

$$\|R_h\| = \|(E + \tau \sigma A_h)^{-1} [E - \tau(1-\sigma) A_h]\| = \max_k \left| \frac{1 - \tau(1-\sigma) \lambda_k}{1 + \tau \sigma \lambda_k} \right|$$

и $\|R_h\| \leq 1$ при любых значениях τ , если $\sigma \neq 0$ и $\lambda_k > 0$.
Найдем условие устойчивости схемы (6) при $\sigma = 0$. Положим $\|R_h\| \leq 1$, тогда $\|E - \tau A_h\| = \max_k |1 - \tau \lambda_k| \leq 1$ или $-1 \leq 1 - \tau \lambda_k \leq 1$, откуда следует, что при

$$\tau \leq \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad \text{схема (6) будет условно устойчивой.}$$

Заметим, что выбор параметра приводит к существенным различиям в алгоритмах решения системы (6). Так при $\sigma = 0$ пересчит V^{n+1} через V^n явный, тогда как при $\sigma \neq 0$ приходится находить обратный оператор $(E + \tau \sigma A_h)^{-1}$. В зависимости от этого различают схемы явные и неявные.

Необходимо помнить, что ограниченность норм степеней оператора перехода доказывает устойчивость схемы (6) как по начальным данным, так и по правой части. Если же φ^n получено как $R_h^* \varphi^n$, например, в схеме (6), то мы будем иметь доказанной только устойчивость по начальным данным. Устойчивость же по правой части необходимо доказать, оценив норму оператора R_h^* дополнительно.

4. Спектральный признак устойчивости

Приведенный выше признак оценки норм оператора через его спектр является одним из случаев спектрального признака устойчивости схем с операторами любого вида.

Рассмотрим каноническое разностное уравнение

$$V^{n+1} = R_h V^n + \tau \varphi^n, \quad V^0 = \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Пусть оператор R_h имеет полную ортонормированную систему собственных функций $\{X_k\}$ и набор собственных чисел λ_k , соответствующих спектральной задаче $R_h X_k = \lambda_k X_k$.

Разложим в ряды Фурье все наши сеточные функции

$$V^n = \sum_k V_k^n X_k, \quad \varphi^n = \sum_k \varphi_k^n X_k, \quad \theta = \sum_k \theta_k X_k, \quad (9)$$

где $\varphi_k^n = (\varphi^n, X_k)$, $\theta_k = (\theta, X_k)$, V_k^n - неизвестные коэффициенты разложения. Подставим ряды (9) в каноническое уравнение и результат скалярно умножим на X_m , $m = 1, 2, \dots$. В результате придем к следующим уравнениям для V_k^n :

$$V_k^{n+1} = \lambda_k V_k^n + \tau \varphi_k^n, \quad V_k^0 = \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Решение схемы (9) опять получим последовательно подстановкой при $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$:

$$V_k^n = \lambda_k^n \theta_k + \tau \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_k^{n-i} \varphi_k^{i+1}. \quad (11)$$

Из уравнения следует оценка

$$|V_k^n| \leq \max_k |\lambda_k^n| [|\theta| + T \max_k |\varphi_k^n|].$$

Отсюда видно, что при $\max_k |\lambda_k^n| \leq M$ для каждого V_k^n имеет место устойчивость $|V_k^n| \leq M[|\theta| + T \max_k |\varphi_k^n|]$, из которой следует устойчивость всего решения V^n . Это и есть спектральный критерий устойчивости Неймана. Следуя этому признаку, в условно устойчивых схемах можно подобрать параметры сетки, при которых $|\lambda_k| \leq 1 + c\tau$, $c > 0$. Тогда

$$|\lambda_k^n| \leq (1 + c\tau)^n = (1 + c \frac{T}{N})^n \leq (1 + c \frac{T}{N})^N \leq e^{cT} = M.$$

Задача. Будет ли устойчивой схема переменных направлений

$$\begin{cases} \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\tau} = \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}, \\ \frac{V_{i,j}^{n+2} - V_{i,j}^{n+1}}{\tau} = \frac{V_{i,j+1}^{n+2} - 2V_{i,j}^{n+2} + V_{i,j-1}^{n+2}}{h^2} + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{h^2}, \\ V_{i,j}^0 = M_{i,j}, \end{cases} \quad (12)$$

написанная для решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(0, x, y) = M, \quad u|_{x,y \in \Gamma} = 0.$$

Решение. Приведем схему к каноническому виду, записав предварительно в операторной форме:

$$\begin{aligned} (E - \tau A_2) V^{n+1} &= (E + \tau A_1) V^n, \\ (E - \tau A_1) V^{n+2} &= (E + \tau A_2) V^{n+1}, \\ V^0 &= M \end{aligned} \quad (13)$$

$$V^{n+1} = (E - \tau A_2)^{-1} (E + \tau A_1) V^n,$$

$$V^{n+2} = (E - \tau A_1)^{-1} (E + \tau A_2) V^{n+1},$$

$V^0 = \mu$.
Здесь $A_1 V$ аппроксимирует $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $A_2 V \sim \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
Каноническое уравнение окончательно запишется так:

$$V^{n+2} = (E - \tau A_1)^{-1} (E + \tau A_2) (E - \tau A_2)^{-1} (E + \tau A_1) V^n, V^0 = \mu.$$

Собственные числа оператора перехода

$$R_h = (E - \tau A_1)^{-1} (E + \tau A_2) (E - \tau A_2)^{-1} (E + \tau A_1)$$

следующие:

$$\tau_{k,m} = \frac{(1 + \tau \lambda_{2k})(1 + \tau \lambda_{1m})}{(1 - \tau \lambda_{1m})(1 - \tau \lambda_{2k})},$$

где

$$\lambda_{1m} = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{m\pi h}{2}, \quad \lambda_{2k} = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}.$$

Видим, что все $\tau_{k,m} < 1$ и по спектральному признаку, следовательно, схема устойчива абсолютно.

5. Метод энергетических неравенств

При рассмотрении задач с начальными условиями, устойчивость показывалась при переходе от нулевого временного слоя ко всем другим. Сейчас рассмотрим один из параметров доказательства устойчивости краевых задач.

Для задачи $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y),$
 $x, y \in \mathcal{D}, \quad u|_{x,y \in \Gamma} = 0,$

построим схему:

$$-\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} - \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j},$$

$$V_{0,j} = V_{N,j} = V_{i,0} = V_{i,M} = 0, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1$$

или в операторной форме $L_h V_h = f_h,$

где L_h — положительно определенный оператор-матрица, т.е.

$$(L_h V_h, V_h) \geq \varepsilon (V_h, V_h), \quad \varepsilon > 0.$$

Умножим скалярно уравнение (13) на $V_h: (L_h V_h, V_h) = (f_h, V_h)$.
Из полученного уравнения следует, что $\varepsilon (V_h, V_h) \leq (f_h, V_h)$.
Правую часть неравенства оценим с помощью неравенства Коши-Бунковского:

$$\varepsilon (V_h, V_h) \leq \sqrt{(f_h, f_h)(V_h, V_h)} \quad (14)$$

Введем энергетические нормы:

$$\|V_h\| = \sqrt{(V_h, V_h)}, \quad \|f_h\| = \sqrt{(f_h, f_h)}.$$

Тогда неравенство (13) переписывается как

$$\varepsilon \|V_h\|^2 \leq \|V_h\| \|f_h\| \quad \text{или} \quad \varepsilon \|V_h\| \leq \|f_h\|,$$

что доказывает устойчивость схемы (12): $\|V_h\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_h\|$.

Заметим, что при доказательстве устойчивости схем интересен сам факт отыскания постоянных в неравенстве (3), тогда как при оценке погрешности решения для соответствующего требованиям точности выбора параметров сетки требуется знание и числовых значений этих постоянных. Они находятся с помощью вспомогательных лемм.

Литература: [2], с. 175, 221-227; [5], с. 346-406.

Лабораторная работа №6

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

I. Задание:

I. Исследовать сходимость к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(0, x) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

следующих разностных схем:

а)
$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \alpha \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$V_i^0 = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

$$б) \frac{V_i^{n+1} - V_i^{n-1}}{\tau} = \alpha \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2h}, \quad i=1, 2, \dots, M-1,$$

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad V_i^0 = \mu_i, \quad n=0, 1, \dots, N-1, \quad i=0, 1, \dots, M.$$

$$в) \frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\tau} = \alpha \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{h}, \quad i=1, 2, \dots, M-1,$$

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

$$V_i^0 = \mu_i, \quad i=0, 1, \dots, M$$

$$г) \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \alpha \sigma \frac{V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1}}{h} + \alpha(1-\sigma) \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{h},$$

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n=0, 1, \dots, N-1, \quad \sigma \in [0, 1],$$

$$V_i^0 = \mu_i, \quad i=0, 1, \dots, M.$$

$$д) \frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\tau} = \alpha \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2h}, \quad i=1, 2, \dots, M-1,$$

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n=0, 1, \dots, N-1,$$

$$V_i^0 = \mu_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, M.$$

Здесь

$$h = \frac{1}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Методические указания.

Пусть дана задача

$$\begin{cases} Lu = f(x), & x \in G, \\ \ell u = \mu(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (I)$$

Рассмотрим разностную схему:

$$\begin{cases} L_h V = \varphi, & x \in \omega_h \\ \ell_h V = \chi, & x \in \gamma_h \end{cases} \quad (2)$$

Говорят, что решение разностной задачи (2) сходится к решению задачи (I), если

$$\|U_h - V\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Схема (2) аппроксимирует задачу (I) с порядком n на решении U этой исходной задачи, если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$, C_1 , C_2 , что для всех $h \leq \tilde{h}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|L_h U_h - \varphi\|_h &\leq C_1 |h|^{n_1}, \\ \|\ell_h U_h - \chi\|_h &\leq C_2 |h|^{n_2}, \quad n = \min(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Разностная схема (2) называется устойчивой, если существуют такие положительные константы $\tilde{h}$, C_3 , C_4 , что для всех $h \leq \tilde{h}$ и φ и χ справедливы свойства:

- 1) существует, и притом единственное, решение разностных задач (2);
- 2) имеет место неравенство

$$\|V\|_h \leq C_3 \|\varphi\|_h + C_4 \|\chi\|_h \quad (4)$$

Для корректно поставленных задач показано, что сходимость схемы (2) зависит от того, аппроксимирует ли (2) задачу (I) и является ли схема (2) устойчивой. Имеет место следующая теорема сходимости (теорема Лакса);

Если

- 1) существует решение U задачи (I),
- 2) операторы L_h и ℓ_h - линейные,
- 3) разностная схема (2) аппроксимирует исходную задачу (I) на решении U порядком n ,
- 4) разностная схема (2) устойчива, то решение разностной схемы V сходится к решению U исходной задачи, т.е.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|U_h - V\|_h = 0$$

примем вместо следующей оценки скорости сходимости:

$$\|u_h - V\|_h \leq (C_1 C_3 + C_2 C_4) h^n,$$

где C_1 и C_2 из (3), а C_3 и C_4 из (4).

Доказательство:

Пусть h — минимальное из h_1 , введенных в определениях аппроксимации и устойчивости. Тогда, в силу устойчивости для любых правых частей φ и χ при $h < h_1$ существует единственное решение V , т.е. мы имеем право рассматривать для $h < h_1$ разность $u_h - V$. В силу линейности оператора L_h , получаем

$$L_h[u_h - V] = L_h u_h - L_h V = L_h u_h - \varphi, \quad (5)$$

Аналогично

$$l_h[u_h - V] = l_h u_h - l_h V = l_h u_h - \chi. \quad (6)$$

Так как $h < h_1$, то из (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} \|u_h - V\|_h &\leq C_1 \|L_h u_h - \varphi\|_h + C_2 \|l_h u_h - \chi\|_h \leq \\ &\leq C_1 C_3 h^{n+1} + C_2 C_4 h^{n+2} \leq (C_1 C_3 + C_2 C_4) h^n. \end{aligned}$$

По порядку убывает, можно считать, что $h < 1$. Доказательство окончено.

Известно по теореме сходимости, после построения какой-либо разностной схемы для задачи (1) необходимо показать, что построенная схема аппроксимирует исходную задачу, найти порядок аппроксимации, доказать устойчивость разностной схемы и на основании этих факторов по теореме сходимости можно говорить о сходимости разностной схемы к решению исходной задачи и оценить скорость сходимости.

Пример. Показать, при каких τ и h решение разностной задачи

$$\begin{cases} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} + \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{h} = 0, \\ V_i^0 = \mu, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

будет сходиться к решению дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \mu(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Покажем, что схема (7) аппроксимирует дифференциальную задачу (8) на решении u . Выпишем с эту на решении u :

$$\frac{V(x_i, t_n + \tau) - V(x_i, t_n)}{\tau} + \frac{V(x_i, t_n) - V(x_i - h, t_n)}{h} + \psi_{i,n} = 0.$$

Разложим $V(x_i, t_n + \tau)$ и $V(x_i - h, t_n)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_i, t_n) . Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} [V(x_i, t_n) + \tau V_t(x_i, t_n) + \frac{\tau^2}{2} V_{tt}(x_i, t_n) + o(\tau^3) - V(x_i, t_n)] + \\ &+ \frac{1}{h} [V(x_i, t_n) - V(x_i, t_n) + V_x(x_i, t_n)h - \frac{h^2}{2} V_{xx}(x_i, t_n) + o(h^3)] + \\ &+ \psi_{i,n} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial V(x_i, t_n)}{\partial t} + o(\tau) - \frac{\partial V(x_i, t_n)}{\partial x} + o(h) + \psi_{i,n} = 0. \quad (9)$$

Запишем дифференциальное уравнение в узлах сетки, в которых

$$V(x_i, t_n) = u(x_i, t_n)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} + \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), имеем

$$\psi_{i,n} = o(\tau) + o(h) = o(\tau + h).$$

Следовательно, разностная схема (7) аппроксимирует дифференциальную задачу (8) с первым порядком аппроксимации по t и x .

Покажем устойчивость схемы (7). Запишем ее в каноническом виде:

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} + AV^n &= 0, \\ V^0 &= \mu, \end{aligned}$$

где $V^{n+1} = (V_1^{n+1}, V_2^{n+1}, \dots)$, $V^n = (V_1^n, V_2^n, \dots)$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

$$V^{n+1} = (E - \tau A) V^n \quad \text{-- канонический вид схемы (7).}$$

$$R_h = E - \tau A \quad \text{-- оператор перехода.}$$

Покажем, что норма степени оператора перехода R_h ограничена, т.е.

$$\|R_h\| \leq \|R_h\|^n = \|E - \tau A\|^n \leq C,$$

$$\|R_h\| = \|E - \tau A\| \leq \|E\| + \tau \|A\| = 1 + \tau \|A\| \quad (\text{по свойствам нормы})$$

За норму матрицы A возьмем модуль наибольшего собственного значения

$$\|A\| = |\lambda_{\max}|.$$

Из решения уравнения

$$\frac{1}{h} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеем

$$\lambda = \frac{1}{h}, \quad \|A\| = \frac{1}{h}$$

Следовательно,

$$\|R_h\| = 1 + \tau \cdot \frac{1}{h} = 1 + \frac{\tau}{h}$$

Для устойчивости необходимо, чтобы

$$0 < 1 + \frac{\tau}{h} \leq 1$$

так как степень числа меньше 1 меньше или равна 1.

Имеем $\frac{\tau}{h} < 1$, откуда $\tau < h$.

Следовательно,

$$\|R_h\|^n \leq \|R_h\|^n \leq \|E - \tau A\|^n \leq (1 + \frac{\tau}{h})^n \leq 1, \quad \text{г.и. } \tau < h.$$

Таким образом, схема (7) устойчива при $\tau < h$.

Применяя теорему Лагранжа, заключаем, что решение схемы (7) будет сходиться к решению задачи (8) при $\tau < h$, т.е.

$$\|u_h - V_h\| \leq C(h + \tau).$$

Литература: [2], с. 171-267; [5], с. 149-227.

Лабораторная работа №7

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задание.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x^2 + 2t), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = c, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \alpha t, \quad 0 \leq t \leq T$$

а) по явной разностной схеме;

б) по неявной разностной схеме;

в) по схеме Кранка-Николсона.

Для каждой из схем показать сходимость решения ее к решению исходной задачи:

$$\alpha = 1, 2, 3, 4, 5; \quad T = 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06.$$

Методические указания.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = b(t), \quad u(1, t) = c(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \mu(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где f, b, c, μ -- заданные достаточно гладкие функции, $\alpha^2 = \text{const}$, переменные x и t пробегают все значения из области

определения решения

$$D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Аппроксимируем задачу (I) разностной схемой со 2-м порядком точности по x . Разобьем интервал $0 \leq x \leq 1$ на N интервалов длины $h = \frac{1}{N}$. Тогда приходим к следующей задаче

$$\begin{cases} V_i + \alpha^2 \frac{V_{i-1} + 2V_i - V_{i+1}}{h^2} = \varphi_i(t), & 1 \leq i \leq N-1, \\ V_0 = b(t), \quad V_N = c(t), & 0 \leq t \leq T, \\ V_i^0 = \mu_i, & 1 \leq i \leq N-1, \end{cases} \quad (2)$$

или в векторно-матричном виде:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \alpha^2 AV = g(t), \\ V = \mu \quad \text{при } t=0, \end{cases} \quad (3)$$

где A - положительная матрица, а $g(t)$, $V(t)$ - вектор-функции, определенные для любого t .

Систему (2), исключая граничные точки, запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{dV_i}{dt} + \alpha^2 \frac{V_{i-1} + 2V_i - V_{i+1}}{h^2} = g_i, & 1 \leq i \leq N-1, \\ V_0 = 0, \quad V_N = 0, \quad g_1 = f_1 + \frac{b}{h^2}, \quad g_{N-1} = f_{N-1} + \frac{c}{h^2}, \\ V_i^0 = \mu_i, & 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (4)$$

В этом случае решение имеет смысл только в узловых точках $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) проинтегрируем каждое из уравнений по времени на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$.

Получим

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \alpha^2 \frac{V_{i-1}^n - 2V_i^n + V_{i+1}^n}{h^2} + \bar{g}_i^n, \quad (5)$$

где

$$\bar{V}_i^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} V_i dt, \quad \bar{g}_i^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g_i dt, \quad (6)$$

$$V_i^0 = V_i(t_0), \quad \tau = \Delta t.$$

Различные разностные уравнения будем получать на основе тех или иных аппроксимаций в (6). Предположим, что имеет место одна из трех следующих простейших формул:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} V_i dt \approx \begin{Bmatrix} V_i^n \\ V_i^{n+1} \\ \frac{1}{2}(V_i^n + V_i^{n+1}) \end{Bmatrix}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g_i dt \approx \begin{Bmatrix} g_i^n \\ g_i^{n+1} \\ \frac{1}{2}(g_i^n + g_i^{n+1}) \end{Bmatrix}$$

Тогда приходим к наиболее распространенным разностным схемам:

- явной схеме треугольника $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \alpha^2 \frac{V_{i-1}^n - 2V_i^n + V_{i+1}^n}{h^2} + g_i^n, \quad (7)$$

- неявной схеме треугольника $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \alpha^2 \frac{V_{i-1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i+1}^{n+1}}{h^2} + g_i^n, \quad (8)$$

- схеме Кранка-Николсона $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = \alpha^2 \left(\frac{V_{i-1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i+1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{V_{i-1}^n - 2V_i^n + V_{i+1}^n}{2h^2} \right) + \frac{g_i^{n+1} + g_i^n}{2}, \quad (9)$$

к системам (7) - (9) необходимо присоединить граничные условия

$$V_0^n = 0, \quad V_N^n = 0 \quad \text{и начальное} \quad V_i^0 = \mu_i. \quad (10)$$

Эти схемы можно записать в векторно-матричном виде

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} = \alpha^2 AV^n + g^n,$$

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} = \alpha^2 AV^{n+1} + g^n,$$

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} = \alpha^2 (A_1 V^n + A_2 V^{n+1}) + g^{n+\frac{1}{2}}.$$

Схема (7) явно газришается относительно неизвестной

$$\begin{aligned} V_i^{n+1} &= V_i^n + \tau (V_{i-1}^n - 2V_i^n + V_{i+1}^n) + \tau g_i^n, \\ V_0^n &= 0, \quad V_N^n = 0, \quad V_i^0 = \mu_i, \quad \tau = \frac{\tau \alpha^2}{h^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Схема (8) сводится к решению разностного уравнения

$$-V_{i-1}^{n+1} + (2 + \frac{1}{2})V_i^{n+1} - V_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}U_i^n + h^2 g_i^{n+1/2}. \quad (12)$$

Схема (9) имеет вид

$$-\varphi_{i-1}^{n+1} + \frac{1+2\tau}{2}\varphi_i^{n+1} - \varphi_{i+1}^{n+1} = \frac{\tau}{2}\varphi_i^n + h^2 g_i^{n+1/2}, \quad (13)$$

$$\varphi_0^{n+1} = 0, \varphi_N^{n+1} = 0, \varphi_i^{n+1} = 2\varphi_i^n - U_i^n, g_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(g_i^n + g_i^{n+1}).$$

Порядок аппроксимации схемы (7), (6) - первый по t и второй по x , схемы (9) - 2-ой по t и x . Исследуем устойчивость схем (7-9) при условиях (10). Для этого разложим решение в ряд Фурье по полной системе функций $\{\sin n\pi x h\}$, где $h = \frac{1}{N}$ удовлетворяющих условиям (10). Пусть

$$U_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} U_k^n \sin n\pi x h, \quad g_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} G_k^n \sin n\pi x h, \quad (14)$$

$$\text{где } U_k^n = \frac{1}{q_k} \sum_{i=1}^{N-1} U_i^n \sin n\pi x h, \quad G_k^n = \frac{1}{q_k} \sum_{i=1}^{N-1} g_i^n \sin n\pi x h, \\ q_k = \sum_{i=1}^{N-1} \sin^2 n\pi x h$$

Подставив (14) в (7) - (9) и умножив полученные соотношения на $\sin n\pi x h$, просуммируем по i . В результате приходим к рекуррентным соотношениям для коэффициентов Фурье.

$$\text{Для схемы } \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \lambda_i U_i^n = G_i^n, \quad (15)$$

$$\text{для схемы } \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \lambda_i U_i^{n+1} = G_i^{n+1/2}, \quad (16)$$

$$\text{для схемы } \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \lambda_i \frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} = \frac{G_i^{n+1/2} + G_i^n}{2}, \quad (17)$$

$$\text{где } \lambda_i = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{n\pi x h}{2}. \quad (18)$$

Решая уравнения (15) - (17), получим соответственно

$$U_i^{n+1} = (1 - \tau \lambda_i) U_i^n + \tau G_i^n,$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{1 + \tau \lambda_i} U_i^n + \frac{\tau}{1 + \tau \lambda_i} G_i^{n+1/2}, \quad (19)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1 - \frac{\tau}{2} \lambda_i}{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_i} U_i^n + \frac{\tau}{2} \frac{G_i^{n+1/2} + G_i^n}{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_i}.$$

Для λ_i справедливо

$$\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{n\pi x h}{2} \leq \lambda_i \leq \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{n\pi x h}{2} < \frac{4}{h^2}. \quad (20)$$

При $\frac{\tau h}{2} < 1$ неравенства (20) будут иметь вид

$$\tau^2 \leq \lambda_i \leq \frac{4}{h^2}. \quad (21)$$

Исходя из (20) и (19) имеем

$$\tau \leq \frac{h^2}{2 \cos^2 \frac{n\pi x h}{2}} \leq \frac{h^2}{2}. \quad (22)$$

Тогда схема треугольника $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ будет устойчивой, так как для всех i имеет место неравенство

$$|1 - \tau \lambda_i| < 1. \quad (23)$$

В случае неярной схемы треугольника и схемы Кранка-Николсона соответствующие неравенства

$$\left| \frac{1}{1 + \tau \lambda_i} \right| < 1, \quad \left| \frac{1 - \frac{\tau}{2} \lambda_i}{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_i} \right| < 1$$

выполняются при любых i и $\tau > 0$. Это значит, что схема $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ устойчива при условии (22), а схема $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ абсолютно устойчива.

Литература: [2], с. 254-267; [5], с. 277-319.

Лабораторная работа № 8

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Задание: Построить сходящуюся разностную схему второго порядка точности для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = p(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = q(x),$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t)$$

и получить на ЭВМ численные результаты решения для данных α , $p(x)$, $q(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ и выбранных параметров сетки. Сходимость построенной схемы доказать.

Методические указания.

С уравнением гиперболического типа связан широкий класс задач математической физики. Простейшие из таких уравнений — уравнение колебаний однородной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (1)$$

В начальный момент заданы условия

$$u(x, 0) = p(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = q(x) \quad \text{— начальное отклонение и начальная скорость струны.}$$

Концы струны движутся по заданным законам:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t).$$

1. Постановка разностной задачи и вычисление погрешности аппроксимации.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda u = f(x, t), \quad u(x, 0) = p(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = q(x)$$

в области $\bar{\Omega} = (0 < x < l, \quad 0 \leq t \leq T)$. Здесь пространственный оператор Λ будем брать только положительно определенным (все собственные числа его положительны). Входные данные $p(x)$, $q(x)$ таковы, что задача (3) имеет достаточно гладкое решение.

Введем в области $\bar{\Omega}$ прямоугольную сетку

$$\alpha_{i,n} = (x_i, t_n), \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq n \leq N, \quad h = \frac{l}{M}, \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

Так как уравнение (3) содержит вторую производную по t , то число временных слоев N не может быть меньше трех.

Рассмотрим семейство разностных схем для задачи (3) в форме

$$\frac{V_i^{n+1} - 2V_i^n + V_i^{n-1}}{\tau^2} + A_h (\sigma V_i^{n+1} + (1-\sigma)V_i^n + \sigma V_i^{n-1}) = f_i^n, \quad (4)$$

$$V_i^0 = p_i,$$

$$V_i^1 = (E - \frac{\tau^2}{2} A) p_i + \tau q_i + \frac{\tau^2}{2} f_i^0, \quad 0 \leq i \leq M, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (5)$$

где σ — параметр схемы $V_i^n = u(x_i, t_n)$ — приближенное решение задачи (3) в любой (x_i, t_n) — точке.

Разностное уравнение (5) получено разложением слагаемых в уравнении $\frac{V_i^1 - V_i^0}{\tau} = q_i + \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$ в

ряд Тейлора в окрестности точки $t=0$ и последующим исключением из изложенных с помощью уравнения и начальных условий в задаче (3).

Разностный оператор A_h в схеме (4) аппроксимирует оператор A со вторым порядком по h . Например, в задаче (1), (2) это будет оператор

$$A_h V_h = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \\ V_0 = \mu, \quad V_M = \nu \end{cases}$$

При $\sigma = 0$ схема (4) — явная, при $\sigma \neq 0$ — неявная. Найдем погрешность аппроксимации разностного уравнения (4).

Учитывая, что

$$V^{n+1} = V^n + \tau \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau}, \quad V^{n-1} = V^n - \tau \frac{V^n - V^{n-1}}{\tau}$$

имеем

$$\begin{aligned} \sigma V^{n+1} + (1-2\sigma)V^n + \sigma V^{n-1} &= V^n + \sigma \tau^2 \frac{V^{n+1} - 2V^n + V^{n-1}}{\tau^2} = \\ &= V^n + \sigma \tau^2 \left(\frac{\partial^2 V(x, t_n)}{\partial t^2} + o(\tau^2) \right) = V^n + \sigma \tau^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + o(\tau^4). \end{aligned}$$

Вплетем уравнение (4) на решении сходной задачи (3), выполним разложение в ряд Тейлора слагаемых в окрестности точки (x_i, t_n) и найдем погрешность аппроксимации в уравнении (4):

$$\delta_{i,n} = \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial t^2} + o(\tau^2) + \Lambda[u(x_i, t_n) + \sigma \tau^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial t^2} + o(h^2 \tau^2)] -$$

$$-f(x_i, t_n) = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au - f(x, t) \right]_{x=x_i, t=t_n} + O(h^2 + \tau^2) = O(h^2 + \tau^2)$$

здесь учтено, что $A_h u_h = [Au]_h + O(h^2)$.

Поступая аналогично с уравнением (5), убеждаемся, что оно имеет погрешность $\delta_{i,n}^* = O(\tau^2)$. Следовательно, схема (4) - (5) имеет второй порядок аппроксимации по x и по t при любом значении параметра σ .

П. Исследование устойчивости.

Для исследования схемы (4) на устойчивость используем спектральный метод. Пусть $\varphi_k(x_i)$ и $\varphi_k^*(x_i)$ - собственные функции, а $\lambda_k > 0$ - собственные числа спектральных задач: $A_h \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, $A_h^* \varphi_k^* = \lambda_k \varphi_k^*$, где A_h^* сопряженный к A_h оператор и набор $\{\varphi_k\}$ образует базис. Решение уравнения (4) будем искать в виде ряда Фурье

$$V_i^n = \sum_k V_k^n \varphi_k(x_i),$$

где

$$V_k^n = (V_k^n, \varphi_k^*) = \sum_i V_i^n(x_i) \varphi_k^*(x_i).$$

Подставив этот ряд в (4) и умножив скалярно результат на φ_k^* , получим уравнение для коэффициентов Фурье V_k^n :

$$\frac{V_k^{n+1} - 2V_k^n + V_k^{n-1}}{\tau^2} + \lambda_k [\sigma V_k^n + (1-2\sigma)V_k^n + \sigma V_k^{n-1}] = f_k^n, \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (6), будем искать в виде степенной функции

$$V_k^n = (\eta_k)^n. \quad (7)$$

Для нахождения η_k после подстановки (7) в левую часть уравнения (6) получаем следующее характеристическое уравнение

$$\eta_k - \frac{2 - \tau^2 \lambda_k (1 - 2\sigma)}{1 + \tau^2 \lambda_k \sigma} \eta_k + 1 = 0,$$

из которого найдем два корня

$$\eta_k = \frac{2 - \tau^2 \lambda_k (1 - 2\sigma) \pm \tau \sqrt{\lambda_k \cdot \lambda_k \tau^2 (1 - 4\sigma) - 4}}{2(1 + \tau^2 \lambda_k \sigma)}$$

Если $\lambda_k \tau^2 (1 - 4\sigma) - 4 < 0$, то корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными и по модулю равными единице: $|\eta_k| = 1$. Вследствие этого по спектральному признаку Неймана схема (4) будет устойчивой по начальным данным.

Условие $\lambda_k \tau^2 (1 - 4\sigma) - 4 < 0$ будет выполнено всегда при любых τ , если $1 - 4\sigma \leq 0$, т.е. при $\sigma \geq \frac{1}{4}$. Следовательно, при $\sigma \geq \frac{1}{4}$ схема (4) является абсолютно устойчивой. Например, при $\sigma = \frac{1}{2}$ схема

$$\frac{V_k^{n+1} - 2V_k^n + V_k^{n-1}}{\tau^2} + A_h \frac{V_k^{n+1} + V_k^{n-1}}{2} = f_k^n$$

абсолютно устойчива.

При $\sigma < \frac{1}{4}$ схема (4) условно устойчива, если

$$\tau^2 < \frac{4}{\lambda_k (1 - 4\sigma)} \quad \text{или} \quad \tau < \frac{2}{\sqrt{\lambda_k (1 - 4\sigma)}}, \quad k=1, 2, \dots \quad (8)$$

Если взять $\tau \leq \frac{2}{\sqrt{\beta (1 - 4\sigma)}}$, где β - верхняя граница спектра оператора A_h , то условие (8) будет всегда выполнено. В частности, для случая симметричных операторов $\beta = \|A_h\|$ и, следовательно, $\tau \leq 2/\sqrt{\|A_h\| (1 - 4\sigma)}$.

Например, при $\sigma = 0$ явная схема (4) условно устойчива при $\tau \leq 2/\sqrt{\|A_h\|}$.

Таким образом, задача выбора параметра τ , удовлетворяющего условию (8) в условно устойчивых схемах, свелась к вычислению максимального собственного числа задачи $A_h \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$.

В задаче (1)-(2) собственные числа разностного оператора

$$-a^2 \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad \text{известны} \quad \lambda_k = \frac{4a^2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}.$$

Поэтому в качестве верхней границы этого спектра можно выбрать число $\beta = 4a^2/h^2$. Тогда условие (8) запишется так:

$$\tau \leq h / (a \sqrt{1 - 4\sigma}).$$

Мы показали устойчивость схемы (4) по начальным данным.

Устойчивость схемы (4) по правой части можно показать, например, используя ограниченность норм степеней операторов перехода в уравнении (6) для каждой гармоники ряда Фурье. Введем вектор

$$\bar{V}_k^{n+1} = \begin{pmatrix} V_k^{n+1} - V_k^n \\ V_k^n \end{pmatrix}$$

и перепишем (6) в каноническом виде

$$\frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\tau} = \frac{V_k^n - V_k^{n-1}}{\tau} - \frac{\lambda_k \tau V_k^n}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} + \frac{\tau f_k^n}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \quad (6')$$

или

$$\frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\tau} = \left[1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \right] \frac{V_k^n - V_k^{n-1}}{\tau} - \frac{\lambda_k \tau V_k^n}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} + \frac{\tau f_k^n}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \quad (6'')$$

Добавив тождественное равенство

$$V_k^n = \tau \frac{V_k^n - V_k^{n-1}}{\tau} + V_k^{n-1},$$

запишем уравнения (6') - (6'') в каноническом виде:

$$\bar{V}_k^{n+1} = R_h \bar{V}_k^n + \frac{\tau}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \bar{F}_k^n, \quad \bar{V}_k^n = \begin{pmatrix} q_i - \frac{\tau}{2} A p_i + \frac{\tau}{2} f_i^n \\ p_i \end{pmatrix},$$

$$R_h = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} & -\frac{\lambda_k \tau}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \\ \frac{\tau}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_k^n = \begin{pmatrix} f_k^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Норму оператора $R_h = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ зададим формулой

$\|R_h\| = \max \{|z_{11}| + |z_{12}|, |z_{21}| + |z_{22}|\}$, поскольку $\|R_h\| = \max_{\|V\|=1} \|R_h V\|$ достигается хотя бы при одном из векторов: $\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Введем оценку

$\|R_h\| = \max \left[\left| 1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \right| + \frac{\lambda_k \tau}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma}, 1 + \tau \right] \leq 1 + c\tau, c > 0$, при выполнении которой схема (6) будет устойчива по начальным данным и по правой части, а значит, будет устойчива и схема (4).

Если $\|R_h\| = 1 + \tau$, то $c = 1$. Если

$$\|R_h\| = \left| 1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \right| + \frac{\lambda_k \tau}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma},$$

то положим

$$\left| 1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \right| + \frac{\lambda_k \tau}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \leq 1 + c\tau,$$

или

$$\left| 1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \right| < 1 + \left(c - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \right) \tau$$

Если выбрать $c = \max_k \lambda_k$, то

$$c = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} = \varepsilon > 0.$$

Поэтому можем записать:

$$-1 - \varepsilon \tau \leq 1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{1 + \lambda_k \tau^2 \sigma} \leq 1 + \varepsilon \tau$$

Здесь правое неравенство выполняется всегда. Левое неравенство $2 + \varepsilon \tau + \tau^2 \lambda_k (2\sigma - 1 + \varepsilon \tau \sigma) \geq 0$ выполняется, по крайней мере, для всех $\sigma \geq \frac{1}{2}$, откуда следует, что схема устойчива при $\sigma \geq \frac{1}{2}$ при любых h и τ .

III. Алгоритм решения задачи.

Итак, сходимость задачи (4)-(5) показана. Численная реализация этой задачи при выбранных h и τ сводится к последовательному нахождению V_i^{n+1} через V_i^n и V_i^{n-1} для $i = 1, 2, \dots, N-1$. Для определения V_i^{n+1} получаем из (4) задачу

$$(\varepsilon + \tau^2 \sigma A_h) V_i^{n+1} = \tau^2 f_i^n + 2V_i^n - V_i^{n-1} - \tau^2 A_h [(1-2\sigma)V_i^n + \sigma V_i^{n-1}] \quad (9)$$

В задаче (1)-(2) уравнение (9) сводится к трехточечной краевой разностной задаче

$$-\frac{\tau^2 \sigma a^2}{h^2} (V_{i+1}^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}) + \left(1 + \frac{2\tau^2 \sigma a^2}{h^2} \right) V_i^{n+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (10)$$

здесь F_i - правая часть уравнения (4).

Задачу (10) можно решить, например, методом прогонки, которая устойчива относительно ошибок округления (не накапливает их) при $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Литература: [5], с. 322-345.

Лабораторная работа № 9

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ. МЕТОД ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задание:

I. Для двумерного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + f - \rho u, \quad (1)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$U(x, y, 0) = \Phi(x, y) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\alpha_1 U + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=\ell_1} = \varphi_1(y, t), \quad (3)$$

$$\alpha_2 U + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=\ell_2} = \varphi_2(y, t).$$

$$\gamma_1 U + \delta_1 \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\ell_3} = \psi_1(x, t), \quad (4)$$

$$\gamma_2 U + \delta_2 \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\ell_4} = \psi_2(x, t)$$

построить разностную схему продольно-поперечной прогонки в области $\mathcal{D} = \{ \ell_1 \leq x \leq \ell_2, \ell_3 \leq y \leq \ell_4, 0 \leq t \leq T \}$ здесь

$\alpha(x, y, t) \geq \alpha_0 > 0$, $\beta(x, y, t) \geq \beta_0 > 0$, $\gamma(x, y, t) \geq 0$, $\delta(x, y, t) \geq 0$, $\varphi(x, y, t) \geq 0$, $\psi(x, y, t) \geq 0$ непрерывные по своим аргументам и ограниченные функции в области $\mathcal{D}$. Причем

$$|\alpha_i(t)| + |\beta_i(t)| \neq 0, \quad |\gamma_i(t)| + |\delta_i(t)| \neq 0, \quad i=1,2.$$

2. Исследовать устойчивость, сходимость и точность схемы.

3. Получить численное решение задачи с использованием математического обеспечения ЭВМ.

Методические указания:

В области $\mathcal{D}$ введем разностную сетку $\bar{\omega}_h = \{ x_i = \ell_1 + (i - \frac{1}{2})h_1, \}$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_1; \quad h_1 = (\ell_2 - \ell_1)/(N_1 - 1), \quad y_j = \ell_3 + (j - \frac{1}{2})h_2,$$

$$j = 0, 1, \dots, N_2; \quad h_2 = (\ell_4 - \ell_3)/(N_2 - 1), \quad t_n = n\tau,$$

$$n = 0, 1, \dots, M, \quad \tau = T/M \}$$

Пусть γ_h граница сеточной области ω_h , тогда $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$.

Если $\beta_i = 0$ и $\delta_i = 0$, $i=1,2$ то $\bar{\omega}_h = \{ x_i = \ell_1 + ih_1, \}$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_1, \quad h_1 = (\ell_2 - \ell_1)/N_1, \quad y_j = \ell_3 + jh_2, \quad j = 0, 1, \dots, N_2,$$

$$h_2 = (\ell_4 - \ell_3)/N_2, \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad \tau = T/M \}.$$

Сетку $\bar{\omega}_h$ можно представить как совокупность узлов, расположенных на столбцах $i = 0, 1, 2, \dots, N_1$, или как совокупность узлов, расположенных на строках $j = 0, 1, 2, \dots, N_2$. Всего имеется $N_1 + 1$ столбцов и $N_2 + 1$ строк. Число узлов в каждой строке равно $N_1 + 1$, а в каждом столбце имеется $N_2 + 1$ узлов.

Основная идея экономичного метода переменных направлений состоит в решении одномерных задач вдоль строк при фиксированном j и вдоль столбцов при фиксированном i методом прогонки. При этом переход от слоя n к слою $n+1$ совершается в два этапа с шагом $0,5\tau$.

В соответствии со сказанным, во всех внутренних узлах сетки ω_h и для всех $t = t_n > 0$ уравнение (1) представим в разностном виде.

$$\frac{V^{n+1/2}_{i,j} - V^n_{i,j}}{0,5\tau} = \Lambda_1 V^{n+1/2}_{i,j} + \Lambda_2 V^n_{i,j} + C \Lambda^+ V^{n+1/2}_{i,j} + d \Lambda^- V^n_{i,j} - \quad (5)$$

$$\frac{V^{n+1}_{i,j} - V^{n+1/2}_{i,j}}{0,5\tau} = \Lambda_1 V^{n+1/2}_{i,j} + \Lambda_2 V^{n+1}_{i,j} + C \Lambda^+ V^{n+1/2}_{i,j} + d \Lambda^- V^{n+1}_{i,j} - \quad (6)$$

$$\text{где } \Lambda_1 V^n = (\alpha(x, y, t) V_x)_x, \quad \Lambda_2 V^n = (\beta(x, y, t) V_y)_y \quad \text{или} \quad \Lambda_1 V^n = \frac{\alpha_{i-1/2,j} V^n_{i-1,j} - (\alpha_{i+1/2,j} + \alpha_{i-1/2,j}) V^n_{i,j} + \alpha_{i+1/2,j} V^n_{i+1,j}}{h_1^2}, \quad (7)$$

$$\Lambda_2 V^n = \frac{\beta_{i,j-1/2} V^n_{i,j-1} - (\beta_{i,j+1/2} + \beta_{i,j-1/2}) V^n_{i,j} + \beta_{i,j+1/2} V^n_{i,j+1}}{h_2^2}, \quad (8)$$

$$\Lambda^+ V^n = \frac{V^n_{i+1,j} - V^n_{i-1,j}}{2h_1}, \quad \Lambda^- V^n = \frac{V^n_{i,j+1} - V^n_{i,j-1}}{2h_2}. \quad (9)$$

$$\text{К уравнениям (5), (6) добавим нач. условие} \quad V(x, y, 0) = \Phi(x, y), \quad x, y \in \bar{\omega}_h \quad (10)$$

$$\text{и разностные краевые условия в виде} \quad \beta_1 \frac{V^{n+1/2}_{1,j} - V^{n+1/2}_{0,j}}{h_1} + \alpha_1 V^{n+1/2}_{0,j} = \varphi_{1,j}^{n+1/2}, \quad (11)$$

$$\beta_2 \frac{V^{n+1/2}_{N_1,j} - V^{n+1/2}_{N_1-1,j}}{h_1} + \alpha_2 V^{n+1/2}_{N_1,j} = \varphi_{2,j}^{n+1/2},$$

$$\delta_1 \frac{V_{i,1}^{n+1} - V_{i,0}^{n+1}}{h_2} + \gamma_1 V_{i,0}^{n+1} = \psi_{1,i}^{n+1},$$

$$\delta_2 \frac{V_{i,N2}^{n+1} - V_{i,N2-1}^{n+1}}{h_2} + \gamma_2 V_{i,N2}^{n+1} = \psi_{2,i}^{n+1}, \quad (12)$$

Учитывая (7), (8), (9) равенства (5) и (6) представим в виде

$$A_{i,j} V_{i,j-1}^{n+1/2} - \tilde{B}_{i,j} V_{i,j}^{n+1/2} + C_{i,j} V_{i,j+1}^{n+1/2} = -\tilde{F}_{i,j}^{n+1/2}, \quad (13)$$

$i = 1, 2, \dots, N1-1$, j - фиксировано.

$$\tilde{A}_{i,j} V_{i,j-1}^{n+1} - \tilde{B}_{i,j} V_{i,j}^{n+1} + \tilde{C}_{i,j} V_{i,j+1}^{n+1} = -\tilde{F}_{i,j}^{n+1/2}, \quad (14)$$

$j = 1, 2, \dots, N2-1$, i - фиксировано.

$$A_{i,j} = \frac{\tau}{4h_1} \left(\frac{2a_{i-1/2,j}}{h_1} - c_{i,j} \right), \quad C_{i,j} = \frac{\tau}{4h_1} \left(\frac{2a_{i+1/2,j}}{h_1} + c_{i,j} \right),$$

$$B_{i,j} = 1 + \frac{\tau}{2h_1^2} (a_{i+1/2,j} + a_{i-1/2,j}) + \frac{\tau}{2} e_{i,j},$$

$$\tilde{F}_{i,j}^n = \frac{\tau}{4h_2} \left(\frac{2b_{i,j+1/2}}{h_2} + d_{i,j} \right) V_{i,j}^n + \left[1 - \frac{\tau}{2h_2^2} (b_{i,j+1/2} + b_{i,j-1/2}) \right] V_{i,j}^n + \frac{\tau}{2} f_{i,j}^{n+1/2},$$

$$\tilde{B}_{i,j-1/2} = \frac{\tau}{4h_2} \left(\frac{2b_{i,j-1/2}}{h_2} - d_{i,j} \right), \quad \tilde{C}_{i,j} = \frac{\tau}{4h_2} \left(\frac{2b_{i,j+1/2}}{h_2} + d_{i,j} \right),$$

$$\tilde{B}_{i,j} = 1 + \frac{\tau}{2h_2^2} (b_{i,j+1/2} + b_{i,j-1/2}) + \frac{\tau}{2} e_{i,j},$$

$$\tilde{F}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\tau}{4h_1} \left(\frac{2a_{i+1/2,j}}{h_1} + c_{i,j} \right) V_{i,j}^{n+1/2} + \left[1 - \frac{\tau}{2h_1^2} (a_{i+1/2,j} + a_{i-1/2,j}) \right] V_{i,j}^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} f_{i,j}^{n+1/2},$$

$$+ \frac{\tau}{2} f_{i,j}^{n+1/2}.$$

Краевые условия (11), (12) представим в виде

$$-B_{0,j} V_{0,j}^{n+1/2} + C_{0,j} V_{1,j}^{n+1/2} = -F_{0,j}^{n+1/2}, \quad (15)$$

$$A_{N1,j} V_{N1-1,j}^{n+1/2} - B_{N1,j} V_{N1,j}^{n+1/2} = -F_{N1,j}^{n+1/2},$$

$$-\tilde{B}_{i,0} V_{i,0}^{n+1} + \tilde{C}_{i,0} V_{i,1}^{n+1} = -\tilde{F}_{i,0}^{n+1/2}, \quad (16)$$

$$\tilde{A}_{i,N2} V_{i,N2-1}^{n+1} - \tilde{B}_{i,N2} V_{i,N2}^{n+1} = -\tilde{F}_{i,N2}^{n+1/2},$$

где $B_{0,j} = \beta_1 - h_1 d_1$, $C_{0,j} = \beta_1$, $F_{0,j}^n = -h_1 \varphi_{1,j}^{n+1/2}$,

$A_{N1,j} = -\beta_2$, $B_{N1,j} = -(\beta_2 + h_1 d_2)$, $F_{N1,j}^n = -h_1 \varphi_{2,j}^{n+1/2}$,

$\tilde{B}_{i,0} = \delta_1 - h_1 \gamma_1$, $\tilde{C}_{i,0} = \delta_1$, $\tilde{F}_{i,0}^{n+1/2} = -h_2 \psi_{1,i}^{n+1/2}$,

$\tilde{A}_{i,N2} = -\delta_2$, $\tilde{B}_{i,N2} = -(\delta_2 + h_2 \gamma_2)$,

$\tilde{F}_{i,N2}^{n+1/2} = -h_2 \psi_{2,i}^{n+1/2}$.

Известными способами можно повысить порядок аппроксимации краевых условий (11), (12) до порядка аппроксимации уравнений (5), (6), однако, и вновь полученные условия следует привести к виду (15), (16).

Таким образом, разностная краевая задача (13), (14), (15), (16), (10) соответствующая задаче (1)-(4) поставлена.

Рассмотрим метод решения этой задачи, применим равенства (13)-(16) следующим образом.

$$\begin{aligned}
 -B_{i,j} V_{0,j}^{n+1/2} + C_{0,j} V_{i,j}^{n+1/2} &= -F_{0,j}^n, \\
 A_{i,j} V_{i-1,j}^{n+1/2} - B_{i,j} V_{i,j}^{n+1/2} + C_{i,j} V_{i+1,j}^{n+1/2} &= -F_{i,j}^n, \\
 i &= 1, 2, \dots, N-1, \quad j - \text{фиксировано} \\
 A_{N,j} V_{N-1,j}^{n+1/2} - B_{N,j} V_{N,j}^{n+1/2} &= -F_{N,j}^n, \\
 A_{i,j} &\geq 0, \quad C_{i,j} \geq 0, \quad B_{i,j} \geq A_{i,j} + C_{i,j};
 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 -\tilde{B}_{i,0} V_{i,0}^{n+1} + \tilde{C}_{i,0} V_{i,1}^{n+1} &= -\tilde{F}_{i,0}^{n+1/2}, \\
 \tilde{A}_{i,j} V_{i,j-1}^{n+1} - \tilde{B}_{i,j} V_{i,j}^{n+1} + \tilde{C}_{i,j} V_{i,j+1}^{n+1} &= -\tilde{F}_{i,j}^{n+1/2}, \\
 j &= 1, 2, \dots, N-1, \quad i - \text{фиксировано} \\
 \tilde{A}_{i,N} V_{i,N-1}^{n+1} - \tilde{B}_{i,N} V_{i,N}^{n+1} &= -\tilde{F}_{i,N}^{n+1/2}, \\
 \tilde{A}_{i,j} &\geq 0, \quad \tilde{C}_{i,j} \geq 0, \quad \tilde{B}_{i,j} \geq \tilde{A}_{i,j} + \tilde{C}_{i,j}.
 \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть задано $V = V_{i,j}^n$. Тогда вычисляем $F_{i,j}^n$, затем методом прогонки вдоль строк для фиксированного $j=1, 2, \dots, N-1$ решаем задачу (17) ($i=0, 1, 2, \dots, N$) и определим $V_{i,j}^{n+1/2}$ во всех узлах сетки ω_h . Теперь вычисляем $\tilde{F}_{i,j}^{n+1/2}$ и решаем прогонкой задачу (18) вдоль столбцов $i=1, 2, \dots, N-1$, определяя $V_{i,j}^{n+1}$ во всех внутренних узлах. Очевидно, что при переходе от слоя $n+1$ к слою $n+2$ происходит перекодирование направлений счета.

Прогночные коэффициенты W_k и Z_k определяются известным способом

$$W_k = \frac{C_k}{B_k - A_k W_{k-1}}, \quad (19)$$

$$Z_k = \frac{A_k Z_{k-1} + F_k}{B_k - A_k W_{k-1}}. \quad (20)$$

Из условия $A_0 = 0$ следует, что $W_0 = \frac{C_0}{B_0}$, $Z_0 = \frac{F_0}{B_0}$. И выполняя прямую прогонку определим по рекуррентным зависимостям (19), (20) все W_k, Z_k ($k=0, 1, 2, \dots, N$).

Учитывая, что $V_k = W_k V_{k+1} + Z_k$ и $C_N = 0$ получим $V_N = Z_N$. Обратную прогонку проводим по зависимости

$$V_{k-1} = W_{k-1} V_k + Z_{k-1} \quad (21)$$

определим все значения W_k в строке или столбце.

Литература: [5], с. 354-367, [2], с. 284-296, с. 309-312.

Лабораторная работа № 10

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФФИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОБЛАСТИ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Задание:

1. Найти приближенное решение уравнения:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, y) \quad (2)$$

2. Исследовать сходимость разностной схемы.

3. Дать оценку погрешности аппроксимации.

4. Получить решение задачи с использованием математического обеспечения ЭВМ.

Методические указания:

Чтобы найти функцию $u(x, y)$ заменим область G непрерывного изменения аргументов дискретной областью $\bar{\omega}_h$. Тогда область определения сеточных функций будет

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, j=1, 2, \dots, M, \\ i = \alpha_j, \alpha_j+1, \dots, \alpha_j+\beta_j+1, h_1 = \frac{h}{N-1}, h_2 = \frac{h_2}{M-1}\},$$

где α_j - индекс левой граничной точки j -й строки, β_j - количество внутренних точек j -й строки; h_1, h_2 соответственно шаги по осям координат x и y , причем прямые, параллельные координатным осям пересекают грани Γ области только в двух точках. Следовательно, область произвольной формы заменим областью, составленной из прямоугольников.

Область определения сеточных функций будет равносторонней по каждому направлению. На сетке ω_h дифференциальной задачи (1), (2) поставим в соответствие разностную задачу

$$-\left(\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h_2^2}\right) = \varphi_{i,j}, \quad (3)$$

$$V_{i,j}|_{\partial\omega_h} = \mu_{i,j}$$

(i, j - индексом только граничных точек).

Получаем систему алгебраических уравнений, порядок которой равен числу внутренних узлов сеточной области ω_h . При решении поставленной задачи возможны два подхода в зависимости от сложности формы области G . Одним из методов решения разностной задачи (3) является метод верхней релаксации с выбором оптимального параметра и применением прогонки.

На каждой внутренней строке j ($j = 2, 3, \dots, M-1$ сеточной области ω_h) методом прогонки решают уравнение

$$V_{i,j}^{K+1/2} - 2\left(1 + \frac{h_1^2}{h_2^2}\right)V_{i,j}^{K+1/2} + V_{i+1,j}^{K+1/2} = -h_1^2\varphi_{i,j} - \frac{h_1^2}{h_2^2}(V_{i,j-1}^{K+1/2} + V_{i,j+1}^{K+1/2}),$$

где K - номер итерации

Итерационный параметр τ находят по формуле.

$$\tau = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}},$$

где

$$\lambda = \cos \frac{\pi}{M_1+1} / \left(1 + \frac{2}{C} \sin^2 \frac{\pi}{2(N_1+1)}\right), \quad C = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2.$$

Здесь N_1 - максимальное количество внутренних точек в столбце, M_1 - максимальное количество внутренних точек в строке.

Затем вычисляются прогоночные коэффициенты P_i по формулам:

$$P_1 = 0; \quad P_i = \frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right] - P_{i-1}}; \quad (i = 2, 3, \dots, d_j + \beta_j).$$

На каждой внутренней строке $j = 1, 2, \dots, M-1$, сеточной области ω_h вычисляются прогоночные коэффициенты $Q_{i,j}$ по формулам:

$$Q_{i,j} = V_{d_j,j},$$

$$Q_{i,j} = P_i \left(Q_{i-1,j} + h_1^2 \varphi_{i,j} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 (V_{i,j-1}^{K+1/2} + V_{i,j+1}^{K+1/2}) \right),$$

$$i = d_j + 1, \dots, d_j + \beta_j.$$

Обратную прогонку осуществляют по формулам:

$$V_{i,j}^{K+1/2} = P_i V_{i+1,j}^{K+1/2} + Q_{i,j}, \quad (i = d_j + \beta_j, \dots, d_j + 1),$$

где $V_{i,j}^{K+1/2}$ - значение функции $V_{i,j}$ на промежуточной $K + \frac{1}{2}$ итерации.

На каждой j -й строке промежуточное решение $V_{i,j}^{K+1/2}$ уточняется по формуле верхней релаксации

$$V_{i,j}^{K+1} = V_{i,j}^{K+1/2} + \tau (V_{i,j}^{K+1/2} - V_{i,j}^{K+1/2}),$$

$$(K = 1, 2, \dots; \quad i = d_j + \beta_j, \dots, d_j + 1).$$

После этого вычисляют погрешность

$$\gamma_j^{K+1} = \max_{d_j+1 \leq i \leq d_j+\beta_j} [V_{i,j}^{K+1} - V_{i,j}^{K+1/2}], \quad j = 2, \dots, M-1$$

Если выполняется условие $\max_j \gamma_j^{K+1} \leq \varepsilon \max_j \gamma_j^1$, (5)

то ($K+1$) - е приближение считается решением системы разностных уравнений. Процесс продолжается до выполнения условия (5).

Для равномерной сходимости разностной схемы со вторым порядком аппроксимации имеет место оценка

$$\|V\|_{\omega} \leq \|f\|_{\omega} + \frac{R^2}{2p} \|\varphi\|_{\omega} + \sum_{i=1}^p \|\delta_i^* \varphi_i^*\|_{\omega_i^*},$$

где V - решение задачи

$$\Delta V + \varphi(x) = 0$$

в регулярных узлах,

$$\Delta^* V + \varphi(x) = 0$$

в нерегулярных узлах,

R - радиус p -мерного шара с центром в начале координат, целиком содержащего область G (при $p = 2$ - окружность).

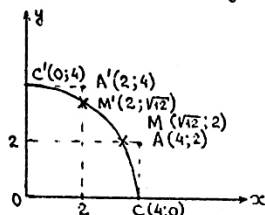
Для решения задачи Дирихле в области сложной формы можно (в зависимости от формы заданной области) значение $V|_{\Gamma} = \mu$ для граничных углов получить путем переноса значения $\mu|_{\Gamma} = \mu$ из точки на границу.

Рассмотрим метод Либмана на примере решения уравнения Лапласа

Пример. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее на окружности $x^2 + y^2 = 16$
условию $u(x, y)|_{\Gamma} = x^2 y^2$



Область, симметричная относительно осей координат (граничные условия также симметричны), поэтому рассмотрим I-ю четверть круга. Для применения конечно-разностных методов необходимы начальные приближения.

Полагаем, значения искомой функции в узлах сетки, близких к

границе (приграничные узлы) равными значениям этой функции на границе. Рассмотрим сетку с шагом $h=2$. Для узла A при $h=2$ из уравнения окружности найдем $A(4;2)$. Ближайшей к узлу A точкой границы является точка $M(\sqrt{2};2)$. Из граничного условия находим

$$u(A) \approx u(M) = 12 \cdot 2^2 = 48.$$

Аналогично для узлов C и C' при $x=0$ и $y=0$ значение функции на границе обращается в нуль, поэтому в узлах $C(4;0)$ и $C'(0;4)$, $u(C) = u(C') = 0$.

Для определения значений функции в регулярных узлах имеем систему конечно-разностных уравнений, полученных заменой частных производных в данном уравнении конечно-разностными отношениями и использованием пятиточечного шаблона "крест".

$$u_0 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4).$$

Тогда в примере имеем

$$u_1 = \frac{1}{4}(2u_2 + 2u(M)) = \frac{1}{4}(96 + 2u_2),$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(2u_1 + u_0 + 0) = \frac{1}{4}(48 + u_2 + u_0),$$

$$u_0 = \frac{1}{4} \cdot 4u_2 = u_2.$$

Откуда $u_0 = 24$; $u_2 = 24$; $u_1 = 36$.

Для повышения точности вычислений уменьшаем шаг в два раза и снова рассматриваем четверть круга, учитывая симметрию решения.

Начальные значения искомой функции определяем, зная значения, полученные в узлах крупной сетки, и принимая значения в приграничных узлах равными значениям функции на границе.

При ручном счете решение целесообразно записывать в виде таблицы. На практике для оценки точности решения используют двойной пересчет решения с шагом h и $2h$. Если соответствующие результаты совпадают с заданной точностью, то считают, что искомое решение найдено правильно. В качестве решения применяется решение, полученное с шагом h . В противном случае расчет повторяют с шагом $h/2$.

Литература: [2], с. 298-312, [5], с. 228-243.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука 1973, - С.630.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. - М.: Наука 1977. - С.345.
3. Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1962. - С.367.
4. Копченкова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1972. - С.376.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - С.657.
6. Численные методы. - М.: Наука, 1976. - С.427.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Лабораторная работа №1. Разностные схемы для простейших дифференциальных уравнений первого порядка.....	3
Лабораторная работа №2. Схема Рунге-Кутты и Адамса для обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями.....	7
Лабораторная работа №3. Решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.....	11
Лабораторная работа №4. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой.....	16
Лабораторная работа №5. Исследование устойчивости разностных схем.....	25
Лабораторная работа №6. Исследование сходимости решения разностных схем к решению дифференциальных задач в частных производных.....	31
Лабораторная работа №7. Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности.....	38
Лабораторная работа №8. Численное решение задачи для уравнения колебания струны.....	41
Лабораторная работа №9. Экономичные разностные схемы. Метод предиктор-корректор для задачи теплопроводности.....	41
Лабораторная работа №10. Численные решения задачи Дирихле в области сложной формы.....	51
Литература.....	6

Лабораторные работы по курсу "Методы вычислений" Ч.2.

Павел Демьянович Григорук,
Татьяна Григорьевна Богданова,
Ольга Вадимовна Иваницкая,
Алевтина Анатольевна Цеткова,
Людмила Антоновна Цурганова

Подписано к печати 20.02.87 . Формат 60х84 1/16.
Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл.п.л. 3,4
Уч.-изд.л. 3,0 . Тираж 200 . Заказ 88 . Бесплатно

Отпечатано на ротационной ПТУ, г.Гомель, ул.Советская, 104.