МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Я.Т. Мегралиев

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

ON SOLVABILITY OF AN INVERSE VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

Y.T. Mechraliyev

Baku State University, Baku, Azerbaijan

В работе исследована одна обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной (в определенном смысле) задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: *обратная краевая задача, гиперболическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.*

In this work an inverse problem for the hyperbolic equation of second order with periodical boundary conditions is investigated. For this reason, first of all the initial problem reduces to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness is proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Keywords: *inverse boundary problem, hyperbolic equation, method Fourier, classic solution.*

Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, хотя известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2], [3], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

В данной работе, следуя [5], [6], доказаны существование и единственность решения обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \qquad (1.1)$$

в области $D_T=\{(x,t): 0\le x\le 1, \quad 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \qquad (1.2)$$

периодическим условием

$$u(0,t)=u(1,t) \quad (0\le t\le T), \qquad (1.3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0\ (0\le t\le T) \qquad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t)=h(t)\ (0\le t\le T), \qquad (1.5)$$

где $x_0\in(0,1)$ – фиксированное число, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Определение **1.1.** Классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5) назовем пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1.1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) уравнение (1.1), условия (1.2)–(1.5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

***Лемма* 1.1.** Пусть $f(x,t)\in C(D_T)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C[0,1]$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\neq 0$,

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0\ (0\le t\le T),$$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx=0,$$

$$\int_0^1 \psi(x)dx=0,$$

$$\varphi(x_0)=h(0),\psi(x_0)=h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1 и 2 определения классического решения задачи (1.1)–(1.5), из (1.1)–(1.3) и

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)\ \ (0\le t\le T), \qquad (1.6)$$

$$h(t)a(t)+f(x_0,t)=h''(t)-u_{xx}(x_0,t) \quad (0\le t\le T). \qquad (1.7)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.5). Интегрируя уравнение (1.1) по x от 0 до 1, при любом $0\le t\le T$ имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-(u_x(1,t)-u_x(0,t))=$$

$$=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx\ \ (0\le t\le T). \qquad (1.8)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T)$, и учитывая (1.4), легко приходим к выполнению (1.6).

Далее, считая $h(t)\in C^2[0,T]$ и дифференцируя два раза (1.5), получаем:

$$u_{tt}(x_0,t)=h''(t)\ \ (0\le t\le T). \qquad (1.9)$$

Далее, из (1.1) имеем:

$$u_{tt}(x_0,t)-u_{xx}(x_0,t)=a(t)u(x_0,t)+f(x_0,t) \quad (0\le t\le T). \qquad (1.10)$$

Отсюда, с учетом (1.5) и (1.9), приходим к выполнению (1.7).

Теперь предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). Тогда из (1.8), с учётом (1.6), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-a(t)\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T). \qquad (1.11)$$

В силу (1.2) и $\int_0^1\varphi(x)dx=0$, $\int_0^1\psi(x)dx=0$ очевидно, что

$$\int_0^1 u(x,0)dx=\int_0^1\varphi(x)dx=0,$$
$$\int_0^1 u_t(x,0)dx=\int_0^1\psi(x)dx=0. \qquad (1.12)$$

Так как задача (1.11), (1.12) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t)dx=0\quad(0\le t\le T)$, т. е. выполняется условие (1.4).

Далее, из (1.7) и (1.10) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_0,t)-h(t))=a(t)(u(x_0,t)-h(t)) \quad (0\le t\le T). \qquad (1.13)$$

В силу (1.2) и $\varphi(x_0)=h(0)$, $\psi(x_0)=h'(0)$ имеем:

$$u(x_0,t)-h(0)=\varphi(x_0)-h(0)=0,$$
$$u_t(x_0,t)-h'(0)=\psi(x_0)-h'(0)=0. \qquad (1.14)$$

Из (1.13) и (1.14) заключаем, что выполняется условие (1.5). Лемма доказана.

2 Доказательство существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [7], что система

$$1,\ \cos\lambda_1 x,\ \sin\lambda_1 x,\dots,\ \cos\lambda_k x,\ \sin\lambda_k x,\dots \qquad (2.1)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k=2k\pi\ \ (k=1,2,\dots)$.

Так как система (2.1) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого классического решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) его первая компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k=2\pi k), \qquad (2.2)$$

где

$$u_{10}(t)=\int_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,\dots),$$

$$u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,\dots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t)$ $(k=0,1,\dots)$ и $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,\dots)$ функции $u(x,t)$, из (1.1) и (1.2) получаем:

$$u''_{10}(t)=F_{10}(t;u,a)\ \ (0\le t\le T), \qquad (2.3)$$

$$u''_{1k}(t)+\lambda_k^2u_{1k}(t)=F_{1k}(t;u,a) \quad (k=1,2,\dots;\ 0\le t\le T), \qquad (2.4)$$

$$u_{1k}(0)=\varphi_{1k},\ u'_{1k}(0)=\psi_{1k}\ \ (k=0,1,\dots), \qquad (2.5)$$

$$u''_{2k}(t)+\lambda_k^2u_{2k}(t)=F_{2k}(t;u,a) \quad (k=1,2,\dots;\ 0\le t\le T), \qquad (2.6)$$

$$u_{2k}(0)=\varphi_{2k},\ u'_{2k}(0)=\psi_{2k}\ \ (k=1,2,\dots), \qquad (2.7)$$

где

$$F_{1k}(t;u,a)=a(t)u_{1k}(t)+f_{1k}(t),\quad (k=0,1,\dots),$$

$$f_{10}(t)=\int_0^1 f(x,t)dx,$$

$$f_{1k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{10}=\int_0^1\varphi(x)dx,\ \psi_{10}=\int_0^1\psi(x)dx,$$

$$\varphi_{1k}=2\int_0^1\varphi(x)\cos\lambda_k xdx,$$

$$\psi_{1k}=2\int_0^1\psi(x)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...),$$

$$F_{2k}(t;u,a)=a(t)u_{2k}(t)+f_{2k}(t),$$

$$f_{2k}(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k xdx,$$

$$\varphi_{2k}=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k xdx,$$

$$\psi_{2k}=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...).$$

Далее, из (2.3)–(2.7) находим:

$$u_{10}(t)=\varphi_{10}+t\psi_{10}+\int_0^t(t-\tau)F_{10}(\tau;u,a)d\tau \quad (0\le t\le T), \tag{2.8}$$

$$u_{ik}(t)=\varphi_{ik}\cos\lambda_k t+\psi_{ik}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{ik}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau \quad (i=1,2;\ k=1,2,...;\ 0\le t\le T). \tag{2.9}$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)$ $(k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,...)$ в (2.2) для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) получаем:

$$u(x,t)=\varphi_{10}+t\psi_{10}+\int_0^t(t-\tau)F_{10}(\tau;u,a)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{1k}\cos\lambda_k t+\psi_{1k}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{2k}\cos\lambda_k t+\psi_{2k}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \tag{2.10}$$

Теперь из (1.7), с учетом (2.2), имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(x_0,t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2u_{1k}(t)\cos\lambda_k x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2u_{2k}(t)\sin\lambda_k x_0\right\}. \tag{2.11}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), подставим выражение (2.9) в (2.11):

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(x_0,t)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{\varphi_{1k}\cos\lambda_k t+\psi_{1k}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{1k}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right\}\cos\lambda_k x_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left\{\varphi_{2k}\cos\lambda_k t+\psi_{2k}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x_0\right\}. \tag{2.12}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) сведено к решению системы (2.10), (2.12) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7)важную роль играет следующая

***Лемма* 2.1.** Если $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое классическое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), то функции

$$u_{10}(t)=\int_0^1 u(x,t)dx,$$

$$u_{1k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...),$$

$$u_{2k}(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\ \ (k=1,2,...)$$

удовлетворяют системе (2.7), (2.8).

Замечание. Из леммы 2.1 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) достаточно доказать единственность решения системы (2.10), (2.12). Теперь рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [8] совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=0}^{\infty}u_{2k}(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k=2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_{1k}(t)$ $(k=0,1,...)$ и $u_{2k}(t)$ $(k=1,2,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=J_T(u).$$

2. Через E_T^3 обозначим пространство $B_{2,T}^3\times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t)=\{u(x.t),a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^3}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами. Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde u(x,t)\equiv$$
$$\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde u_{1k}(t)\cos\lambda_k x+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde u_{2k}(t)\sin\lambda_k x,$$
$$\Phi_2(u,a)=\tilde a(t),$$

где $\tilde u_{10}(t)$, $\tilde u_{ik}(t)$ $(i=1,2;k=1,2,...)$ и $\tilde a(t)$ равны соответственно правым частям (2.8), (2.9) и (2.12). Тогда с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\|\tilde u_{10}(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_{10}|+T|\psi_{10}|+T\sqrt T\left(\int_0^T|f_{10}(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac12}+$$
$$+T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]},\qquad(2.13)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\le2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+$$
$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+2\sqrt T\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac12}+$$
$$+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}(i=1,2),\ (2.14)$$

$$\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(x_0,t)\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\frac{\sqrt6}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+\frac{\sqrt6}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac12}+$$
$$+\frac{\sqrt{6T}}{12}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{ik}(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac12}+$$
$$\left.+\frac{\sqrt6}{12}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\right\}.\ (2.15)$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in W_2^3(0,1)$, $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$, $\varphi''(0)=\varphi''(1)$.

2. $\psi(x)\in W_2^2(0,1)$, $\psi(0)=\psi(1)$, $\psi'(0)=\psi'(1)$.

3. $f(x,t)\in C_{x,t}^{1,0}(D_T)$, $f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$, $f_x(0,t)=f_x(1,t)\quad(0\le t\le T)$.

4. $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\ne0\ \ (0\le t\le T)$.

Тогда из (2.13)–(2.15) получаем:

$$\|\tilde u_{10}(t)\|_{C[0,T]}\le\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+T\sqrt T\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+\qquad(2.16)$$
$$+T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}\le2\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+2\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+2T\sqrt T\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$
$$+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac12}(i=1,2),\quad(2.17)$$

$$\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(x_0,t)\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\frac{\sqrt6}{6}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt6}{6}\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\frac{\sqrt{6T}}{6}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$
$$\left.+\frac{\sqrt6}{12}T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\right\}.\quad(2.18)$$

Далее, из (2.16) и (2.17) находим:

$$\|\tilde u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\le A_1(T)+$$
$$+A_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\qquad(2.19)$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+T\sqrt T\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$
$$+4\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+4\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+4\sqrt T\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$A_2(T)=(T+2)T.$$

Теперь из (2.18) имеем:

$$\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le B_1(T)+$$
$$+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\qquad(2.20)$$

где

$$B_1(T)\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t)-f(x_0,t)\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\frac{\sqrt6}{6}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$\left.+\frac{\sqrt6}{6}\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+\frac{\sqrt{6T}}{6}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right\},$$
$$B_2(T)=\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\frac{\sqrt6}{12}T.$$

Из неравенств (2.19) и (2.20)заключаем:

$$\|\tilde u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|\tilde a(t)\|_{C[0,T]}\le$$
$$\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\qquad(2.21)$$

где

$$A(T)=A_1(T)+B_1(T),B(T)=A_2(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

***Теорема* 2.1.** Пусть выполнены условия 1–4 и

$$B(T)(A(T)+2)^2\le1.\qquad(2.22)$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет в шаре $K=K_R\left(\|z\|_{E_T^3}\le R=A(T)+2\right)$ из E_T^3 единственное классическое решение.

*Доказательство***.** В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \qquad (2.23)$$

где $z = \{u, a\}$, а компоненты $\Phi_i (i = 1,2)$ оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями (2.10), (2.12) соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3. Аналогично (2.21) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \qquad (2.24)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \le \qquad (2.25)$$

$$\le B(T)R\left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\right).$$

Из (2.24) и (2.25), с учетом (2.22), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (2.23), т. е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (2.9), (2.11).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (2.4) и (2.6) имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{2}\left\|\|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)} \quad (i = 1,2).$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7), удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6) и (1.7) и в силу леммы 2.1 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

***Теорема* 2.2.** Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T),$$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \ \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0), \ \psi(x_0) = h'(0).$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре $K = K_R\left(\|z\|_{E_T^3} \le R = A(T) + 2\right)$ из E_T^3 единственное классическое решение.

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с периодическими краевыми условиями. С помощью этих фактов доказано существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский*, *А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

2. *Cannon*, *J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. Vol. 5, № 21. – P. 155–160.

3. *Ионкин*, *Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

4. *Нахушев*, *А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1982. Т. 18, №1. – С. 72–81.

5. *Мегралиев*, *Я.Т.* Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Т. 32 (249), № 5. – С. 51–56.

6. *Мегралиев*, *Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для гиберболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 22–28.

7. *Будак*, *Б.М.* Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак. – М. : Наука, 1972. – 668 с.

8. *Худавердиев*, *К.И.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев. – Баку : Чашыоглы, 2010. – 168 с.

Поступила в редакцию 22.04.13.