МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
по курсу "Методы оптимизации"

Гомель 1984

УДК 519.8

Рецензент: Кафедра методов оптимального управления Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина

Составители: Т.П.Быщик, В.Л.Мережа, В.В.Можаровский, Л.Н.Федоренко

В лабораторный практикум включены работы по линейному программированию. Каждая работа содержит постановку задачи, алгоритм или схему ее решения, снабжена иллюстративными примерами, вариантами индивидуальных заданий.

Работа адресована студентам математических специальностей.

Б $\frac{20204 - 032}{М\ 339 - 84}$ I - 84 1702070000

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа 1

Метод применим к задачам линейного программирования с двумя переменными:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to max(min) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 \le b_k. \end{cases} \qquad (2)$$

Алгоритм. 1. В декартовой системе координат на плоскости строим множество X планов задачи как пересечение k полуплоскостей, задаваемых линейными неравенствами системы (2).

При этом возможен один из случаев:

а) X - пустое множество;

б) X - выпуклый многоугольник;

в) X - выпуклая неограниченная многоугольная область.

Если а), то задача не имеет решения; б) или в) - переходим к п.2.

2. По целевой функции z строим вектор $c = \binom{c_1}{c_2}$ (градиент целевой функции) через начало координат проводим прямую l_0 (линию нулевого уровня целевой функции): $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$.

3. При решении задачи максимизации (минимизации) прямую l_0 перемещаем параллельно в направлении вектора c (вектора $-c$) в наиболее отдаленную точку А (точку В) множества планов X. Координаты точки А (точки В) и составляют оптимальный план задачи максимизации (минимизации) функции z на множестве X .

Если множество X - ограничено, то задача всегда имеет решение. Если же X - неограниченная многоугольная область, то задача может не иметь решения в случае, когда не существует наиболее удаленной точки, т.е. целевая функция неограниченно возрастает (убывает) на X .

Если задача имеет оптимальный план, то он достигается либо в одной из вершин границы множества X , либо на одной из ее сторон (альтернативный оптимум).

Замечание. Некоторые задачи линейного программирования с числом переменных $n>2$ могут быть сведены к эквивалентным линейным задачам с двумя переменными. Для этого систему ограничений-равенств исходной задачи приводим к единичному базису. Определяем из нее базисные переменные (эти выражения называют уравнениями связи). Подставляем их в целевую функцию и ограничения-неравенства задачи. После решения полученной эквивалентной задачи с двумя переменными, решение исходной задачи (базисные переменные) находят с использованием уравнений связи.

Пример. Решить графическим методом задачу

$$z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1, \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. I. Приводим систему ограничений-равенств к единичному базису

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & \boxed{2} & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Уравнения связи имеют вид

$$x_3 = -1 + 3x_2,$$
$$x_4 = 2 - 2x_2 - x_1 \qquad (4)$$

2. Исключением базисные переменные x_3, x_4, из задачи (3):

$$z = 2x_1 + x_2 + (-1+3x_2) + 3(2-2x_2-x_1) = -x_1 - 2x_2 + 5;$$
$$6x_1 - 2x_2 + (-1+3x_2) \le 1, \quad 6x_1 + x_2 \le 2;$$
$$1 - 3x_2 \geq 0, \quad x_2 \geq \frac{1}{3}; \quad 2 - 2x_2 - x_1 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \le 2.$$

3. Обозначив $u = z - 5$, получаем задачу (5) эквивалентную задаче (3):

$$u = -x_1 - 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq \frac{1}{3} \end{cases} \qquad (5)$$

4. На плоскости X_1OX_2 строим множество X планов задачи (5), вектор $c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, линию нулевого уровня $u=0$ и линии уровней $u = u_{max}$, $u = u_{min}$.

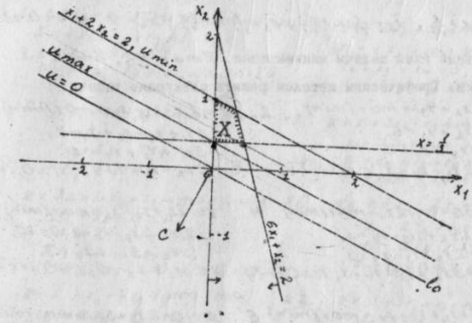

Рис. I

5. Анализ. Область X - четырехугольник АВСД. В точке А ($0, \frac{1}{3}$) целевая функция u имеет максимальное значение $u_{max} = u(0, \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$.

Функция u имеет минимальное значение во всех точках отрезка БС, так как линии уровня функции u параллельны этому отрезку, задача минимизации имеет альтернативный оптимум.

Имеем $B(0,1)$, $C(\frac{2}{11}, \frac{10}{11})$

Координаты $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ произвольной точки отрезка БС можно записать

$$\tilde{x}_1 = \alpha x_{1B} + (1-\alpha) x_{1C} = -\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11};$$

$$\tilde{x}_2 = \alpha x_{2B} + (1-\alpha) x_{2C} = \frac{1}{11}\alpha + \frac{10}{11}, \quad \alpha \in [0,1]$$

$\left(-\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11}, \frac{1}{11}\alpha + \frac{10}{11}\right)$ – общее решение задачи минимизации функции u.

Используя решение задачи (5) и уравнения (4), получаем решение исходной задачи (3).

$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{4}{3}$ – оптимальный план задачи максимизации,

$\tilde{x}_1 = -\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11},\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{11}\alpha + \frac{10}{11},\ \tilde{x}_3 = \frac{3}{11}\alpha + \frac{19}{11},\ \tilde{x}_4 = 0,\ \alpha \in [0,1]$

– оптимальный план задачи минимизации. $z_{max} = 4\frac{1}{3}$, $z_{min} = 3$.

Задание. Графическим методом решить следующие задачи:

1. $z = x_1 - x_2 + x_3 \to max(min)$
$4x_1 - x_2 + x_3 = 6,$
$-3x_1 + x_2 + x_4 = 2,$
$x_2 - 2x_3 + x_4 \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

2. $z = 2x_1 - x_2 - x_4 \to max(min)$
$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$
$-3x_1 + x_3 + x_4 = 1,$
$2x_2 - x_3 + x_4 \le 3,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

3. $z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to max(min)$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

4. $z = -2x_1 + x_2 - x_3 \to max(min)$
$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 20,$
$x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,$
$x_2 + x_5 = 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

5. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max(min)$
$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2,$
$-3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$
$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$

6. $z = x_1 - 2x_3 + 3x_4 \to max(min)$
$x_1 - 2x_2 + x_4 = 4,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$
$2x_1 + x - x_4 \ge -4,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

7. $z = -x_1 + x_2 - 5x_3 \to max(min)$
$x_1 + x_3 + x_4 = 3,$
$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1,$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

8. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max(min)$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$

9. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_4 \to max(min)$
$x_1 - x_2 + x_4 = 2,$
$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10,$
$-2x_1 + 5x_2 + x_5 = 10,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

10. $z = -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to max(min)$
$-2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 6,$
$-4x_2 + x_3 + 4x_4 = 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 \ge 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

11. $z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to max(min)$
$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$
$-x_1 - 2x_2 + x_4 \le 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

12. $z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to max(min)$
$2x_1 - x_2 + x_4 = 1,$
$3x_1 + x_3 - 2x_4 = 2,$
$4x_1 + x_2 + x_4 \le 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

13. $z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \to max(min)$
$2x_1 - x_2 - x_3 = -1,$
$x_1 - 3x_2 - x_4 = -13,$
$4x_1 + x_2 + x_5 = 26,$
$x_1 - 3x_2 + x_5 = 0,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}$

14. $z = x_1 - 2x_2 - x_3 \to max(min)$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20,$
$x_1 + x_3 + 3x_4 = 8,$
$x_1 + x_5 = 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

15. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to max(min)$
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
$x_1 - x_2 + 5x_4 = 2,$
$x_1 - 2x_2 - x_4 \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

15. $z = 3x_1 - 2x_3 + x_4 \to max(min)$
$x_1 - 2x_3 + x_4 = 4,$
$x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
$-x_1 + 2x_3 + x_4 \le 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

17. $z = 5x_1 + x_2 - x_3 \to max(min)$
$x_1 - x_3 + x_4 = 8,$
$x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,$
$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

18. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 \to max(min)$
$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
$x_1 + x_3 - 2x_4 \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

19. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to max(min)$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10,$
$5x_1 - 2x_2 + x_5 = 10,$
$4x_2 - x_5 \le 10,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

20. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to max(min)$
$-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 - 3x_3 = 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 4,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

21. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 \to max(min)$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$
$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2,$
$x_1 + x_2 + x_4 \le 13,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

22. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to max(min)$
$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15,$
$5x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 10,$
$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 3,$
$x_1 + 2x_2 \ge 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

23. $z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \to max(min)$
$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1,$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

24. $z = x_1 + x_3 + x_4 \to max(min)$
$-x_1 + 4x_3 - x_4 = 6,$
$x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 42,$
$-3x_3 + 11x_4 - x_5 = 16,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

25. $z = 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to max(min)$
$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3,$
$x_1 + 7x_2 - 2x_4 = 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

26. $z = -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \to max(min)$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$x_1 - 4x_2 - x_4 = -5,$
$3x_1 + x_2 - x_5 = -6,$
$4x_1 + x_2 + x_6 = 3,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}$

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа 2

Симплекс - метод применяется к задачам линейного программирования, которые в канонической форме обладают свойствами: ранг матрицы системы основных ограничений равен числу уравнений, ограничение задачи не противоречивы, причем известен или легко строится начальный базисный план.

Алгоритм. Задачу линейного программирования приводим к каноническому виду.

$$c'x \to max, \ Ax = b, \ x \geq 0 \quad . \qquad (I)$$

$x, c \in R^n, \ b \in R^m, \ A - m \times n -$ матрица

2. Строим начальный базисный план. Для этого исходную задачу преобразуем к виду (2)

$$c'x \to max, \ (A_Б A_H)\begin{pmatrix} X_Б \\ X_H \end{pmatrix} = b, \ x \geq 0 \ \ (b \geq 0), \qquad (2)$$

где $x_Б = x(J_Б) = \{x_j, j \in J_Б\} \in R^m, \ J_Б = \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \in J,$

$x_H = x(J_H) = \{x_j, j \in J_H = J \setminus J_Б\} \in R^{n-m}, \ J = \{1, 2, \dots, n\},$

$A_Б = E_m, \ A_H = (a_j, j \in J_H), \ a_j = \{a_{ij}, i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \in R^m, 1 \leq j \leq n\}$

Вектор $x^1 = \begin{pmatrix} x_Б^1 \\ x_H^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ - начальный базисный план задачи (I). Вычисляем на нем значение целевой функции и оценки

$$z(x^1) = c'x^1 = c_Б' b, \ c_Б = \{c_j, j \in J_Б\} \in R^m,$$

$$\Delta_j = c_Б' A_Б^{-1} a_j - c_j = c_Б' a_j - c_j, \ j \in J_H$$

и переходим к пункту 3.

3. Строим начальную симплексную таблицу, задающую базисный план x^1 .

4. Проверяем выполнение критерия оптимальности плана. Если все оценки $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$, то базисный план (2) оптимален. Задача решена. Если $\exists \Delta_j < 0, j \in J_H$, то идем к пункту 5.

5. Проверяем достаточные условия неограниченности целевой функции. Если

$$\exists \Delta_j < 0, j \in J_H, \ a_{ij} \leq 0, \ \forall i \in I, \qquad (3)$$

то задача (I) не имеет решения, так как целевая функция не ограничена на множестве планов. Если условие (3) не имеет места, то переходим к п.6.

6. Совершаем симплекс итерацию - переход к новому базисному плану

а) строим новый базис с индексным множеством

$$J_Б = (J_Б \setminus q) \cup p,$$

где p и q находят из соотношений:

$$\Delta_p = min \Delta_j \qquad (p \text{ -й столбец-разрешающий});$$

$$\Theta_q = \frac{b_q}{a_{qp}} = \min_{\substack{\{i: i \in I, \\ a_{ip} > 0\}}} \frac{b_i}{a_{ip}} \qquad (q \text{- я строка-разрешающая});$$

элемент таблицы a_{qp} - разрешающий.

б) строим новую симплексную таблицу, совершая основное симплексное преобразование по элементу a_{qp}:

$$a_{qi}' = \frac{a_{qi}}{a_{qp}}; \ b_q' = \frac{b_q}{a_{qp}}, \ a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{ip} \cdot a_{qi}}{a_{qp}},$$

$$b_i' = b_i - \frac{b_q \cdot a_{ip}}{a_{qp}}, \ \forall i \in I, i \neq q, \ \Delta_i' = \Delta_j - \frac{\Delta_p \cdot a_{qi}}{a_{qp}},$$

$$\forall j \in J, \ x^2 = \begin{pmatrix} x_Б^2 \\ x_H^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(J_Б') \\ x^2(J_H') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix}, \ b' = \{b_i', i \in I\}, \ J_H' = J \setminus J_Б'.$$

7. К новой таблице применяем п 4 алгоритма. И т.д.

Замечание I. Расчет новой симплексной таблицы нужно начинать с определения значений столбца b и строки Δ , так как если для некоторого базисного плана выполняется критерий оптимальности (см. п.4), то нет необходимости вычислять оставшуюся часть таблицы.

Замечание 2. Для проверки превильности вычисления симплексных таблиц можно ввести столбец Σ , который равен сумме всех столбцов таблицы и также вычисляется по превилу прямоугольника.

Пример. Симплексным методом решить задачу

$$\begin{aligned} & z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to max \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2, \\ & 3x_1 + x_3 \leq 5, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3} \end{aligned} \qquad (4)$$

Решение.

I. Приводим задачу (4) к каноническому виду

$$z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,6} \end{cases} \qquad (5)$$

2. Из системы ограничений задачи (5) определяем начальный базисный план

$$X^1 = (0, 0, 0, 1, 2, 5), \quad J_Б = \{4, 5, 6\}.$$

3. Составляем для задачи (5) начальную симплекс-таблицу и применяем симплекс-метод:

$C_Б$ \ C	Базис	B	a_1 (−1)	a_2 (1)	a_3 (3)	a_4 (0)	a_5 (0)	a_6 (0)	Σ	θ	
0	a_4	1	2	−1	$\boxed{1}$	1	0	0	4	$\frac{1}{1}$ →	Табл. 0
0	a_5	2	−4	2	−1	0	1	0	0		
0	a_6	5	3	0	1	0	0	1	10	$\frac{5}{1}$	
	Δ	0	1	−1	−3 ↑	0	0	0	−3		
3	a_3	1	2	−1	1	1	0	0	4		Табл. 1
0	a_5	3	−2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	4	$\frac{3}{1}$ →	
0	a_6	4	1	1	0	−1	0	1	6	$\frac{4}{1}$	
	Δ	3	7	−4 ↑	0	3	0	0	9		
3	a_3	4	0	0	1	2	1	0	8		Табл. 2
1	a_2	3	−2	1	0	1	1	0	4		
0	a_6	1	$\boxed{3}$	0	0	−2	−1	1	2	1/3 →	
	Δ	15	−1 ↑	0	0	7	4	0	26		
3	a_3	4									Табл. 3
1	a_2	11/3									
−1	a_1	1/3									
	Δ	15 1/3	0	0	0	6 2/3	3 2/3	1/3	25 2/3		

Таблица 3 задает оптимальный план: $q = 4 \quad p = 3 \quad \frac{a_{43}}{a_{43}} = 1$

$X^0 = \{\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 4, 0, 0, 0\}$ задачи (4), так как все оценки $\Delta_j \geq 0$, $j \in J_H = \{4, 5, 6\}$, $Z_{max} = Z(X^0) = 15\frac{1}{3}$.

Ответ. Задача (3) имеет решение

$$x_1^0 = \frac{1}{3}, \quad x_2^0 = \frac{11}{3}, \quad x_3^0 = 4, \quad Z_{max} = 15\frac{1}{3}.$$

Задание 2. Симплексным методом решить следующие задачи:

1. $Z = 2x_1 + x_2 \to max$
$2x_1 + x_2 \leq 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$
$-x_1 + x_3 \geq -1, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$

2. $Z = 3x_1 - x_3 \to max$
$x_1 - x_2 + x_4 = 5,$
$2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4,$
$-2x_3 + x_6 = 8, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,6}$

3. $Z = x_2 - x_1 \to max$
$-2x_1 + x_2 \leq 2,$
$x_1 - 2x_2 \leq 2,$
$x_1 + x_2 \leq 5, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,2}$

4. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to max$
$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6,$
$x_2 - x_3 + x_4 \leq 2,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4}$

5. $Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$
$2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 6,$
$8x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$

6. $Z = 8x_1 - 4x_2 + x_3 \to max$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 20,$
$-6x_1 + x_2 \leq 12$
$x_1 - x_2 \leq 2, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$

7. $Z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to min$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5,$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3,$
$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$

8. $Z = -x_1 + 3x_2 - x_3 \to min$
$-x_2 + x_3 \leq 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4,$
$2x_1 + x_2 \leq 2, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$

9. $Z = 2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_5 \to max$
$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,$
$x_2 - x_3 + x_5 = 4,$
$x_2 + x_4 \leq 2, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}$

10. $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to min$
$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5,$
$x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 3,$
$x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 = 5, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,6}$

11. $Z = -5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$
$x_1 - x_2 - x_3 \leq 2,$
$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$2x_1 + x_2 + x_5 = 2, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}$

12. $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to max$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4,$
$2x_1 + x_2 \leq 1,$
$x_2 + 4x_3 \leq 3, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}$

13. $z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$
$3x_1 - x_3 \le 8,$
$-x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

14. $z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 \to min$
$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 5,$
$x_1 - 3x_3 \le 1,$
$x_2 + x_3 \le 4, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

15. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to min$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$
$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$
$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

16. $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to min$
$-5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15,$
$x_1 - x_2 \le 4,$
$-2x_1 + x_3 \le 2, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

17. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

18. $z = -8x_1 + 5x_2 + x_3 \to max$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10,$
$x_1 + x_2 - x_3 \le 5$
$4x_1 + x_2 \le 7, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

19. $z = x_1 + x_2 - x_3 \to max$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1,$
$x_1 + x_3 \le 2,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

20. $z = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to min$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3,$
$3x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

21. $z = 6x_1 + x_2 - x_3 \to min$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9,$
$-x_1 - x_2 + 4x_3 \le 2, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

22. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 \to max$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$
$-x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6$
$2x_1 + x_3 \le 5, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

23. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to max$
$x_1 + x_2 \le 1,$
$x_1 + 2x_3 \le 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

24. $z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to min$
$2x_1 + x_3 + x_4 \le 1,$
$x_2 - 2x_4 = 3,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

25. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to max$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2,$
$-x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

26. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to min$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$
$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$
$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \; x_i \geq 0, \; i = \overline{1,3}$

ДВУХФАЗНЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Лабораторная работа 3

Дана задача линейного программирования в канонической форме

$$c'x \to max, \; Ax = b, \; x \geq 0 \; (b \geq 0) \qquad (I)$$

Предположим, что она не обладает свойствами, при которых применим симплекс-метод (см.лаб.раб.2). В этом случае задачу (I) следует решать двухфазным симплексным методом.

Алгоритм. I-я фаза. Построение начального базисногоплана задачи (I).

I) Составляем задачу первой фазы

$$-e'x_u \to max, \; Ax + x_u = b, \; x \geq 0, \; x_u \geq 0 \qquad (2)$$

где $e = \{1, 1, \ldots, 1\} \in R^m$, $x_u = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}\} \in R^m$ – вектор искусственных переменных.

2) Задачу (2) решаем симплекс-методом.

Для нее $J_Б = J_u = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$, $A_Б = E_m$, $x_Б = b$.

3) Пусть решение задачи (2) – $\{x^*, x_u^*\}$ задается таблицей T^* с множеством базисных индексов $J_Б$ и элементами a_{ij}^*, $i \in J_Б^*$, $j \in J \cup J_Б$.

Возможны три случая:

а) Если $x_u^* \neq 0$, то исходная задача не имеет планов. Процесс решения окончен.

б) Если $x_u^* = 0$ и $J_Б^* \cap J_u = \emptyset$ (среди базисных переменных нет искусственных), то x^* – базисный план задачи (I) с базисным множеством $J_Б^*$.

в) Если $x_u^* = 0$, но $J_Б^* \cap J_u \neq \emptyset$ (среди базисных переменных имеются искусственные), то для $\forall i \in J_Б^* \cap J_u$ возможны два подслучая:

$в_I$) Если в строке, соответствующей переменной i таблицы T^* имеется элемент $a_{ij}^* \neq 0$, $j \in J$, то, выбирая a_{ij}^* за разрешающий элемент и выполняя с ним симплексное преобразование, исключаем искусственную переменную x_i^* из базисных, а x_j вводим в состав базисных переменных;

$в_2$) Если же в этой строке все $a^*_{ij} = 0,\ \forall j \in J$, то в системе ограничений задачи (2) $(i - n_{\cdot} - \varepsilon$ уравнение есть следствие остальных уравнений. Его нужно из (2) удалить, а из T^* - таблицы вычеркнуть указанную i -ю строку и j -й столбец.

Выполнение процедур $в_1$) и $в_2$) над всеми элементами множества $J^*_Б \cap J_u$ приведут к 2б).

2-я фаза. Построение оптимального плана исходной задачи (I) - (2) - (3). Принимая x^* за начальный базисный план, а T^* без столбцов $j \in J_u$ за начальную симплексную таблицу, решаем задачу (I) - (2) - (3) симплексным методом.

Замечание. В конкретных случаях при составлении задачи I фазы (2) искусственные переменные следует вводить только в те ограничения задачи (I), в которых нет базисных переменных. Более того, в основных ограничениях задачи (I) предварительно с помощью элементарных эквивалентных преобразований (умножение ограничения на положительное число, сложение ограничений) могут быть построены некоторые легко выделяющие базисные переменные. Все это ускоряет решение задачи I-й фазы.

Пример. Двухфазным симплексным методом решить задачу

$$z = 3x_1 + x_2 - x_4 \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \qquad (3)$$

Решение: I фаза.

Составляем задачу первой фазы. Так как в первом равенстве уже есть базисная переменная x_3, то достаточно ввести лишь две искусственные переменные x_5 и x_6 во второе и третье равенства.

$$F = -x_5 - x_6 \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6} \qquad (4)$$

$X^1 = (0,0,I,0,2,I)$ - начальный базисный план задачи (4), $J_Б = \{3,5,6\}$. $J_u = \{5,6\}$.

Задачу (4) решаем симплекс-методом:

$C_Б$ \ c			0	0	0	0	-1	-1		
	Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ	Табл. 0
0	a_3	1	3	-5	1	0	0	0		
-1	a_5	2	1	2	0	2	1	0	1	
-1	a_6	1	-2	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	1	→
	F	-3	1	-3 ↑	0	-1	0	0		
0	a_3	6	-7	0	1	-5	0	5		Табл. 1
-1	a_5	0	$\boxed{5}$	0	0	4	1	-2	0	→
0	a_2	1	-2	1	0	-1	0	1		
	F	0	-5 ↑	0	0	-4	0	3		
0	a_3	6	0	0	1	8/5	7/5	11/5		Табл. 2
0	a_1	0	1	0	0	4/5	1/5	-2/5		
0	a_2	1	0	1	0	3/5	2/5	1/5		
	F	0	0	0	0	0	1	1		

Табл. 2 задает оптимальный план задачи (4) $\{X^*, X_u^*\} = \{0,I,6,0,0,0\}$. Искусственные переменные x_5^*, x_6^* не входят в базис. Следовательно $X^* = \{0,I,6,0\}$ - начальный базисный план задачи (3). $J_Б^* = \{I,2,3\}$.

2-я фаза. Используя табл.2, отбросив в ней столбцы a_5, a_6 и заменив вектор стоимости C, решаем задачу (3) симплексным методом:

Табл. 3

$C_Б$ \ C			3	1	0	-1	
	Базис	B	a_1	a_2	a_3	a_4	θ
0	a_3	6	0	0	1	8/5	
3	a_1	0	1	0	0	4/5	
1	a_2	1	0	1	0	3/5	
	Δ	1	0	0	0	4	

Так как все оценки в табл. 3 неотрицательны, то она задает оптимальный план исходной задачи (3.).

Ответ: Вектор $X^0 = (0,I,6,0)$ - решение задачи (3); $Z_{max} = 1$.

Задание 3. Двухфазным методом решить задачи:

1. $Z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

2. $Z = 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 16, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

3. $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

4. $Z = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

5. $Z = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to max$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

6. $Z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to max$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

7. $Z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to max$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

8. $Z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

9. $Z = x_1 + x_2 - x_3 + x_6 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_2 - 2x_5 - x_6 = 5, \\ -x_3 + 3x_5 - x_6 = 7, \\ -x_3 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 3 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

10. $Z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to max$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

11. $Z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ -x_1 + 3x_3 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

12. $Z = 8x_1 + 5x_2 + x_3 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

13. $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

14. $Z = -1{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

15. $Z = 2x_1 + x_2 + x_3 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_2 + x_3 \leq 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

16. $Z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

17. $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$2x_1 - x_2 \geq 5,$
$-x_1 + 3x_2 \leq 3,$
$x_1 + x_2 \geq 8,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,2}$

18. $z = -x_1 + 4x_2 \to max$

$x_1 - 3x_2 \geq 3,$
$x_1 + x_2 \leq 10,$
$3x_1 + x_2 \geq 9,$
$-x_1 + x_2 \leq 4,\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2}$

19. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to max$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

20. $z = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to max$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

21. $z = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to max$

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,$
$2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

22. $z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to max$

$x_1 - x_3 + 2x_4 = 1,$
$4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

23. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to max$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

24. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to max$

$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -5,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

25. $z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \to max$

$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

26. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \to min$

$-x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 1,$
$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}.$

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Лабораторная работа 4

Пусть дана задача линейного программирования

$$z = c'x = c'_{(1)} x_{(1)} + c'_{(2)} x_{(2)} \to max$$

$$\begin{cases} (A_{11}\ A_{12}) \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix} = b_{(1)}, \\ (A_{21}\ A_{22}) \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix} \leq b_{(2)}, \quad x_{(1)} \geq 0, \end{cases} \qquad (I)$$

где $x, c \in R^n$; $c_{(1)}, x_{(1)} \in R^l$; $c_{(2)}, x_{(2)} \in R^{n-l}$, $l \leq n$;

$b = \begin{pmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \end{pmatrix} \in R^m$, $b_{(1)} \in R^s$, $b_{(2)} \in R^{m-s}$, $s \leq m$;

$A_{11} - (s \times l)$, $A_{12} - s \times (n-l)$, $A_{21} - (m-s) \times l$,

$A_{22} - (m-s) \times (n-l)$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - (m \times n)$ матрицы

Двойственной к задаче (I) является задача

$$T = b'y = b'_{(1)} y_{(1)} + b'_{(2)} y_{(2)} \to min$$

$$\begin{cases} (A'_{11}\ A'_{21}) \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix} \geq c_{(1)}, \\ (A'_{12}\ A'_{22}) \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix} = c_{(2)}, \quad y_{(2)} \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

где $y_{(1)} \in R^s$, $y_{(2)} \in R^{m-s}$.

В частности, если $l = n$, $s = m$, получим пару двойственных задач:

$$c'x \to max,\ Ax = b,\ x \geq 0,$$
$$b'y \to min,\ A'y \geq b.$$

Если $l = n$, $s = 0$, имеем

$$c'x \to max,\ Ax \leq b,\ x \geq 0,$$
$$b'y \to min,\ A'y \geq c,\ y \geq 0.$$

Соотношения двойственности

I. Теорема существования. Для существования решения задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы не были пусты множества ее прямых и двойственных планов.

2. Теорема двойственности. Для существования решения прямой задачи линейного программирования (I) необходимо и

достаточно существование решения y^0 двойственной ей задачи (2). На решениях x^0, y^0 значения целевых функций задач (I), (2) равны

$$c'x^0 = b'y^0 \tag{3}$$

3. На каждой паре из прямого x и двойственного y планов выполняется неравенство

$$c'x \le b'y \tag{4}$$

4. Достаточное условие несовместности ограничений. Если вдоль некоторой последовательности $\{y_k\}$ $(\{x_k\})$, $k=1,2,\dots$ двойственных (прямых) планов двойственная (прямая) целевая функция неограниченно убывает (возрастает)

$$b'y^k \to -\infty \ (c'x^k \to \infty), \ k \to \infty, \tag{5}$$

то задача (I) (задача (2)) не имеет планов.

5. Достаточное условие оптимальности. Если на некоторых прямом x^* и двойственном y^* планах выполняется равенство

$$c'x^* = b'y^*, \tag{6}$$

то x^*, y^* - решения задач (I), (2).

6. Условия дополняющей нежесткости. Планы x^0, y^0 задач (I), (2) тогда и только тогда оптимальны, когда

$$x^{0\prime}(A'y^0 - c) = 0, \quad y_0'(Ax^0 - b) = 0. \tag{7}$$

Из равенств (7) и ограничений задач (I), (2) следует:

а) если $x_i^0 \ne 0$ $(y_j^0 \ne 0)$, то i-е ограничение задачи (2) (j-е ограничение задачи (I)) активно на плане y^0 (на плане x^0);

б) если j-е ограничение прямой задачи (i-е ограничение двойственной задачи) пассивно на плане x^0 (на плане y^0), то $y_j^0 = 0$ $(x_i^0 = 0)$, $1 \le i \le l$, $m-s \le j \le m$.

Соотношения двойственности позволяют:

I. Установить разрешимость задач.

2. Проверить оптимальность плана одной задачи по свойствам решения двойственной.

3. По оптимальному плану одной задачи найти оптимальный план двойственной.

Пример. Проверить является ли оптимальным план $x^0 = \{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\}$ для задачи

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ &-6x_1 + 2x_2 - x_4 \ge -1, \\ &x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_4 \ge 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Решение.

I. Проверяем является ли x^0 планом задачи (8). Имеем

$$x_1^0 = 0, \ x_2^0 = 1/3 > 0, \ x_3^0 = 4/3 > 0, \ x_4^0 = 0, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &1 \cdot 0 - 1 \cdot 1/3 + 1 \cdot 4/3 + 1 \cdot 0 = 1, \\ &1 \cdot 0 + 5 \cdot 1/3 + 1 \cdot 4/3 - 1 \cdot 0 = 3, \\ &-6 \cdot 0 + 2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 4/3 - 1 \cdot 0 = 2/3 > -1 \end{aligned} \tag{10}$$

2. Приводим задачу (8) к виду (I)

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max \\ &\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_4 \le 1, \end{cases} \\ &x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_4 \ge 0 \end{aligned} \tag{11}$$

3. Строим задачу двойственную к (II).

$$\begin{aligned} &y_1 + 3y_2 + y_3 \to \min \\ &y_1 + y_2 + 6y_3 \ge 2, \\ &-y_1 + 5y_2 - 2y_3 \ge 1, \\ &y_1 + y_2 = 3, \\ &y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \ y_3 \ge 0 \end{aligned} \tag{12}$$

4. Предположим, что x^0 оптимальный план задачи (II), тогда из соотношения I следует, что у задачи (I2) есть планы, более того существует y^0 - оптимальный план для (I2) (соотношение 2). По соотношению 6

$$x^{0\prime}(A'y^0 - c) = 0.$$

Откуда (см.п. "а") соотношения 6) и из (9) следует, что

$$\begin{cases} -y_1^0 + 5y_2^0 - 2y_3^0 = 1, \\ y_1^0 + y_2^0 = 3. \end{cases}$$

Так как на x^0 третье ограничение задачи (II) пассивно (см.(I0)), то (см. п."6" соотношения 6) $y_3^0 = 0$, из системы

$$\begin{cases} -y_1^0 + 5y_2^0 = 1, \\ y_1^0 + y_2^0 = 3 \end{cases}$$

находим $y_1^0 = 7/3$, $y_2^0 = \frac{2}{3}$.

5. Проверяем является ли вектор $y^0 = \{7/3, 2/3, 0\}$ планом задачи (I2)

$$1 \cdot 7/3 + 1 \cdot 2/3 + 6 \cdot 0 = 3 > 2,$$
$$1 \cdot 7/3 - 1 \cdot 2/3 + 1 \cdot 0 = 5/3 > 1,$$
$$y_3^0 = 0,$$

y^0 - план задачи (I2)

6. Вычисляем на x^0 и y^0 значение целевых функций задач (8) и (I2)

$$c'x^0 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1/3 + 3 \cdot 4/3 + 1 \cdot 0 = 13/3,$$
$$b'y^0 = 1 \cdot 7/3 + 3 \cdot 2/3 + 1 \cdot 0 = 13/3.$$

Так как $c'x^0 = b'y^0$ и x^0, y^0 планы своих задач, то по соотношению (5) они будут решениями задач (8), (I2).

Задание. I. Определить, является ли вектор x^0 решением соответствующей задачи.

2. Используя теорию двойственности, доказать оптимальность задачи минимизации из лабораторной работы I.

1. $x^0 = (2, 2)$
$$z = 8x_1 + 5x_2 \to min$$
$$4x_1 - x_2 \geq 6,$$
$$9x_1 + 8x_2 \leq 154,$$
$$-3x_1 + 11x_2 \geq 16,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

2. $x^0 = (4, 9)$
$$z = 3x_1 + x_2 \to min$$
$$-4x_1 + 5x_2 \leq 25,$$
$$3x_1 - x_2 \leq 14,$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 38,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3. $x^0 = (5, 6)$
$$z = x_1 + 5x_2 \to max$$
$$3x_1 - x_2 \geq 9,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 50,$$
$$-x_1 + 4x_2 \geq 19,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4. $x^0 = (3, 3)$
$$z = 7x_1 + x_2 \to min$$
$$11x_1 - 3x_2 \geq 24,$$
$$9x_1 + 4x_2 \leq 110,$$
$$-2x_1 + 7x_2 \geq 15,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5. $x^0 = (10, 4)$
$$z = x_1 + 8x_2 \to min$$
$$-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$$
$$5x_1 - 6x_2 \leq 26,$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 26,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

6. $z = x_1 + 9x_2 \to min$
$$x^0 = (7, 5)$$
$$6x_1 - 5x_2 \geq 17,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 34,$$
$$-4x_1 + 9x_2 \geq 17,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

7. $x^0 = (10, 9)$
$$z = 5x_1 + 7x_2 \to min$$
$$-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$$
$$5x_1 - 6x_2 \leq 26,$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 26,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

8. $x^0 = (8, 5)$
$$z = x_1 + 7x_2 \to min$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 53,$$
$$x_1 - x_2 \leq 3,$$
$$7x_1 + 3x_2 \geq 71,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

9. $x^0 = (5, 6)$
$$z = 6x_1 + 7x_2 \to min$$
$$3x_1 - x_2 \geq 9,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 50,$$
$$-x_1 + 4x_2 \geq 19,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

10. $x^0 = (7, 10)$
$$z = 7x_1 + 2x_2 \to min$$
$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 97,$$
$$x_1 + 7x_2 \geq 77,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

11. $x^0 = (2, 2)$
$$z = x_1 + x_2 \to min$$
$$4x_1 - x_2 \geq 6,$$
$$9x_1 + 8x_2 \leq 157,$$
$$-3x_1 + 11x_2 \geq 16,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

12. $x^0 = (6, 3)$
$$z = 5x_1 + x_2 \to min$$
$$10x_1 - x_2 \geq 57,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 53,$$
$$6x_1 - 7x_2 \leq 15,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

13. $x^0 = (4, 4)$
$$z = 4x_1 + 3x_2 \to max$$
$$2x_1 - x_2 \geq 4,$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 37,$$
$$-4x_1 + 9x_2 \geq 20,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

14. $x^0 = (6, 4)$
$$z = 3x_1 + 2x_2 \to min$$
$$-4x_1 + 5x_2 \leq 29,$$
$$3x_1 - x_2 \leq 14,$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 38,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

15. $x^0 = (3, 3)$

$z = 9x_1 + 2x_2 \to \min$
$11x_1 - 3x_2 \geqslant 24,$
$9x_1 + 4x_2 \leqslant 110,$
$2x_1 + 7x_2 \geqslant 15,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

16. $x^0 = (2, 6)$

$z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$
$-3x_1 + 14x_2 \leqslant 78,$
$5x_1 - 6x_2 \leqslant 26,$
$x_1 + 4x_2 \geqslant 26,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

17. $x^0 = (13, 8)$

$z = 4x_1 + 3x_2 \to \min$
$2x_1 - x_2 \geqslant 4,$
$x_1 + 3x_2 \leqslant 37,$
$-4x_1 + 9x_2 \geqslant 20,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

18. $x^0 = (7, 5)$

$z = 5x_1 + 3x_2 \to \min$
$6x_1 - 5x_2 \geqslant 17,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 34,$
$-4x_1 + 9x_2 \geqslant 17,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

19. $x^0 = (5, 12)$

$z = 9x_1 + 2x_2 \to \min$
$x_1 + 4x_2 \leqslant 53,$
$x_1 - x_2 \leqslant 3,$
$7x_1 + 3x_2 \geqslant 71,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

20. $x^0 = (9, 13)$

$z = 3x_1 + x_2 \to \min$
$4x_1 + 5x_2 \leqslant 29,$
$3x_1 - x_2 \leqslant 14,$
$5x_1 + 2x_2 \geqslant 38,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

21. $x^0 = (5, 6)$

$z = x_1 + 5x_2 \to \min$
$3x_1 - x_2 \geqslant 9,$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 50,$
$-x_1 + 4x_2 \geqslant 19,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

22. $x^0 = (2/3,\ 2/3)$

$z = x_1 + 3x_2 \to \max$
$x_1 - x_2 \leqslant 1,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 2,$
$x_1 - x_2 \geqslant 0,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

23. $x^0 = (10, 5)$

$z = 7x_1 + x_2 \to \min$
$11x_1 - 3x_2 \geqslant 24,$
$9x_1 + 4x_2 \leqslant 110,$
$-2x_1 + 7x_2 \geqslant 15,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

24. $x^0 = (13, 8)$

$z = 6x_1 + x_2 \to \max$
$3x_1 - x_2 \geqslant 9,$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 50,$
$-x_1 + 4x_2 \geqslant 19,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

25. $x^0 = (13, 9)$

$z = 5x_1 + x_2 \to \max$
$10x_1 - x_2 \geqslant 57,$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 53,$
$6x_1 - 7x_2 \leqslant 15,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

26. $x^0 = (16, 9)$

$z = 5x_1 + 7x_2 \to \max$
$-3x_1 + 14x_2 \leqslant 78,$
$5x_1 - 6x_2 \leqslant 26,$
$x_1 + 4x_2 \geqslant 26,$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Лабораторная работа 5

Метод удобно применять к задачам линейного программирования, для которых известен или легко строится начальный двойственный базисный план (или соответствующий ему коплан), а также к уже решенным симплекс-методом задачам в случае изменения вектора условий b .

Алгоритм. Пусть дана задача линейного программирования

$$c'x \to \max,\ (A_{Б} A_{Н})x = b,\ x \geqslant 0, \qquad (I)$$

(обозначения те же, что и в лаб.раб. 2, $A_{Б} = E_m$).

Двойственная к (I) задача (см.лаб.раб.4) имеет вид

$$\begin{aligned} &b'y \to \min \\ &A'_{Б} y \geqslant c_{Б}, \\ &A'_{Н} y \geqslant c_{Н}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Предположим теперь, что $A'_{Н} c_{Б} \geqslant c_{Н}$, тогда вектор $y = c_{Б}$ начальный двойственный базисный план задачи (I).

Ему соответствует базисный коплан $\delta = \{\delta_{Б} = 0,\ \delta_{Н} = A'_{Н} c_{Б} - c_{Н}\}$ и базисный псевдоплан $\varkappa = \{\varkappa_{Б} = b,\ \varkappa_{Н} = 0\}$.

I. Строим начальную двойственную симплекс-таблицу.

2. Проверяем выполнение критерия оптимальности. Если $\varkappa_{Б} \geqslant 0$, то вектора $y, \varkappa$ оптимальные планы задач (2), (I), а если $\exists\, \varkappa_j < 0,\ j \in J_{Б}$, то идем к пункту 3.

3. Проверяем достаточное условие отсутствия прямых планов. Если

$$\exists\, \varkappa_j < 0,\ j \in J_{Б} \text{ и } a_{ij} \geqslant 0,\quad \forall i \in J, \qquad (3)$$

то ограничения задачи (I) несовместимы. Если условие (3) не имеет места, то переходим к п.4.

4. Совершаем двойственную симплекс-итерацию – переход к новому базисному коплану:

а) строим новый базис с индексным множеством $J'_{Б} = (J_{Б} \setminus q) \cup p$, где p и q находят из соотношений

$$\varkappa_q = \min_{j \in J_{Б}} \varkappa_j,\quad \sigma_p = -\frac{\delta_p}{a_{qp}} = \min_{\substack{i \in J_{Н} \\ a_{qi} < 0}} \left(-\frac{\delta_i}{a_{qi}}\right).$$

Элемент таблицы a_{qp} -разрешающий.

б) строим новую двойственную симплекс-таблицу, совершая основное симплексное преобразование по элементу a_{qp} :

$$a'_{qj} = \frac{a_{qj}}{a_{qp}}, \quad \varkappa'_q = \frac{\varkappa_q}{a_{qp}},$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip}\, a_{qj}}{a_{qp}}, \quad \varkappa'_i = \varkappa_i - \frac{\varkappa_q \cdot a_{ip}}{a_{qp}}, \quad \forall i \in I,\ i \neq q,$$

$$\delta'_j = \delta_j - \frac{\delta_p \cdot a_{qj}}{a_{qp}}, \quad \forall j \in J.$$

5. К новой таблице применяем п.2 алгоритма и т.д.

Замечание. Расчет новой таблицы нужно начинать с определения значений столбца и строки , так как, если выполняется критерий оптимальности (см.п.2), то нет необходимости вычислять оставшуюся часть таблицы.

Пример. Решить двойственным симплекс-методом задачу

$$-2x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -4x_2 - 2x_5 = -10, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad (3)$$

I. Приводим задачу (3) к виду (I)

$$(-2\ -1\ 0\ 0\ 0)\, x \to max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_5 \\ x_4 \end{matrix}$$

$$x \geq 0, \quad J_Б = \{1, 4, 5\}. \qquad (4)$$

2. Строим двойственную задачу к задаче (4).

$$-2y_1 + 5y_2 - y_3 \to min$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -2, \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq -1, \\ -y_1 - y_3 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Вектор $y = c_Б = \{-2, 0, 0\}$ является невырожденным двойственным базисным, так как $A'_H c_Б > c_H$:

$$-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 2 > -1,$$

$$-1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 2 > 0.$$

3. Вычисляем базисный коплан и базисный псевдоплан, составляем начальную двойственную симплекс-таблицу и применяем двойственный симплекс-метод.

$$\delta = A'y - c = \{0, 3, 2, 0, 0\},$$

$$\varkappa = \{-2, 0, 0, 1, 5\}.$$

5 -1

-1 5

табл. 1.

Базис \ $\varkappa$, a_j	$\varkappa$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	-2	1	-1	$\boxed{-1}$	0	0
a_5	5	0	2	0	0	1
a_4	-1	0	-2	-1	1	0
δ		0	3	2	0	0
σ			3	2 ↑		

табл. 2.

Базис \ $\varkappa$, a_j	$\varkappa$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_3	2	-1	1	1	0	0
a_5	5	0	2	0	0	1
a_4	-1	-1	-1	0	1	0
δ		2	1	0	0	0
σ						

4. Таблица 2 задает оптимальный план задачи (3):

$$x^0 = \{0, 0, 2, 1, 5\},$$

$$c'x^0 = 0.$$

Задание. Двойственным симплексным методом решить следующие задачи:

1. $z=-x_1-10x_2 \to max$
$-2x_1-2x_2+2x_5=-1,$
$-2x_1+2x_2+x_3=-2,$
$-4x_1+2x_2+x_4=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

2. $z=-2x_2-4x_4 \to max$
$-6x_1+3x_2=-1,$
$-3x_2+x_3-3x_4=-2,$
$6x_2-12x_4+x_5=-2,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

3. $z=-2x_3-x_4 \to max$
$2x_1-2x_3-2x_4=-1,$
$4x_2-32x_3+4x_4=-7,$
$8x_3-16x_4+4x_5=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

4. $z=-1/2x_2-1/3x_4 \to max$
$5x_1-5x_2-5x_4=-2,$
$20x_2+5x_3-25x_4=-1,$
$15x_2-30x_4+10x_5=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

5. $z=-1/3x_1-x_4 \to max$
$12x_1+6x_2-18x_4=-1,$
$12x_1+6x_3-18x_4=-1,$
$3x_1-6x_4+3x_5=-2,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

6. $z=-1/2x_1-x_5 \to max$
$21x_1+7x_3-28x_5=-1,$
$28x_1+7x_2-49x_5=-2,$
$14x_1+28x_4-49x_5=-5,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

7. $z=-1/2x_2-3x_4 \to max$
$5x_1-5x_2-4x_4=-1,$
$5x_2+x_3-2x_4=-1,$
$-10x_2+x_4+x_5=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

8. $z=-x_1-1/4x_4 \to max$
$4x_1-32x_4+4x_5=-3,$
$-4x_1+4x_2+4x_4=-2,$
$-8x_1+4x_3+4x_4=-5,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

9. $z=-1/2x_2-2x_4 \to max$
$-2x_3+8x_4+2x_5=-1,$
$6x_2-4x_3+2x_4=-3,$
$2x_1+2x_3-6x_4=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

10. $z=-x_1-5x_4 \to max$
$-12x_1+3x_4+3x_5=-8,$
$3x_1+3x_3-9x_4=-8,$
$x_1+3x_2-3x_4=-3,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

11. $z=-1/2x_2-2x_{[illegible]} \to max$
$-x_2+x_3-x_5=-3,$
$x_1+2x_2-4x_5=-1,$
$-x_2+x_4+x_5=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

12. $z=-1/3x_1-1/2x_2 \to max$
$-4x_1+2x_2+2x_5=-3,$
$2x_1-4x_2+2x_3=-1,$
$-2x_1-2x_2+2x_4=-5,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

13. $z=-x_1-1/4x_3 \to max$
$4x_1+4x_2-4x_3=-1,$
$-4x_1-4x_3+4x_4=-7,$
$-64x_1+4x_3+4x_5=-39,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

14. $z=-2/3x_2-x_4 \to max$
$4x_2+4x_3-8x_4=-3,$
$2x_1+4x_2-6x_4=-1,$
$-8x_2+2x_4+4x_5=-7,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

15. $z=-x_2-1/2x_5 \to max$
$5x_1+5x_2-20x_5=-2,$
$-5x_2+10x_3+5x_5=-3,$
$5x_2+15x_4-15x_5=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

16. $z=-5x_1-4x_2 \to max$
$x_1+2x_2-x_3=-2,$
$-4x_1-3x_2-x_4=-12,$
$-4x_1-4x_2-x_3-x_4-x_5=+10,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

17. $z=-1/3x_2-2/3x_4 \to max$
$2x_1-2x_2-2x_4=-5,$
$x_2-3x_4+x_5=-1,$
$-x_2+x_3+x_4=-2,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

18. $z=-1/2x_1-7/2x_4 \to max$
$-4x_1+2x_3-2x_4=-7,$
$2x_1+2x_2-2x_4=-1,$
$-6x_1+2x_4+2x_5=-5,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

19. $z=-2/3x_1-5x_3 \to max$
$-6x_1+6x_3+6x_4=-1,$
$12x_1+6x_2-18x_3=-11,$
$-24x_1+6x_3+6x_5=-7,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

20. $z=-x_2-1/6x_3 \to max$
$-6x_2+3x_3+3x_4=-1,$
$-6x_2-6x_3+6x_5=-7,$
$3x_1+3x_2-9x_3=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

21. $z=-1/7x_1-x_3 \to max$
$-7x_1-7x_3+7x_5=-4,$
$-x_1+x_2+x_3=-1,$
$-63x_1+7x_4=-9,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

22. $z=-5x_1-3/2x_4 \to max$
$3x_1+3x_3-3x_4=-1,$
$-2x_1-2x_4+2x_5=-1,$
$-4x_1+2x_2+2x_4=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

23. $z=-3x_2-2x_4 \to max$
$-3x_3+3x_4=-2,$
$2x_2-2x_4-2x_5=-2,$
$5x_1-2x_2+x_4=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

24. $z=-2x_1-2x_4 \to max$
$-6x_1+2x_2+6x_3=-2,$
$-2x_2-3x_5=-5,$
$2x_2-3x_3+3x_4=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

25. $z=-x_2-3x_5 \to max$
$2x_1-3x_2=-2,$
$3x_2-x_3+2x_5=-2,$
$3x_2-x_3-2x_4=-5,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}$

26. $z=-2x_1-3x_4 \to max$
$-x_2-2x_3-x_5=-2,$
$2x_2-x_4=-1,$
$-x_1+3x_5=-1,$
$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$

МАТРИЧНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Лабораторная работа 6.

Постановка задачи. Имеется m пунктов производства определенного вида продукции с заданными объемами производства $a_i \geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$ и n пунктов потребления этой продукции в объеме $b_j \geqslant 0$, $j=\overline{1,n}$. Известна стоимость перевозки единицы продукции из i -го пункта производства в j -й пункт потребления $c_{ij} \geqslant 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.
Требуется найти такой план перевозок $X=\{x_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}$, чтобы продукция из всех пунктов производства была вывезена

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ;\ i=\overline{1,m}, \qquad (I)$$

запросы всех пунктов потребления были удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,\ j=\overline{1,n} \qquad (2)$$

и транспортные расходы были минимальны

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \qquad (3)$$

Здесь x_{ij} - количество продукции, перевозимое из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Ясно, что

$$x_{ij} \geqslant 0, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

Задача (I) - (4) является специальной задачей линейного программирования. Для существования ее решения необходимо и достаточно выполнения условия общего баланса: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (количество производимой продукции равно количеству потребляемой) и в этом случае применим метод потенциалов.

Алгоритм. При решении задачи (I) - (4) используют транспортные таблицы с множеством клеток $V=\{(i,j), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}$.

	b_1	b_2	...	b_n	
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	u_1
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	u_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	u_m
	ϑ_1	ϑ_2	...	ϑ_n	

I. Построение начального базисного плана перевозок.

Метод минимального элемента. Находим в таблице клетку с минимальной стоимостью перевозки $c_{i_1 j_1} = \min_{(i,j)\in V} c_{ij}$. Полагаем перевозку в этой клетке $x_{i_1 j_1} = min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$. Если $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ $(x_{i_1 j_1} = b_{j_1})$, то исключаем из дальнейшего рассмотрения строку i_1 (столбец j_1), а число b_{j_1} (число a_{i_1}) заменяем на $b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$ (на $a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$). Если $a_{i_1} = b_{j_1}$, то исключаем из рассмотрения либо строку i_1 либо столбец j_1. С уменьшенной таблицей поступаем аналогично. Через $n+m-1$ шаг будут построены перевозки $x_{ij}, (i,j) \in V_Б = \{(i_k,j_k), k=\overline{1,n+m-1}\}$ — базисное множество клеток. Полагаем, $x_{ij} = 0, (i,j) \in V_Н = V \setminus V_Б$ — множество небазисных клеток.

II. Решение задачи (I) - (4) методом потенциалов.

1. Находим потенциалы $\vartheta_j, j=\overline{1,n}$, $u_i = \overline{1,m}$ строк и столбцов транспортной таблицы, решая систему

$$u_i + \vartheta_j = c_{ij},\ (i,j) \in V_Б. \qquad (5)$$

При решении системы (5), следует один из потенциалов выбирать произвольным. Например, потенциал для строки либо столбца, содержащих наибольшее количество базисных клеток, полагать равным нулю.

2. Вычисляем оценки для небазисных клеток

$$\Delta_{ij} = u_i + \vartheta_j - c_{ij},\quad (i,j) \in V_Н.$$

3. Проверяем критерий оптимальности базисного плана:
а) если $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i,j) \in V_Н$, то базисный план перевозок оптимален. Вычисляем на нем транспортные расходы и записываем ответ.
б) если $\exists \Delta_{ij} > 0, (i,j) \in V_Н$, то переходим к п.4.

4. Находим максимальную оценку

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(i,j)\in V_Н} \Delta_{ij}$$

5. Начиная из клетки (i_0,j_0) с использованием клеток из $V_Б$ строим цикл (первое звено клеток - горизонтальное).

6. Среди перевозок, лежащих на концах горизонтальных звеньев цикла, выбираем наименьшую $\theta^c = x_{i_* j_*}$.

7. Строим новую транспортную таблицу с базисным множеством клеток $U_Б' = (U_Б \setminus (i^* j^*)) \cup (i_0 j_0)$.

Для нее базисный план получается из предыдущего, если изменить в нем лишь перевозки по циклу следующим образом: к перевозкам, лежащим на концах вертикальных звеньев цикла (в том числе и в клетку (i_0, j_0)) добавляем θ^0, а из перевозок на концах горизонтальных звеньев цикла вычитаем θ^0 (в клетке (i_0, j_0) перевозка станет нулевой). Переходим к п.I.

Замечания. I. В результате одной интерации транспортные расходы сократятся на величину $\theta^0 \Delta_{i_0 j_0}$.

2. Если для оптимального базисного плана $\exists \Delta_{i^1 j^1} = 0,\ (i^1, j^1) \in U_Н$ то у задачи существует альтернативный оптимум. Его можно найти, совершив еще одну интерацию, считая $(i_0, j_0) = (i^1, j^1)$.

Пример. Записать математическую модель и решить транспортную задачу методом потенциалов

$a_i \backslash b_j$	150	170	190	210	180
250	7	9	16	10	16
350	13	12	18	12	30
300	19	15	10	13	13

Решение. I. Математическая модель данной транспортной задачи имеет вид
Найти план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix}$$

при условиях $x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,5}$ и ограничениях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 250,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 350,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 300,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 170,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210,$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 180,$$

так, чтобы стоимость перевозок была минимальной:

$$z = 7x_{11} + 9x_{12} + 16x_{13} + 10x_{14} + 16x_{15} + 13x_{21} + 12x_{22} + 18x_{23} + 12x_{24} + 30x_{25} + 19x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + 13x_{34} + 13x_{35} \to min$$

2. Проверяем выполнение условия общего баланса:

$$250 + 350 + 300 = 900,$$
$$150 + 170 + 190 + 210 + 180 = 900,$$

$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$; значит, задача имеет решение.

3. Строим начальный базисный план по методу минимального элемента. Решаем задачу методом потенциалов.

$a_i \backslash b_j$	150	170	190	210	180	
250	7 (150)	9 (100)	16 / -2	10 / -1	16 / 1	17
350	13 / -3	12 (70)	18 / -1	12 (210)	20 (70)	20
300	19 / -16	15 / -10	10 (190)	13 / -8	13 (110)	13

Заметим, что $U_Б = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (2,5), (3,3), (3,5)\}$, $|U_Б| = 7$.
Так как $\Delta_{15} = 1 > 0$, то начальный план перевозок не является оптимальным. Для клетки (I,5) строим цикл. Выбираем $\theta^0 = min(100, 70) = 70$ и переходим к новому базисному плану.

7 (150)	9 (30)	16 / -3	10 / -1	16 (70)	16
-3	(140)	-2	(210)	-1	19
-15	-9	(190)	-7	(110)	13
-9	-7	-3	-7	0	

Так как все оценки $\Delta_{ij} < 0$, то план перевозок оптимальный.

$$Z_{min} = 7\cdot150 + 9\cdot30 + 16\cdot70 + 12\cdot140 + 12\cdot210 + \\ + 10\cdot190 + 13\cdot110 = 8770.$$

Ответ.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 150 & 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 140 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 190 & 0 & 110 \end{pmatrix}, \quad Z_{min} = 8770.$$

Написать математическую модель и решить транспортную задачу методом потенциалов.

1.

$a_i \backslash b_j$	40	20	20	20
25	5	8	14	4
30	5	2	2	8
35	7	6	7	5
10	4	5	12	7

2.

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	30
10	12	9	14	7
15	11	13	10	8
25	4	2	3	5
50	2	6	13	3

3.

$a_i \backslash b_j$	10	40	40	10
15	2	7	8	4
25	3	8	5	1
30	5	10	3	9
30	1	4	4	10

4.

$a_i \backslash b_j$	60	65	75	50
70	4	7	15	5
80	7	6	2	3
80	3	4	8	5
20	8	2	4	7

5.

$a_i \backslash b_j$	30	70	50	100
70	7	5	1	6
120	5	3	4	9
20	6	8	7	7
40	4	3	5	5

6.

$a_i \backslash b_j$	75	125	60	140
80	4	5	2	11
40	7	3	2	4
160	3	4	3	5
120	5	7	9	6

7.

$a_i \backslash b_j$	45	40	5	10
30	7	9	9	5
15	2	5	8	9
35	5	6	4	2
20	3	4	3	3

8.

$a_i \backslash b_j$	25	35	45	35
50	6	8	2	4
30	7	2	5	4
40	8	1	7	2
20	1	2	8	12

9.

$a_i \backslash b_j$	60	40	35	65
45	5	4	2	3
30	8	7	5	9
50	4	2	6	8
75	2	5	1	2

10.

$a_i \backslash b_j$	200	100	80	120
60	6	3	3	8
140	3	2	7	6
160	5	4	2	12
140	2	5	8	7

11.

$a_i \backslash b_j$	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	[illegible]	15	11	21
150	19	16	26	12	20

12.

$a_i \backslash b_j$	180	140	190	120	170
300	12	21	9	10	16
280	13	15	11	13	21
220	19	26	12	17	22

13.

$a_i \backslash b_j$	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	16	26	17	20

14.

$a_i \backslash b_j$	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	2	14	22
350	20	17	13	18	21

15.

$a_i \backslash b_j$	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

16.

$a_i \backslash b_j$	170	120	190	140	180
280	28	12	4	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

17.

$a_i \backslash b_j$	180	120	90	105	105
150	14	6	4	4	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	15	8

18.

$a_i \backslash b_j$	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

19.

$a_i \backslash b_j$	100	70	130	110	90
150	20	3	9	15	35
150	14	10	12	20	46
200	25	11	16	19	48

20.

$a_i \backslash b_j$	190	140	180	120	170
280	7	3	9	15	35
220	3	10	12	20	46
300	15	11	16	19	18

21.

$a_i \backslash b_j$	120	180	105	90	105
200	9	6	17	11	8
250	13	4	8	5	7
150	6	7	14	10	6

22.

$a_i \backslash b_j$	175	225	230	170	200
350	5	13	18	17	8
400	6	10	15	6	3
250	24	21	9	16	17

23.

$a_i \backslash b_j$	120	110	85	195	190
250	15	7	16	4	11
250	20	9	6	10	5
200	2	4	7	3	5

24.

$a_i \backslash b_j$	160	120	100	150	170
250	14	11	9	13	18
180	6	5	14	4	14
270	7	19	11	6	13

25.

$a_i \backslash b_j$	160	160	180	220	280
350	6	11	10	14	13
300	17	6	4	11	9
350	12	8	19	10	13

26.

$a_i \backslash b_j$	40	30	80	40	20
70	1	3	2	3	1
50	2	7	5	4	2
30	3	[illegible]	3	2	3

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторный практикум по курсу "Методы оптимизации"

Составители: Татьяна Петровна Бымик, Валерий Леонидович Мережа, Валентин Васильевич Можаровский, Лина Николаевна Федоренко

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано к печати 29.10.1984 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая № 1. Печать офсетная. Усл.п.л. 2,1.
Уч.-изд.л. 1,9. Тираж 200. Заказ 331. Цена 6 к.

Отпечатано на ротапринте ГГУ, г. Гомель, ул.Советская, 104