УДК 535.33.011

К ВОПРОСУ О СВЕРХИЗЛУЧЕНИИ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ

Л. А. Нефедьев, В. В. Самарцев и *А. И. Сиразиев*

Развита теория светового эха в двухуровневой системе с произвольным вырождением каждого из энергетических подуровней на переходах без изменения полного момента количества движения.

В работах [1–3] на примере систем с двукратным и трехкратным вырождением резонансных энергетических уровней были исследованы особенности формирования оптических когерентных откликов. В настоящей работе эта задача решается для случая систем с произвольным вырождением каждого из резонансных уровней, что представляется важным для газовых сред, где такое вырождение может иметь, например, место по проекции m полного момента $\mathbf{J}$ на выделенное направление в пространстве [4]. Поиск оптических когерентных откликов в некоторых молекулярных газах (например, в парáх ^{87}Rb, Rb_2) при возбуждении наносекундными импульсами оказался безрезультатным, хотя отдельные нелинейные явления там наблюдались [5–7]. Как будет видно из нижепроведенного расчета, это обстоятельство может быть связано с наличием вырождения энергетических подуровней.

Рассмотрим ансамбль двухуровневых частиц с L-кратным вырождением нижнего уровня и G-кратным — верхнего (индекс «l» является номером подуровня в нижнем вырожденном уровне, а «g» — верхнего; $1 \leqslant l \leqslant L$; $1 \leqslant g \leqslant G$). Под действием возмущения $V(t) = V\cos(\mathbf{kr} - \omega t)$ каждая из частиц переходит в суперпозиционное состояние

$$\Psi = \sum_l^L a_{1l}\varphi_l e^{-iE_1\hbar^{-1}t} + \sum_g^G a_{2g}\varphi_g e^{-iE_2\hbar^{-1}t}, \tag{1}$$

где $E_\eta = \hbar\omega_\eta$; η — номер уровня (1, 2); $\mathbf{k}$ и ω — волновой вектор и частота возбуждающей световой волны; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор местоположения частицы; a_{1l} и a_{2g} — коэффициенты, определяемые из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\dot{a}_{1l} &= \sum_k \langle 1l \,|\, V \,|\, 1k\rangle a_{1k} + \sum_g \langle 1l \,|\, V \,|\, 2g\rangle e^{i\omega_{12}t} a_{2g}, \\ i\hbar\dot{a}_{2g} &= \sum_f \langle 2g \,|\, V \,|\, 2f\rangle a_{2f} + \sum_l \langle 2g \,|\, V \,|\, 1l\rangle e^{-i\omega_{12}t} a_{1l}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ω_{12} — частота перехода между уровнями $\langle 2|$ и $|1\rangle$, $\langle nm \,|\, V \,|\, rg\rangle$ — матричные элементы оператора V; $1 \leqslant k \leqslant L$, $1 \leqslant f \leqslant G$. Воспользуемся обычно применяемым предположением: $\langle 1l \,|\, V \,|\, 1k\rangle = \langle 2g \,|\, V \,|\, 2f\rangle = 0$.

Комплексные коэффициенты a_{1l} и a_{2g} можно представить в виде

$$a_{1l} = |a_{1l}|\, e^{-i\lambda_1 t}, \quad a_{2g} = |a_{2g}|\, e^{-i\lambda_2 t}.$$

Поэтому решения системы (2) вблизи резонанса будем искать в виде

$$\begin{aligned} a_{1l} &= a(t)\, \alpha_{1l} e^{-i\lambda_1 t}, \\ a_{2g} &= b(t)\, \alpha_{2g} e^{-i\lambda_2 t}, \end{aligned} \tag{3}$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые параметры, определяющие комплексный вид коэффициентов a_{1l} и a_{2g} и имеющие размерность частоты. Тогда система (2) запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\dot{a}\alpha_{1l} + \hbar a\alpha_{1l}\lambda_1 &= \sum_g \langle 1l\,|\,V\,|\,2g\rangle \cos(\mathbf{kr} - \omega t)\, e^{i(\omega_{12}-\lambda_2+\lambda_1)t} b\alpha_{2g}, \\ i\hbar\dot{b}\alpha_{2g} + \hbar b\alpha_{2g}\lambda_2 &= \sum_l \langle 2g\,|\,V\,|\,1l\rangle \cos(\mathbf{kr} - \omega t)\, e^{i(\omega_{12}-\lambda_2+\lambda_1)t} a\alpha_{1l}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отбрасывая члены, содержащие двойные частоты, и разбивая (4) на действительную и мнимую части, получим две системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \hbar\dot{a}\alpha_{1l} &= \frac{1}{2}\sum_g \langle 1l\,|V|\,2g\rangle\, b\alpha_{2g} \sin(\mathbf{kr} + \omega_{12}t - \omega t - \lambda_1 t + \lambda_2 t), \\ \hbar\dot{b}\alpha_{2g} &= -\frac{1}{2}\sum_l \langle 2g\,|\,V\,|\,1l\rangle\, a\alpha_{1l} \sin(\mathbf{kr} + \omega_{12}t - \omega t - \lambda_1 t + \lambda_2 t), \end{aligned}\right\} \tag{5а}$$

$$\left.\begin{aligned} \hbar a\alpha_{1l}\lambda_1 &= \frac{1}{2}\sum_g \langle 1l\,|\,V\,|\,2g\rangle\, b\alpha_{2g} \cos(\mathbf{kr} + \omega_{12}t - \omega t - \lambda_1 t + \lambda_2 t), \\ \hbar b\alpha_{2g}\lambda_2 &= \frac{1}{2}\sum_l \langle 2g\,|\,V\,|\,1l\rangle\, a\alpha_{1l} \cos(\mathbf{kr} + \omega_{12}t - \omega t - \lambda_1 t + \lambda_2 t). \end{aligned}\right\} \tag{5б}$$

Рассмотрим случай точного резонанса $\omega_{12} = \omega$. Тогда из (5б) нетрудно получить следующее выражение:

$$\lambda_1\lambda_2\alpha_{1l}\alpha_{2g} = \frac{1}{8\hbar^2}\left\{\sum_g \langle 1l\,|\,V\,|\,2g\rangle\, \alpha_{2g}\right\}\left\{\sum_l \langle 2g\,|\,V\,|\,1l\rangle\, \alpha_{1l}\right\}. \tag{6}$$

Таким образом, выбор λ_1 и λ_2 оказывается произвольным, и без потери общности можно положить $\lambda_1 = \lambda_2$. С другой стороны, используя условие нормировки, имеем

$$a^2(t)\sum_l \alpha_{1l}^2 + b^2(t)\sum_g \alpha_{2g}^2 = 1, \tag{7}$$

Систему (5а) перепишем в виде

$$\dot{X}_1 = R_1 X_2 f; \quad \dot{X}_2 = -R_2 X_1 f \tag{8}$$

или

$$\dot{X} = AX, \tag{9}$$

где $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & R_1 f \\ -R_2 f & 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = a(t)$, $X_2 = b(t)$, $f = \sin(\mathbf{kr} - \lambda_2 t + \lambda_1 t)$, $R_1 = (2\hbar\alpha_{1l})^{-1}\sum_g \langle 1l\,|\,V\,|\,2g\rangle\, \alpha_{2g}$, $R_2 = (2\hbar\alpha_{2g})^{-1}\sum_l \langle 2g\,|\,V\,|\,1l\rangle\, \alpha_{1l}$.

В общем случае решение уравнения (9) имеет вид

$$X = T\exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(t')\, dt'\right\} X(t_0),$$

где T — оператор упорядочивания по времени. Для наглядности физических результатов будем предполагать, что $R_1 \approx R_2$. Это физически соответствует случаю энергетического перехода типа $J \leftrightarrow J$. Рассмотрение общего случая $R_1 \neq R_2$ не вызывает принципиальных трудностей, но полученные результаты трудно обозримы. Для случая $R_1 = R_2$ имеем

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(t')\,dt'\right\} = \begin{pmatrix} \cos R_1 R_2 \left[\int_{t_0}^{t} f dt\right]^2; & \dfrac{-i \sin R_1 R_2 \left[\int_{t_0}^{t} f dt\right]^2}{2\left(R_2 \int_{t_0}^{t} f dt\right)^{1/2}} \\ \dfrac{i \sin R_1 R_2 \left[\int_{t_0}^{t} f dt\right]^2}{2\left(R_1 \int_{t_0}^{t} f dt\right)^{1/2}}; & \cos R_1 R_2 \left[\int_{t_0}^{t} f dt\right]^2 \end{pmatrix}.$$

Однако поскольку в дальнейшем мы будем интересоваться решением системы (5а) лишь на малых временных интервалах, можно не учитывать прирост фазы в выражении для f.

В этом случае система (5а) может быть сведена к дифференциальному уравнению

$$\ddot{a} = -\frac{a}{\alpha_{1l}} \sum_{g} \frac{\langle 1l \mid V \mid 2g \rangle}{8\hbar^2} \sum_{l} \langle 2g \mid V \mid 1l \rangle \alpha_{1l}, \tag{8'}$$

решение которого записывается в виде

$$a = C_1 e^{iAt} + C_2 e^{-iAt}, \tag{9'}$$

где $A = (1/2\hbar\sqrt{\alpha_{1l}})\left(\sum_{g} \langle 1l \mid V \mid 2g \rangle \sum_{l} \langle 2g \mid V \mid 1l \rangle \alpha_{1l}\right)^{1/2}$; коэффициенты C_1 и C_2 при начальных условиях $a_{1l}^{(0)} = 1/\sqrt{L}$ и $a_{2g}^{(0)} = B/\sqrt{G}$, $B = W^{1/2}$, W — больцмановский фактор для верхнего энергетического уровня, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{-iB \sin \mathbf{kr} \sum_{g} \langle 1l \mid V \mid 2g \rangle a_{2g}}{4\hbar\sqrt{G}\, A\alpha_{1l}} + \frac{1}{2\alpha_{1l}\sqrt{L}}, \\ C_2 &= \frac{iB \sin \mathbf{kr} \sum_{g} \langle 1l \mid V \mid 2g \rangle}{4\hbar\sqrt{G}\, A\alpha_{1l}} + \frac{1}{2\alpha_{1l}\sqrt{L}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

С другой стороны, коэффициент b записывается в виде

$$b = \frac{2i\hbar A\left(C_1 e^{iAt} - C_2 e^{-iAt}\right)\alpha_{1l}}{\sin \mathbf{kr} \sum_{g} \langle 1l \mid V \mid 2g \rangle a_{2g}}. \tag{11}$$

Зная волновую функцию системы в момент времени t, записываем неравновесную электрическую поляризацию в виде

$$\langle P \rangle = \sum_{l,\,g} P_{lg} \alpha_{1l} \alpha_{2g} e^{-i\omega_{12} t} \Phi + \text{к. с.}, \tag{12}$$

где P_{lg} — электрический дипольный момент перехода между l-тым подуровнем вырожденного нижнего уровня и g-тым — верхнего

$$\Phi = \frac{B^2 \left| \sum_{g} \langle 1l \mid V \mid 2g \rangle a_{2g}^2 \right|^2}{16\hbar^2 G \alpha_{1l}^2 A^2} + \frac{1}{4\alpha_{1l}^2 L}. \tag{13}$$

Оценим вклад каждого члена в выражении (13), имея в виду что $\dfrac{|\langle 1l \mid V \mid 2g \rangle|^2}{A^2} \sim 4\hbar^2$ и $B^2 \sim 10^{-14}$. Вклад первого члена на много порядков меньше второго члена, обратно пропорционального степени вырождения L.

Отсюда следует, что интенсивность дипольного излучения $I \sim \left| \sum_{j \neq i} \langle \ddot{\mathbf{P}}_i \rangle \times \langle \ddot{\mathbf{P}}_j \rangle e^{-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)} \right|$ в направлении волнового вектора обратно пропорциональна квадрату степеней вырождения резонансных подуровней ($1/L^2$ и B/G^2). Аналогичный расчет неравновесной поляризации системы в момент генерации светового эха приводит к формуле (12), где

$$\Phi = -\frac{iR_1R_2^*}{8R_2\alpha_{1l}^2} e^{i\omega_{12}(t-2\tau)} e^{i(\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_2)\mathbf{r}} e^{2iA_1\Delta t_1 + 2iA_2\Delta t_2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{L}} - \frac{B \sin \mathbf{k}_1 \mathbf{r}}{2\hbar \sqrt{G}\, A_1} \sum_g \langle 1l \,|\, V_1 \,|\, 2g \rangle \alpha_{2g} + \text{к. с.} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{L}} + \frac{iB^* \sin \mathbf{k}_1 \mathbf{r}}{2\hbar \sqrt{G}\, A_1^*} \sum_g \langle 1l \,|\, V_1 \,|\, 2g \rangle \alpha_{2g} + \text{к. с.} \right], \qquad (14)$$

$R_\eta = \dfrac{i2\hbar\alpha_{1l}A_\eta}{\sum_g \langle 1l \,|\, V_\eta \,|\, 2g \rangle \alpha_{2l}}$; η — номер импульса ($\eta = 1,\ 2$).

Таким образом, интенсивность когерентного отклика также содержит члены, пропорциональные $1/L^2$; $1/LG$; $1/G^2$, причем члены, содержащие B, малы и I полностью определяется кратностью вырождения уровней.

Согласно [5], в парах Rb_2 поглощение излучения рубинового лазера имеет место на переходах с колебательных уровней $v'' = 5-10$ основного $^1\Sigma_g^+$-состояния на колебательные уровни $v' = 2-7$ возбужденного $^1\Pi_u^+$-состояния.[1] Микрофотограмма спектра поглощения [5] свидетельствует о сложной колебательно-вращательной структуре линий и вырождении уровней. В подобных условиях когерентный отклик может иметь значительно меньшую интенсивность, лежащую ниже порога чувствительности использовавшейся в [6, 7] аппаратуры.

Литература

[1] J. P. Gordon, C. H. Wang, C. K. N. Patel, R. E. Slusher, W. J. Tomlinson. Phys. Rev., *179*, 204, 1969.
[2] А. И. Алексеев, И. В. Евсеев. ЖЭТФ, *56*, 2018, 1969; *57*, 1735, 1969.
[3] L. A. Nefediev, V. V. Samartsev, A. I. Siraziev. Spectr. Lett., *7*, 285, 1974; ВИНИТИ № 2950-75-Деп.; А. И. Сиразиев, В. В. Самарцев. Опт. и спектр., *39*, 730, 1975.
[4] С. С. Алимпиев, Н. В. Карлов. Изв. АН СССР, сер. физ., *37*, 2022, 1973; С. С. Алимпиев. Автореф. канд. дисс., ФИАН, М., 1973.
[5] Н. Н. Костин, В. А. Ходовой. Изв. АН СССР, сер. физ., *37*, 2083, 1973.
[6] H. M. Gibbs, R. E. Slusher. Appl. Phys. Lett., *18*, 505, 1971.
[7] В. Р. Нагибаров, В. А. Пирожков, В. В. Самарцев, Р. Г. Усманов. Письма ЖЭТФ, *19*, 391, 1974.

Поступило в Редакцию 9 марта 1976 г.

---

[1] Поскольку в эксперименте [7] возбуждение осуществлялось на длине волны 6943 Å, то могли также совершаться прямые переходы с колебательных уровней 0÷4.