Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

**А. П. СТАРОВОЙТОВ, Н. А. СТАРОВОЙТОВА,
Г. Н. КАЗИМИРОВ**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Гильбертовы пространства, сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве, интегральные уравнения и преобразования Фурье

Практическое пособие

для студентов математических специальностей

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2016

УДК 517.9(076)
ББК 22.162я73
С773

Рецензенты:
канд. физико-математических наук, профессор В. И. Мироненко,
канд. физико-математических наук С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Старовойтов, А. П.
С773 Функциональный анализ и интегральные уравнения. Гильбертовы пространства, сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве, интегральные уравнения и преобразования Фурье : практическое пособие / А. П. Старовойтов, Н. А. Старовойтова, Г. Н. Казимиров ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 39 с.
ISBN 978-985-577-123-5

Практическое пособие разработано в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика». В пособии содержится материал по темам «Гильбертово пространство», «Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве», «Интегральные уравнения. Теоремы Фредгольма», «Преобразование Фурье».
Адресовано студентам математического факультета.

УДК 517.9(076)
ББК 22.162я73

ISBN 978-985-577-123-5

Оглавление

Предисловие

Как самостоятельная математическая дисциплина функциональный анализ оформился в начале 20 века в результате переосмысления и обобщения ряда понятий математического анализа, алгебры и геометрии. Датой рождения функционального анализа считается 1932 год, когда вышла в свет основополагающая монография Стефана Банаха «Теория линейных операций». За последующие десятилетия функциональный анализ глубоко проник почти во все области математики. Основой для широких приложений функционального анализа является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов типа функций, мер или уравнений, а, скорее, обширных классов таких объектов, причём на этих классах обычно существует естественная структура векторного пространства и естественная топология. Среди областей применения функционального анализа можно указать теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других разделов математики, физики и естествознания.

Данное практическое пособие разработано в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика» и имеет своей целью помочь студентам в овладении практическими навыками решения задач по четырём основным разделам курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения»: гильбертово пространство, сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, интегральные уравнения и теоремы Фредгольма, ряды Фурье.

Согласно учебному плану подготовки специалистов по каждому из этих разделов студент должен самостоятельно выполнить лабораторную работу. Помочь ему успешно справиться с этой задачей, учитывая недостаточную обеспеченность учебными пособиями и отсутствием сборников задач с подробным решением вводных задач («решебников»), – цель, которую ставили перед собой авторы данного пособия.

Практическое пособие имеет следующую структуру.

Весь материал охватывает 4 темы, каждая из которых посвящена изучению целостного раздела курса и содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения; приводятся типичные задачи, снабжённые подробными решениями.

Мы надеемся, что они будут использованы студентами для самопроверки готовности к выполнению текущей лабораторной работы.

Процесс овладения студентом – математиком практическими навыками решения задач по функциональному анализу состоит из следующих основных этапов:

1) самостоятельная работа над учебником и учебными пособиями;
2) посещение и проработка установочных и обзорных лекций;
3) работа на практических и лабораторных занятиях;
4) выполнение лабораторной работы;
5) сдача зачётов и экзаменов.

При этом основными в этом процессе являются 1 и 4-й этапы. Хочется думать, что данное пособие поможет студентам как в самостоятельной работе над учебником и учебными пособиями, так и в овладении практическими навыками решения задач данных разделов курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Наличие подробных решений наиболее важных для усвоения теоретического материала задач, на наш взгляд, будет способствовать активизации самостоятельной работы студентов и успешному выполнению ими лабораторных заданий по каждой теме.

В заключение заметим, что в конце каждой темы приведены варианты заданий по теме, которые можно использовать как для проведения самостоятельных и контрольных работ, так и для формирования индивидуальной лабораторной работы для студентов стационара и контрольной работы для студентов заочного факультета.

Тема 1
Гильбертово пространство

Основные понятия и теоремы

Определение 1. Будем говорить, что на векторном пространстве H (над полем K = $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$) ***задано скалярное произведение***, если задано отображение $\omega: H \times H \to K$(далее вместо $\omega(x, y)$ пишем просто (x, y)), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y); (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Определение 2. Векторное пространство со скалярным произведением называется ***предгильбертовым*** пространством. ***Нормой*** элемента x предгильбертова пространства называется число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Определение 3. Предгильбертово пространство, полное относительно указанной нормы, называется ***гильбертовым***.

В дальнейшем E – предгильбертово пространство.

Определение 4. Вектор $x \in E$ называется ***ортогональным*** множеству $M \subset E$, если $(x, y) = 0$ при всех $y \in M$. Множество векторов, ортогональных M, называется его ***ортогональным дополнением*** и обозначается $M^{\perp}$.

Определение 5. Система векторов $(x_\alpha) \subset E$ называется ***ортогональной***, если (x_α, x_β) = 0 при $\alpha \neq \beta$. Если, кроме того, $\| x_\alpha \| = 1$ при всех α, то эта система называется ***ортонормированной***.

Определение 6. Система векторов $(x_\alpha) \subset E$ называется ***полной***, если ее линейная оболочка плотна в E.

Следующее понятие является одним из важнейших в теории предгильбертовых пространств.

Определение 7. Полная ортогональная система векторов пространства E называется ***ортогональным базисом*** этого пространства. Если ортогональный базис нормирован, то он называется ***ортонормированным базисом***.

Определение 8. Пусть (φ_n) – счетная ортонормированная система векторов в E. Для любого $f \in E$ числа $\widehat{f}_n = (f, \varphi_n)$ называются ***коэффициентами Фурье*** элемента f по системе (φ_n), а ряд

$\sum_n \widehat{f}_n \varphi_n$ – ***рядом Фурье*** элемента f по этой системе.

Теорема 1. *Пусть* (φ_n) *– счетная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Следующие утверждения равносильны:*

1) (φ_n) *– ортогональный базис в H*;

2) *любой элемент* $f \in H$ *является суммой своего ряда Фурье по системе* (φ_n);

3) *если* $(f, \varphi_n) = 0$ *для любого n, то* $f = 0$;

4) *для любого* $f \in H$ *выполняется равенство Парсеваля*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\widehat{f}\right|^2.$$

Задачи

1. Проверить аксиомы скалярного произведения для функции $\omega : L \times L \to \boldsymbol{C}$, где L – линейное пространство над полем $\boldsymbol{C}$ (таблица 1.1).

Таблица 1.1

Номер задания	L	$\omega(x, y)$
1.1	l_2	$\sum_n \left(\frac{1}{n}\right) x_n \overline{y}_n$
1.2	$C^{(1)}[a,b]$	$\int_a^b (x(t)y(t) + x'(t)y'(t))dt$
1.3	$C[a,b]$	$\int_a^b e^{-t} x(t)y(t)dt$
1.4	Пространство $BC(\boldsymbol{R})$ ограниченных непрерывных функций на $\boldsymbol{R}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-2} x(t)y(t)dt$
1.5	l_∞	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) x_n y_n$
1.6	c	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x_n y_n$
1.7	$C([a,b]\times[a,b])$	$\int_a^b \int_a^b tx(s,t)\overline{y(s,t)}dsdt$

Окончание таблицы 1.1

Номер задания	L	$\omega(x, y)$
1.8	c_0	$\sum_n n^{-\frac{3}{2}} x_n \overline{y}_n$
1.9	$C[0,1]$	$\int_a^b t^{-\frac{1}{2}} x(t)\overline{y(t)}dt$
1.10	$L_2([0,1]\times[0,1])$	$\int_0^1 \int_0^1 x(s,t)\overline{y(s,t)}dsdt$
1.11	$\left\{x \in C[0,\infty): \int_0^\infty \lvert x(t)\rvert^2 tdt < \infty\right\}$	$\int_0^\infty x(t)\overline{y(t)}tdt$
1.12	$\left\{x \in C(R): \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 t^2 dt < \infty\right\}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}t^2 dt$
1.13	$l_2(Z) := \left\{(x_n)_{n\in Z}, \sum_{n\in Z} \lvert x_n\rvert^2 < \infty\right\}$	$\sum_{n\in Z} x_n \overline{y}_n$
1.14	$\left\{x \in C(R^2): \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(s,t)\rvert e^{-\lvert st\rvert} dsdt < \infty\right\}$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s,t)\overline{y(s,t)}e^{-\lvert st\rvert}dsdt$

Образец решения и оформления задачи 1.14

Сходимость интеграла, определяющего $\omega(x, y)$, вытекает из неравенства

$$\left|\iint_{R^2} x(s,t)\overline{y(s,t)}e^{-|st|}dsdt\right|^2 \le \iint_{R^2} |x(s,t)|^2 e^{-|st|}dsdt \iint_{R^2} |y(s,t)|^2 e^{-|st|}dsdt,$$

являющегося частным случаем общего неравенства Коши-Буняковского в пространствах $L_2(X, \mu)$. Остальные свойства скалярного произведения проверяются непосредственно (упражнение).

2. Докажите, что в гильбертовом пространстве H над полем K справедливы следующие утверждения:

2.1 $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$

(тождество Аполлония);

2.2 $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (тождество параллелограмма);

2.3 $(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2\right)^2$, $K = \boldsymbol{C}$

(поляризационное тождество);

2.4 $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$, если $x_k \perp x_l, k \neq l, k, l = 1,\dots n$;

2.5 $(x, y) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3}\left\|x + e^{\frac{2\pi ik}{3}} y\right\|^2 e^{\frac{2\pi in}{3}}$, K = $\boldsymbol{C}$;

2.6 $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, K = $\boldsymbol{R}$;

2.7 Равенство $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда *x* ортогонально *y*;

2.8 Если в банаховом пространстве *X* над $\boldsymbol{C}$ выполняется тождество параллелограмма (см. задачу 2.2), то равенство задачи 2.3 задает в *X* скалярное произведение;

2.9 Если в банаховом пространстве *X* над $\boldsymbol{R}$ выполняется тождество параллелограмма (см. задачу 2.2), то равенство задачи 2.6 задает в *X* скалярное произведение;

2.10 Если $x \perp y$, то $\|y\| \leq \|\lambda x + y\| \; \forall \lambda \in \boldsymbol{C}$, K = $\boldsymbol{C}$;

2.11 Равенство $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$ справедливо для всех $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $x \perp y$, K = $\boldsymbol{C}$;

2.12 Если (x_n) – ортогональная система в *H*, и $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, то ряд $\sum_n x_n$ сходится (используйте утверждение задачи 2.4);

2.13 Если (e_n) – ортонормированная система в *H*, и ряд $\sum_n \lambda_n e_n$ сходится $(\lambda \in K)$, то $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$ (используйте утверждение задачи 2.4);

2.14 $(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| x + e^{i\varphi} y \|^2 e^{i\varphi} d\varphi$, K = $\boldsymbol{C}$.

Образец решения и оформления задачи 2.14

Так как $\|x\|^2 = (x, x)$, то, используя свойства скалярного произведения, имеем

$$\|x + e^{i\varphi} y\|^2 = (x + e^{i\varphi} y, x + e^{i\varphi} y) = \|x\|^2 + e^{-i\varphi}(x, y) + e^{i\varphi}(y, x) + \|y\|^2.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x + e^{i\varphi} y\|^2 e^{i\varphi} d\varphi = (\|x\|^2 + \|y\|^2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi + (x, y) + (y, x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} d\varphi = (x, y).$$

3. Докажите, что в нормированном пространстве *X* нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства (таблица 1.2).

Таблица 1.2

Номер задания	X	Номер задания	X
3.1	$C([0,1])$	3.8	$C([0,1]^2)$
3.2	l_1	3.9	$C^{(2)}[0,1]$
3.3	$C^{(1)}[0,1]$	3.10	$BC(R)$
3.4	l_∞	3.11	$L_3[0,1]$
3.5	$L_1([0,1])$	3.12	$L_1([0,1]^2)$
3.6	c_0	3.13	l_5
3.7	l_3	3.14	c_0

Образец решения и оформления задачи 3.14

Если норма согласована со скалярным произведением (т. е. $\|x\|^2 = (x,x)$), то имеет место тождество параллелограмма

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Поэтому достаточно указать два вектора $x, y \in c$, для которых это равенство не имеет места. Легко видеть, что этому требованию удовлетворяют векторы $x = (1,0,0,...)$, $y = (0,1,0,...)$.

4. Вычислите угол между векторами *x, y*: а) в пространстве H_1, б) в пространстве H_2 (таблица 1.3).

Таблица 1.3

Номер задания	x	y	H_1	H_2
4.1	$\sin 3t$	$\cos 5t$	$L_2[-\pi,\pi]$	
4.2	t	t^2	$L_2[0,1]$	
4.3	e^{-t}	e^{-2t}	$L_2[-1,1]$	
4.4	$\sin \pi t$	$\sin t$	$L_2[0,1]$	
4.5	t	$\cos t$	$L_2[0,1]$	
4.6	t^2	$\sin t$	$L_2[0,\pi]$	
4.7	$\sin \pi t$	$\cos \pi t$	$L_2[-1,1]$	
4.8	e^t	t	см. зад. 1.2	см. зад. 1.3
4.9	1	st	см. зад. 1.7	см. зад. 1.10
4.10	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$	$(0,1,0,...)$	l_2	см. зад. 1.5

Окончание таблицы 1.3

Номер задания	x	y	H_1	H_2
4.11	$(e, e^{-1}, e^{-2}, \ldots)$	$(1, 0, 0, \ldots)$	l_2	см. зад. 1.6
4.12	t	t^2	$L_2[0,1]$	см. зад. 1.2
4.13	1	t^3	$L_2[0,1]$	см. зад. 1.9
4.14	t	1	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$

Образец решения и оформления задачи 4.14

Величина угла φ между векторами в гильбертовом пространстве вычисляется по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|}$.

В случае пространства H_1 имеем $\cos\varphi = 0$, так как $(x, y) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot t dt = 0.$ Следовательно, $\varphi = \pi / 2$. В случае пространства H_2 имеем $(x, y) = \int_0^1 t dt = \dfrac{1}{2}, \|x\| = \sqrt{\int_0^1 t^2 dt} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \|y\| = \sqrt{\int_0^1 1 dt} = 1.$ Следовательно, $\cos\varphi = 1/2\sqrt{3}; \varphi = \arccos(1/2\sqrt{3}).$

5. Проверьте, что система векторов (φ_n) является ортогональным базисом пространства H (таблица 1.4).

Таблица 1.4

Номер задания	H	φ_n
5.1	см. зад. 1.1	e_n, где $n \in N$
5.2	l_2	e_n, где $n \in N$
5.3	см. зад. 1.5	e_n, где $n \in N$
5.4	см. зад. 1.6	e_n, где $n \in N$
5.5	см. зад. 1.8	e_n, где $n \in N$
5.6	см. зад. 1.13	f_n, где $n \in N$
5.7	$L_2[0,1]$	$e^{2\pi nti}$, где $n \in N$
5.8	$L_2[0,1]$	$\sin \pi nt$, где $n \in N$

Окончание таблицы 1.4

Номер задания	H	φ_n
5.9	$L_2[0,1]$	$\cos \pi nt$, где $n \in N$
5.10	$L_2[0,\pi]$	$\sin nt$, где $n \in N$
5.11	$L_2[0,\pi]$	e^{2nti}, где $n \in N$
5.12	$L_2[-\pi,\pi]$	e^{int}, где $n \in N$
5.13	$L_2[0,2\pi]$	e^{int}, где $n \in N$
5.14	$L_2[-1,1]$	$1,\ \cos \pi nt,\ \sin \pi nt$

Мы полагаем $e_n = (0,\ldots,1_n,0,\ldots)$, $f_n = (0,\ldots,0,1_n,0,\ldots)$.

Образец решения и оформления задачи 5.14

Ортогональность этой системы проверяется прямым вычислением. Например,

$$\int_{-1}^{1} \cos m\pi t\,\overline{\cos n\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\cos(m+n)\pi t + \cos(m-n)\pi t\right)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Для доказательства полноты воспользуемся теоремой Вейерштрасса, согласно которой любая непрерывная 2π-периодическая функция есть предел равномерно сходящейся последовательности 2π-периодических тригонометрических полиномов, т. е. линейных комбинаций элементов рассматриваемой системы. Таким образом, линейная оболочка этой системы плотна в пространстве $C^0[-1,1]$ непрерывных на отрезке [-1,1] функций, принимающих на концах этого отрезка одинаковые значения. В свою очередь, последнее пространство плотно в $L_2[-1,1]$, что и завершает доказательство.

6. Для данного подмножества M гильбертова пространства H найдите ортогональное дополнение $M^{\perp}$ (таблица 1.5).

Таблица 1.5

Номер задания	H	M
6.1	$L_2[-1,1]$	$\{x : x(t) = 0, t < 0\}$
6.2	$L_2[0,\infty]$	$\{x : x(t) = 0, t > 1\}$

Окончание таблицы 1.5

Номер задания	H	M
6.3	$L_2[-1,1]$	$\left\{x : \int_{-1}^{1} x(t)dt = 0\right\}$
6.4	$L_2(R)$	$\left\{x : \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-t}dt = 0\right\}$
6.5	$L_2[-\pi,\pi]$	$\left\{x : \int_{-\pi}^{0} x(t)\sin t dt = 0\right\}$
6.6	$L_2[0,1]$	$\left\{x : x(t) = 0, t > \frac{1}{2}\right\}$
6.7	l_2	$\{x_1 = x_3 = 0\}$
6.8	l_2	$\{x_1 + x_2 = 0\}$
6.9	l_2	$\{x_1 = x_2\}$
6.10	l_2	$\{x_{2n} = 0, n \in N\}$
6.11	l_2	$\{x_{2n-1} = 0, n \in N\}$
6.12	l_2	$\{x_1 = x_3 = \dots\}$
6.13	l_2	$\{x_2 = x_4 = \dots\}$
6.14	$L_2[0,1]$	$\left\{x : \int_{0}^{1} x(t)tdt = 0\right\}$

Образец решения и оформления задачи 6.14

Рассмотрим функцию $a(t) = t$ в пространстве $L_2[0,1]$. Тогда $M = \{x : x \perp a\} = \{Ka\}^{\perp}$, где $Ka = \{\lambda a : \lambda \in K\}$ – одномерное подпространство, порожденное вектором a. Следовательно, $M^{\perp} = \{Ka\}^{\perp\perp} = Ka \cong K$.

Варианты заданий

Таблица 1.6

Номер варианта	Номера заданий					
1	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11	6.11
2	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12	6.12
3	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13	6.13

Окончание таблицы 1.6

Номер варианта	Номера заданий					
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
6	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6
7	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7
8	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8
9	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9
10	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10
11	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11	6.11
12	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12	6.12
13	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13	6.13
14	1.12	2.1	3.3	4.5	5.4	6.7
15	1.1	2.9	3.12	4.2	5.7	6.3
16	1.2	2.8	3.1	4.11	5.10	6.4
17	1.3	2.13	3.2	4.6	5.9	6.5
18	1.4	2.12	3.11	4.13	5.8	6.3
19	1.5	2.11	3.10	4.9	5.6	6.2
20	1.6	2.10	3.9	4.8	5.5	6.10
21	1.7	2.6	3.8	4.4	5.3	6.13
22	1.8	2.5	3.7	4.1	5.2	6.9
23	1.9	2.7	3.6	4.3	5.1	6.8
24	1.10	2.4	3.5	4.2	5.11	6.1
25	1.11	2.3	3.4	4.10	5.12	6.6

Тема 2
Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Основные понятия и теоремы

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), и $A: H \to H$ – линейный ограниченный оператор в H. Тогда существует единственный оператор $A^*: H \to H$, удовлетворяющий при всех x, y из H соотношению $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

Определение 1. Оператор A^* называется ***сопряженным оператором*** к оператору A в гильбертовом пространстве *H*.

Определение 2. Ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве H называется ***самосопряженным***, если $A = A^*$, т. е. для произвольных *x, y* из *H* выполняется равенство (*Ax, y*) = (*x, Ay*).

Отметим следующие свойства операции сопряжения:

1) $A^{**} = A$;

2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

3) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

4) $(AB)^* = B^* A^*$;

5) $\|A\| = \|A^*\|$.

Определение 3. Ограниченный оператор N в H называется ***нормальным,*** если $NN^* = N^* N$. Если же для ограниченного оператора U в H выполняется равенство $U^* = U^{-1}$, то оператор U называется ***унитарным***.

Задачи

1. В пространстве C^3 со скалярным произведением $(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$ найдите сопряженный оператор A^* для оператора A, заданного матрицей *M*. Является ли A самосопряженным?

Таблица 2.1

Номер задания	M	Номер задания	M
1.1	$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}$	1.8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2	$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$	1.9	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1.10	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Окончание таблицы 2.1

Номер задания	M	Номер задания	M
1.4	$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$	1.11	$\begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.5	$\begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.6	$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	1.13	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$
1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Образец решения и оформления задачи 1.14

Если сопряженному оператору соответствует матрица $M^* = \left(b_{k,j}\right)_{k,j=1}^{3}$, то при всех x, y из C^3 выполняется равенство $(Mx,y) = (x,M^*y)$. Вычисляя обе части этого равенства и приравнивая коэффициенты при $x_k \overline{y}_j$, получаем $b_{11} = b_{12} = 0$; $b_{13} = -i$; $b_{21} = b_{22} = 0$; $b_{23} = 1$; $b_{31} = i$; $b_{32} = 1$; $b_{33} = 0$. Таким образом, $M^* = M$, т. е. оператор A самосопряженный.

2. Вычислите сопряженный к оператору A в пространстве $L_2[0,1]$. При каких $\alpha \in C$ оператор A является: 1) самосопряженным; 2) унитарным; 3) нормальным? (таблица 2.2.)

Таблица 2.2

Номер задания	$(Ax)(t)$	Номер задания	$(Ax)(t)$
2.1	$\alpha \sin t \cdot x(t)$	2.8	$\alpha t^3 \cdot x(t)$
2.2	$\alpha it \cdot x(t)$	2.9	$\cos \alpha t \cdot x(t)$
2.3	$e^{\alpha it} \cdot x(t)$	2.10	$e^{\alpha} t \cdot x(t)$

Окончание таблицы 2.2

Номер задания	$(Ax)(t)$	Номер задания	$(Ax)(t)$
2.4	$e^{\alpha\pi i}t\cdot x(t)$	2.11	$\sin\alpha\sqrt{t}\cdot x(t)$
2.5	$\alpha t^2\cdot x(t)$	2.12	$\cos\alpha t\cdot x(t)$
2.6	$\alpha\sqrt[3]{t}\cdot x(t)$	2.13	$\alpha^2\sqrt{t}\cdot x(t)$
2.7	$\sin\alpha t\cdot x(t)$	2.14	$e^{\alpha t}\cdot x(\sqrt{t})$

Образец решения и оформления задачи 2.14

Если мы положим для краткости $(A^*y)(t)=z(t)$ ($y\in L_2[0,1]$), то равенство $(Ax,y)=(x,A^*y)$, справедливое для всех $x,y\in L_2[0,1]$, приобретает вид

$$\int_0^1 e^{\alpha t}x(\sqrt{t})\overline{y(t)}dt=\int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt.$$

Произведя в левой части замену переменной по формуле $s=\sqrt{t}$, получаем

$$\int_0^1 x(s)2se^{\alpha s^2}\,\overline{y(s^2)}ds=\int_0^1 x(s)\overline{z(s)}ds,$$

что выполняется тождественно по $x,y\in L_2[0,1]$, если $\overline{z(s)}=2se^{\alpha s^2}\,\overline{y(s^2)}$. Таким образом, $(A^*y)(t)=2te^{\bar{\alpha}t^2}y(t^2)$.

Далее при всех $y\in L_2[0,1]$ имеем

$$(AA^*y)(t)=e^{\alpha t}\left(2\sqrt{t}e^{\bar{\alpha}t}y(t)\right)=2\sqrt{t}e^{i\operatorname{Re}\alpha}y(t).$$

С другой стороны, $(A^*Ay)(t)=2te^{\bar{\alpha}t^2}\left(e^{\alpha t^2}y(t)\right)=2te^{t^2\operatorname{Re}\alpha}y(t)$, откуда следует, что оператор A не будет нормальным ни при каком $\alpha\in C$.

3. Найдите сопряженный для оператора $A:l_2\to l_2$ и выясните, является ли A самосопряженным (таблица 2.3).

Таблица 2.3

Номер задания	Ax	Номер задания	Ax
3.1	$(x_2,x_3,\ldots)$	3.8	$(x_2,x_3,0,\ldots)$
3.2	$(0,x_1,x_2,\ldots)$	3.9	$(x_1,0,x_2,0,x_3,0,\ldots)$

Окончание таблицы 2.3

Номер задания	Ax	Номер задания	Ax
3.3	$(0,0,0,x_1,0,\ldots)$	3.10	$\left(\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},\ldots\right)$
3.4	$\left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots\right)$	3.11	$\left(0,0,x_1,\frac{x_2}{2},\ldots\right)$
3.5	$\left(0,x_1,\frac{x_2}{2},\ldots\right)$	3.12	$(0,0,x_2,0,\ldots)$
3.6	$(x_1,x_2,x_3,0,\ldots)$	3.13	$(x_5,x_6,x_7,\ldots)$
3.7	$\left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\ldots\right)$	3.14	$(x_1,0,0,x_2,0,\ldots)$

Образец решения и оформления задачи 3.14

Пусть $x=(x_1,x_2\ldots)$; $y=(y_1,y_2\ldots)$ принадлежат l_2. По определению скалярного произведения в l_2 имеем $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y}_k$.

Поэтому соотношение $(Ax,y)=(x,A^*y)$ перепишется в виде $x_1\overline{y}_1+x_2\overline{y}_4=x_1\overline{z}_1+x_2\overline{z}_2+\ldots$, где положено $A^*y=z=(z_1,z_2,\ldots)$. Приравнивая коэффициенты при x_i, получим $\overline{z}_1=\overline{y}_1$, $\overline{z}_2=\overline{y}_4$, $\overline{z}_3=0,\ldots$. Поэтому $A^*y=(y_1,y_4,0,\ldots)$.

Очевидно, что $A\neq A^*$, т. е. оператор A не является самосопряженным.

4. Если это возможно, укажите пример самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве, дискретный спектр которого совпадает с данным множеством $S\subset C$ (таблица 2.4).

Таблица 2.4

Номер задания	S	Номер задания	S
4.1	$\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,\ldots\right\}$	4.8	$\{e^{i\varphi}:0\le\varphi\le\pi\}$
4.2	$\{0,i\}$	4.9	$\{2^n:n=1,2,\ldots\}$
4.3	$\{2^{-k}:k=1,2,\ldots\}$	4.10	$\{\cos(in):n=1,2,\ldots\}$

Окончание таблицы 2.4

Номер задания	S	Номер задания	S
4.4	$\left\{\frac{i}{n} : n = 1,2,...\right\}$	4.11	$\{\sin(in) : n = 1,2,...\}$
4.5	$\{in : n = 1,...,10\}$	4.12	$[0;+\infty)$
4.6	$\{0,1,2,3\}$	4.13	$\{-1,0,1\}$
4.7	$\{\lambda \in C : \lambda = 1\}$	4.14	$\{0,1,5\}$

Образец решения и оформления задачи 4.14

Возьмем ограниченную последовательность $(\alpha_n) \subset C$ и рассмотрим соответствующий ей диагональный оператор A в пространстве $l_2 : Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$.

Он будет самосопряженным тогда и только тогда, когда все α_i вещественны (проверьте). Как известно (см. лабораторную работу «Спектр оператора»), его дискретный спектр есть $\sigma_p(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$. Поэтому в качестве искомого можно взять оператор $Ax = (0, x_2, 5x_3, ...)$.

5. Найдите сопряженный для интегрального оператора

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

действующего в пространстве $L_2[0, 1]$, и выясните, является ли он самосопряженным (таблица 2.5).

Таблица 2.5

Номер задания	$K(t,s)$	Номер задания	$K(t,s)$
5.1	$e^i \sin(t+s)$	5.8	$2it^2 s$
5.2	$e^{2(t+s)}$	5.9	$t^2 s^2$
5.3	$\sqrt{t^2+s^2}$	5.10	te^s
5.4	$2(t^2+s^2)$	5.11	$\cos(t+s)$
5.5	$e^{i(t+s)}$	5.12	ts^2
5.6	$i(t+s)$	5.13	$\sqrt{ts}$
5.7	ts	5.14	$\begin{cases} 1, 0 \le s \le t \\ 0, s > t \end{cases}$

Образец решения и оформления задачи 5.14

Используя теорему Фубини, получаем

$$\left(Ax,y\right)=\int_0^1\left(\int_0^t x(s)ds\right)\overline{y(t)}dt=\int_0^1 ds\int_s^1 x(s)\overline{y(t)}dt=\int_0^1 x(s)\left(\overline{\int_s^1 y(t)dt}\right)ds=\left(x,A^*y\right).$$

Поэтому $\left(A^*y\right)(s)=\int_s^1 y(t)dt$. Очевидно, $A^*\neq A$.

6. Докажите следующие утверждения для операторов в комплексном гильбертовом пространстве *H*.

6.1. Свойство 1 операции сопряжения;

6.2. Свойство 2 операции сопряжения;

6.3. Свойство 3 операции сопряжения;

6.4. Свойство 4 операции сопряжения;

6.5. Дискретный спектр самосопряженного оператора вещественен;

6.6. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

6.7. Ортогональное дополнение *A*-инвариантного подпространства пространства *H* также *A*-инвариантно, если оператор *A* самосопряжен;

6.8. Оператор $A - iI$ обратим, если *A* самосопряжен;

6.9. Если оператор *A* самосопряжен, то $\left(A^2x,x\right)\geq 0$ при всех *x* из *H*;

6.10. Если оператор *A* обратим, то $\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}$;

6.11. Если операторы A_1 и A_2 перестановочны, то перестановочны и сопряженные к ним операторы;

6.12. Если оператор *U* унитарен, то $\|Ux\|=\|x\|$ при всех *x*;

6.13. Если оператор самосопряжен и обратим, то обратный ему оператор также самосопряжен;

6.14. Каждый оператор *A* единственным образом можно представить в виде $A = B + iC$, где операторы *B* и *C* самосопряжены.

Образец решения и оформления задачи 6.14

Из свойств операции сопряжения сразу следует, что операторы $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$ и $C=\frac{1}{2i}(A-A^*)$ самосопряжены, и непосредственно проверяется, что $A=B+iC$. Если, к тому же, $A=E+iF$, где операторы E,F также самосопряжены, то $A^*=E^*-iF^*=E-iF$. Поэтому $A+A^*=2E$, откуда $E=\frac{1}{2}(A+A^*)=B.$ Аналогично, $F=C$, что и доказывает единственность представления (варианты заданий смотрите в таблице 1.6).

Тема 3
Интегральные уравнения. Теоремы Фредгольма

Основные понятия и теоремы

Определение 1. ***Интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода*** называется уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(s,t)x(s)ds + f(t). \qquad (3.1)$$

Здесь $x(t)$ – неизвестная функция, $K(s,t)$, $f(t)$ – известные функции, называемые ***ядром*** и ***свободным членом*** уравнения соответственно, $a,b \in \boldsymbol{R}$.

Будем рассматривать уравнение (3.1) в комплексных пространствах $L_2[a,b]$ или $C[a,b]$. При этом предполагается, что $f \in L_2[a,b]$, $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$ (соответственно $f \in C[a,b], K \in C([a,b]\times[a,b])$).

Определение 2. Ядро уравнения (3.1) называется ***вырожденным***, если оно имеет вид

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(s) q_j(t), \qquad (3.2)$$

где функции $p_j(s)$, $g_j(t)$ непрерывны и линейно независимы.

Если ядро уравнения (3.1) вырожденное, то, подставив (3.2) в (3.1), получаем

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j q_j(t) + f(t), \qquad (3.3)$$

где

$$a_j = \int_a^b p_j(s)x(s)ds. \qquad (3.4)$$

Для нахождения неизвестных a_j подставляют выражение (3.3) для x в (3.1) или (3.4). При этом возникает система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Важнейшие свойства уравнения (3.1) описываются тремя теоремами Фредгольма (теоремы 1–3 ниже). Для их формулировки запишем ***однородное, сопряженное*** и ***сопряженное однородное*** уравнения, соответствующие уравнению (3.1):

$$x_0(t) = \int_a^b K(s,t)x_0(s)ds \qquad (3.1_0)$$

$$u(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}u(s)ds+g(t) \qquad (3.1')$$

$$u_0(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}u_0(s)ds. \qquad (3.1'_0)$$

Следующие теоремы справедливы как в пространстве $L_2[a,b]$, так и в пространстве $C[a,b]$ (при указанных выше ограничениях на K и f).

Теорема 1. (альтернатива Фредгольма). *Уравнение* (3.1) *разрешимо для любого f тогда и только тогда, когда уравнение* (3.1_0) *имеет только нулевое решение. При этом решение уравнения* (3.1) *единственно.*

Теорема 2. *Однородные уравнения* (3.1_0) *и* ($3.1'_0$) *имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.*

Теорема 3. *Уравнение* (3.1_0) *разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны любому решению сопряженного однородного уравнения* ($3.1'_0$) (*ортогональность означает, что* $\int_a^b f(t)\overline{u_0(t)}dt=0$).

Ясно, что функции u_0 в теореме 3 достаточно брать из (конечной по теореме 2) фундаментальной системы линейно независимых решений уравнения ($3.1'_0$).

Задачи

Будем рассматривать интегральное уравнение

$$x(t)=\mu\int_a^b K(s,t)x(s)ds+f(t). \qquad (3.5)$$

1. Решите уравнение (3.5) при $\mu=1$, функциях $K(t,s)$, $f(t)$ и значениях a, b, указанных в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Номер задания	a	b	$K(t,s)$	$f(t)$
1.1	0	1	$t+s-2ts$	$t+t^2$
1.2	0	π	$\sin(t-2s)$	$\cos 2t$
1.3	0	1	$5ts$	$3t+2$
1.4	1	1	$3t-t^2s^2$	t^2+t^4
1.5	0	π	$\cos(t+s)$	$\sin t$

Окончание таблицы 3.1

Номер задания	a	b	$K(t,s)$	$f(t)$
1.6	0	π	$\sin s + s\cos t$	$1-\dfrac{\pi}{2}t$
1.7	0	π	$\dfrac{2}{\pi}\cos(t+s)$	$1+\sin t$
1.8	0	π	$\sin(s-2t)$	$\cos 2t$
1.9	0	π	$\cos(s+t)$	$1+2\sin t$
1.10	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$\sin s\cdot\cos t$	$\sin t$
1.11	0	1	e^{t+s}	1
1.12	0	1	$2e^{t-s}$	1
1.13	-1	1	$3s+st-5s^2t^2$	$3t$
1.14	-1	1	$\dfrac{5}{2}s^2t^2-\dfrac{1}{2}t(3+s)$	t

Образец решения и оформления задачи 1.14

Нам нужно решить уравнение с вырожденным ядром

$$x(t)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}s^2t^2-\frac{1}{2}t(3+s)\right)x(s)ds+t, \tag{3.6}$$

или

$$x(t)=\frac{5}{2}t^2\int_{-1}^{1}s^2x(s)ds-\frac{1}{2}t\int_{-1}^{1}(3+s)x(s)ds+t. \tag{3.7}$$

Если мы положим

$$a_1=\int_{-1}^{1}s^2x(s)ds,\ a_2=\int_{-1}^{1}(3+s)x(s)ds, \tag{3.8}$$

то в силу (3.7) искомое решение имеет вид

$$x(t)=\frac{5}{2}a_1t^2-\left(\frac{1}{2}a_2-1\right)t. \tag{3.9}$$

Подставляя это выражение для x в (3.8), имеем

$$a_1=\int_{-1}^{1}s^2\left(\frac{5}{2}a_1s^2-\left(\frac{1}{2}a_2-1\right)s\right)ds,$$

$$a_2=\int_{-1}^{1}(3+s)\left(\frac{5}{2}a_1s^2-\left(\frac{1}{2}a_2-1\right)s\right)ds.$$

Вычислив интегралы, стоящие в правой части, получаем следующие равенства:

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = 5a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}.$$

Данная система имеет бесконечное множество решений:

$$a_2 = \frac{15}{4}a_1 + \frac{1}{2}, \quad a_1 \in C.$$

Подставляя это в (3.9), имеем

$$x(t) = \frac{5}{2}a_1 t^2 + \left(-\frac{15}{8}a_1 + \frac{3}{4}\right)t.$$

Наконец, полагая $\frac{5}{2}a_1 = c$, окончательно имеем

$$x(t) = ct^2 + \frac{3}{4}(1-c)t,$$

где c – произвольная постоянная.

2. Не решая уравнения (3.5), определите, при каких $f \in L_2[a,b]$ оно имеет решение в пространстве $L_2[a,b]L_2$. В этой задаче мы полагаем $\mu = 1$ (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Номер задания	a	b	$K(t,s)$	Номер задания	a	b	$K(t,s)$
2.1	0	π	$\frac{2}{\pi}\cos(t+s)$	2.8	$-\pi$	π	se^{it}
2.2	-2	2	$\frac{i}{4}\lvert t\rvert$	2.9	-1	1	$i(t^2 - ts)$
2.3	0	$\frac{\pi}{2}$	$4\sin^2 t$	2.10	0	1	$t - is$
2.4	0	1	$2st - 4t^2$	2.11	-1	1	$t^4 + 5it^3 s$
2.5	-1	1	$st + s^2t^2$	2.12	-1	1	$is + ts^2$
2.6	0	2π	$\sin(t - 2s)$	2.13	0	π	$\sin(3t + s)$
2.7	0	1	ist	2.14	0	2π	$\frac{1}{\pi}\sin(t+s)$

Образец решения и оформления задачи 2.14

Данное уравнение имеет вид

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(s+t)x(s)ds+f(t). \qquad (3.10)$$

В силу одной из теорем Фредгольма (см. теорему 3 выше) оно имеет решение для тех и только тех f, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения

$$u(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t+s)u(s)ds+f(t). \qquad (3.10'_0)$$

Это уравнение с вырожденным ядром. Решая его, как выше (см. решение задачи 1.14), получаем

$$u(t)=c(\sin t+\cos t),\ c\in\boldsymbol{C}.$$

Таким образом, уравнение (3.10) разрешимо при тех и только тех f из $L_2[0,2\pi]$, которые удовлетворяют уравнению

$$\int_0^{2\pi}f(t)(\sin t+\cos t)dt=0.$$

3. При каких значениях параметра $\mu\in\boldsymbol{C}$ уравнение (3.5) разрешимо в пространстве $C[a,b]$ при любой функции f из $C[a,b]$ (таблица 3.3)?

Таблица 3.3

Номер задания	a	b	$K(t,s)$	Номер задания	a	b	$K(t,s)$
3.1	-2	2	$\lvert t\rvert$	3.8	0	1	s^2-2st
3.2	0	$\frac{\pi}{2}$	$\sin t\cdot\cos s$	3.9	0	1	s^2t
3.3	-1	1	$4t^2-2ts$	3.10	0	1	e^{t+2s}
3.4	-1	1	s^2+ts	3.11	0	1	$3s+st$
3.5	-1	1	$2s^3+t^3$	3.12	0	1	$2s^2t$
3.6	-1	1	st	3.13	-1	1	$t(1-s)$
3.7	0	π	$\cos(t+s)$	3.14	0	2π	$e^{i(t-s)}$

Образец решения и оформления задачи 3.14

Воспользуемся теоремой 1. Уравнение (3.1_0) в нашем случае есть уравнение с вырожденным ядром

$$x_0(t)=\mu\int_0^{2\pi}e^{i(t+s)}x_0(s)ds,$$

то есть

$$x_0(t)=\mu e^{it}\int_0^{2\pi}e^{-is}x_0(s)ds. \qquad (3.11)$$

Если мы положим

$$a = \int_0^{2\pi} e^{-is} x_0(s) ds, \tag{3.12}$$

то из (3.11) следует, что $x_0(t) = a\mu e^{it}$. Подставив это в (3.12), имеем

$$a = \int_0^{2\pi} e^{-is} a\mu e^{is} ds = 2\pi a\mu.$$

Таким образом, a удовлетворяет уравнению $a(1-2\pi\mu)=0$. Последнее уравнение, а вместе с ним и уравнение (3.11), имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\mu \neq \frac{1}{2\pi}$.

Итак, данное уравнение разрешимо при всех $f \in C[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\mu \neq \frac{1}{2\pi}$.

4. Для каждого $\mu \in \boldsymbol{C}$ решите уравнение (3.5) в пространстве L_2[-1,1] (a= -1, b= 1), если $K(t,s)=k(s-t)$, где $k(t)$ – $2l$-периодическая функция, совпадающая на отрезке [-1,1] с функцией, указанной в таблице 3.4

Таблица 3.4

Номер задания	l	$k(t)$	$f(t)$
4.1	π	$\lvert t\rvert$	$\operatorname{sgn} t$
4.2	π	$\pi^2 - t^2$	e^t
4.3	$\frac{\pi}{2}$	$\cos \pi x$	1
4.4	π	$t \sin t$	0
4.5	$\frac{\pi}{2}$	$\lvert\sin t\rvert$	t
4.6	π	$\lvert\cos t\rvert$	$-t$
4.7	$\frac{\pi}{2}$	$\sin 2\lvert t\rvert$	e^{2it}
4.8	π	$e^{2\lvert t\rvert}$	$\sin t$
4.9	π	$e^{-\lvert t\rvert}$	$\cos 2t$
4.10	π	$e^{i\lvert t\rvert}$	$\sin 2t$
4.11	1	$\lvert t\rvert$	$e^{2\pi it}$
4.12	$\frac{\pi}{2}$	$t \cos t$	π

Окончание таблицы 3.4

Номер задания	l	$k(t)$	$f(t)$
4.13	π	$\sin \pi t$	$\cos t$
4.14	π	t^2	$\operatorname{ch} t$

Образец решения и оформления задачи 4.14

Ядро $K(s,t) = k(s-t)$ уравнения (3.5) не является вырожденным, но мы сможем применить для его решения тот же прием, что и для уравнения с вырожденным ядром, если разложим функцию $K(s,t)$ в ряд Фурье по ортогональному базису $\{e^{i(ms+nt)} : m,n \in Z\}$ пространства $L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$. Как известно, разложение функции $k(s)$ из $L_2[-\pi,\pi]$ по тригонометрической системе $\{e^{ins} : n \in Z\}$ имеет вид

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{int}, \quad k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k(t) e^{-int} dt.$$

В нашем случае, интегрируя по частям, получаем

$$k_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int} dt = 2\frac{(-1)^n}{n}, n \neq 0; \; k_0 = \frac{\pi^2}{3}.$$

Таким образом,

$$K(s,t) = k(s-t) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n^2} e^{int} e^{-ins} \tag{3.13}$$

(знак $\sum'$ здесь означает, что суммирование не распространяется на значение $n = 0$).

Найдем также разложение Фурье свободного члена f. Коэффициенты Фурье функции f есть

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} t e^{-int} dt = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ch} t = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{int}. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.5), имеем (обоснуйте законность почленного интегрирования ряда)

$$x(t) = \mu\frac{\pi^2}{3}\int_{-\pi}^{\pi} x(s) ds + 2\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n}{n^2} e^{int} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-ins} ds + \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e^{int}.$$

Полагая

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-ins} ds, n \in Z, \tag{3.15}$$

получим, что $x(t)$ имеет вид

$$x(t)=\left(\mu\frac{\pi^2}{3}a_0+\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\right)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(2\mu\frac{(-1)^n}{n^2}a_n+\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)e^{int}. \qquad (3.16)$$

Для нахождения a_n можно подставить это в (3.15), но мы поступим по-другому. Заметим, что числа $a_n/2\pi$ есть коэффициенты Фурье функции $x\in L_2[-\pi,\pi]$, а потому

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi}e^{int}. \qquad (3.17)$$

В силу единственности разложения в ряд по ортогональному базису, получаем из (3.16) и (3.17), что

$$\frac{a_0}{2\pi}=\mu\frac{\pi^2}{3}a_0+\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi},\ \text{т. е. }\ a_0\left(\frac{1}{2\pi}-\mu\frac{\pi^2}{3}\right)=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \qquad (3.18)$$

и

$$\frac{a_n}{2\pi}=2\mu\frac{(-1)^n}{n^2}a_n+\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1+n^2},\ n\neq 0,$$

т. е.

$$a_n\left(\frac{1}{2\pi}-2\mu\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1+n^2}\ (n\in \mathrm{Z}\setminus\{0\}). \qquad (3.19)$$

Возможны два случая.

1) $\dfrac{1}{2\pi}-\mu\dfrac{\pi^2}{3}\neq 0,\ \dfrac{1}{2\pi}-2\mu\dfrac{(-1)^n}{n^2}\neq 0$ при всех $n\neq 0,$ т. е.

$$\mu\notin\left\{\frac{(-1)^n}{4\pi}n^2 : n\in Z\setminus\{0\}\right\}\cup\left\{\frac{3}{2\pi^3}\right\}.$$

В этом случае каждое из уравнений (3.18) и (3.19) имеет единственное решение:

$$a_0=\frac{6\operatorname{sh}\pi}{3-2\pi^3\mu},\quad a_n=2\operatorname{sh}\pi\frac{(-1)^n n^2}{(1+n^2)\left(n^2+(-1)^n 4\pi\mu\right)},\ n\in Z\setminus\{0\} \qquad (3.20)$$

соответственно. Следовательно, при таких μ уравнение (3.5) имеет единственное решение (3.17), где коэффициенты a_n определяются из (3.20).

2) $\mu\in\left\{\dfrac{(-1)^n}{4\pi}n^2 : n\in Z\setminus\{0\}\right\}\cup\left\{\dfrac{3}{2\pi^3}\right\}.$

В этом случае уравнение (3.18) или (3.19), а вместе с ним и уравнение (3.5), не имеет решения.

Варианты заданий смотрите в таблице 1.6 (задачи 1–4).

Тема 4
Преобразование Фурье

Основные понятия и теоремы

Определение 1. ***Преобразованием Фурье функции*** f из $L_1(\boldsymbol{R})$ называется функция $\widehat{f}(\lambda)$, определяемая равенством

$$\widehat{f}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx. \tag{4.1}$$

Оператор $F: f \mapsto \widehat{f}$ называется ***преобразованием Фурье***.
Введя обозначения

$$F_c(f)(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx, \tag{4.2}$$

$$F_s(f)(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx, \tag{4.3}$$

формулу (4.1) можно переписать в виде

$$F(f)=F_c(f)+iF_s(f).$$

Преобразования (4.2) и (4.3) называются соответственно ***косинус-*** и ***синус-преобразованиями Фурье***. Ясно, что $F(f)=F_c(f)$, если f – четная функция, и $F(f)=iF_s(f)$, если f – нечетная функция.

Оператор F инъективен, и при некоторых условиях имеет место следующая ***формула обращения***, задающая обратный оператор F^{-1}:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{4.4}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения). Вот одно из точных утверждений этого сорта.

Теорема 1. *Если f и $\widehat{f}$ принадлежат $L_1(\boldsymbol{R})$, то для п.в. x из* $\boldsymbol{R}$ *имеет место равенство* (4.4).

То же справедливо с заменой $L_1(\boldsymbol{R})$ на $L_2(\boldsymbol{R})$ (см. теорему 4 ниже).

Для нахождения прямого и обратного преобразований Фурье применяют также специальные таблицы. Заметим, что при использовании различных источников требуется определенная осторожность, поскольку определение преобразования Фурье в них может отличаться от нашего числовым множителем перед интегралом или в показателе экспоненты.

Определение 2. ***Сверткой*** функций f и g называется функция (если интеграл существует)

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Теорема 2. *Пространство $L_1(\boldsymbol{R})$ со сверткой в качестве умножения является коммутативной алгеброй.*

Теорема 3. (О свертке). *При f, g из $L_1(\boldsymbol{R})$ имеет место формула*

$$F(f * g) = F(f)F(g).$$

Следующая теорема содержит в себе, в частности, ***определение преобразования Фурье для функций из $L_2(\boldsymbol{R})$*** (определение 1 для этой цели не годится, так как $L_2(\boldsymbol{R})$ не содержится в $L_1(\boldsymbol{R})$).

Теорема 4. (Планшерель). *Для всякой функции f из $L_2(\boldsymbol{R})$ функция*

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_{-n}^{n} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

при любом натуральном n принадлежит пространству $L_2(\boldsymbol{R})$. Последовательность ($\widehat{f}_n$) сходится в метрике $L_2(\boldsymbol{R})$ к некоторой функции $\widehat{f} \in L_2(\boldsymbol{R})$, называемой ***преобразованием Фурье функции f*** *. Возникающее при этом отображение $F : f \mapsto \widehat{f}$ является линейным ограниченным биективным оператором, действующим в пространстве $L_2(\boldsymbol{R})$, и выполняется* ***равенство Парсеваля****:*

$$\left\| \widehat{f} \right\|_2 = \sqrt{2\pi} \left\| f \right\|_2 .$$

Задачи

1. Пользуясь определением, найдите преобразование Фурье функции f из $L_1(\boldsymbol{R})$ (здесь и далее χ_A – индикатор (характеристическая функция) множества $A \subset \boldsymbol{R}$) (таблица 4.1).

Таблица 4.1

Номер задания	$f(x)$	Номер задания	$f(x)$
1.1	$e^{-2\|x\|}$	1.8	$e^{ix}\chi_{[0,1]}(x)$
1.2	$e^{-x}\chi_{R_+}(x)$	1.9	$x^3\chi_{[0,2]}(x)$
1.3	$e^{x}\chi_{[-1,1]}(x)$	1.10	$x^2\chi_{[-1,1]}(x)$
1.4	$\chi_{[0,1]}(x)\sin x$	1.11	$e^{-\|x\|}\operatorname{sgn}(x)$
1.5	$\dfrac{1}{1+x^2}$	1.12	$\sin^2 x\chi_{[0,1]}(x)$
1.6	$\chi_{[-1,1]}(x)\cos x$	1.13	$\cos^2 x\chi_{[-1,1]}(x)$
1.7	$x\chi_{[0,1]}(x)$	1.14	$e^{-\frac{x^2}{2}}$

Образец решения и оформления задачи 1.14

Полагая для краткости $y = F(f)$, имеем

$$y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos\lambda x dx .$$

Дифференцируя по параметру, а затем, интегрируя по частям, получаем

$$y'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-\sin\lambda x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda x de^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \sin\lambda x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos\lambda x dx = -\lambda y'(\lambda),$$

т. е. y удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' + \lambda y = 0$. Общее решение этого уравнения есть $y = Ce^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, а постоянную C находим из начального условия

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \text{ (интеграл Эйлера-Пуассона).}$$

Окончательно получаем, что $\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

2. Считая известным преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f из $L_1(\boldsymbol{R})$, найдите преобразование Фурье функции g (таблица 4.2).

Таблица 4.2

Номер задания	$g(x)$	Номер задания	$g(x)$
2.1	$f(-3x)$	2.8	$\overline{f(x+1)}$
2.2	$f(x-a)$	2.9	$\sin^2 x \cdot f(x)$
2.3	$f(-x)$	2.10	$\cos^2 x \cdot f(x)$
2.4	$f(2x)$	2.11	$f(1-x)$
2.5	$\sin x \cdot f(x)$	2.12	$f(x-1) + f(x+1)$
2.6	$\cos x \cdot f(x)$	2.13	$\overline{f(-x)}$
2.7	$f(x) - f(-x)$	2.14	$\operatorname{Re} f(x)$

Образец решения и оформления задачи 2.14

Поскольку $\operatorname{Re} f(x) = f(x) + \overline{f(x)}$, то

$$\widehat{g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-i\lambda x} dx = \widehat{f}(\lambda) + \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx} = \widehat{f}(\lambda) + \overline{\widehat{f}(-\lambda)}.$$

3. Решите следующие функциональные уравнения в пространстве $L_1(\boldsymbol{R})$:

3.1. $f(x)+f(x-1)+f(x-2)=\chi_{[0,3]}(x)$;

3.2. $f(x)+f(x-2\pi)=e^{ix}\chi_{[0,4\pi]}(x)$;

3.3. $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=e^{4\pi ix}\chi_{[-0,5;-1,5]}(x)$;

3.4. $f(x+1)+f(x+3)+f(x+5)=\chi_{[0,6]}(x)$;

3.5. $f(2-x)+f(2x-4)=\chi_{[-2,2]}(x)$;

3.6. $f(\pi-x)+f(-x)=e^{-2ix}\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$;

3.7. $f(x)+f(1+x)=2\chi_{[0,2]}(x)$;

3.8. $f(1-x)+f(2-x)=\chi_{[0,2]}(x)$;

3.9. $f(x+1)-f(x-1)=e^{-2\pi ix}\left(\chi_{[-3,-1]}(x)-\chi_{[1,3]}(x)\right)$;

3.10. $f(x+2\pi)+f(x-2\pi)=e^{2ix}\chi_{[-4\pi,4\pi]}(x)$;

3.11. $f(x)+f(x+1)=\chi_{[-1,0]}(x)+2\chi_{[0,1]}(x)+\chi_{[1,2]}(x)$;

3.12. $f(x-1)+f(x)+f(x+1)=\chi_{[-1,2]}(x)$;

3.13. $f(x+\pi)+f(x-\pi)=e^{2ix}\left(\chi_{[-\pi,0]}(x)+\chi_{[\pi,2\pi]}(x)\right)$;

3.14. $f(1-x)+f(2-x)+f(3-x)+f(4-x)=e^{2\pi ix}\chi_{[0,4]}(x)$.

Образец решения и оформления задачи 3.14

Если положить $f(1-x)=g(x)$, то уравнение принимает вид

$$g(x)+g(x-1)+g(x-2)+g(x-3)=e^{2\pi ix}\chi_{[0,4]}(x). \tag{4.5}$$

Поскольку

$$F\left(\chi_{[a,b]}\right)(\lambda)=\frac{e^{-i\lambda a}-e^{-i\lambda b}}{i\lambda}, \tag{4.6}$$

$$F\left(e^{aix}(\varphi(x))\right)(\lambda)=\widehat{\varphi}(\lambda-a), \tag{4.7}$$

то, переходя в (4.5) к преобразованию Фурье, имеем

$$\widehat{g}(\lambda)\left(1+e^{-i\lambda}+e^{-2i\lambda}+e^{-3i\lambda}\right)=\frac{1-e^{-4i(\lambda-2\pi)}}{i(\lambda-2\pi)}=\frac{1-e^{-4i\lambda}}{i(\lambda-2\pi)}.$$

Так как

$$1+e^{-i\lambda}+e^{-2i\lambda}+e^{-3i\lambda}=\frac{1-e^{-4i\lambda}}{1-e^{-i\lambda}},$$

то

$$\widehat{g}(\lambda)=\frac{1-e^{-i\lambda}}{i(\lambda-2\pi)}=\frac{1-e^{-i(\lambda-2\pi)}}{i(\lambda-2\pi)}.$$

Снова воспользовавшись формулами (4.6) и (4.7), получаем отсюда, что

$$F(g)(\lambda)=F\left(e^{2\pi ix}\chi_{[0,1]}(x)\right)(\lambda).$$

Поэтому $g(x)=e^{2\pi ix}\chi_{[0,1]}(x)$. Полагая в этом равенстве $x=1-t$, имеем окончательно

$$f(t)=e^{-2\pi it}\chi_{[0,1]}(t).$$

4. Вычислите свертку $f*\chi_{[-1,1]}$, если функция $f(x)$ имеет вид, указанный в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Номер задания	$f(x)$	Номер задания	$f(x)$
4.1	$\frac{1}{1+x^2}$	4.8	$e^{-\lvert x\rvert}$
4.2	xe^{-x^2}	4.9	$\sqrt{x^2+1}$
4.3	$x^3e^{-x^4}$	4.10	$\frac{x^3}{x^4+1}$
4.4	$\frac{x}{1+x^2}$	4.11	$e^{-x}\cos x$
4.5	$\sin^3 x$	4.12	$e^{\lvert x\rvert}\chi_{R_+}(-x)$
4.6	$e^x\sin x$	4.13	$\frac{\chi_{R_+}(x)}{1+x^2}$
4.7	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	4.14	$e^{-x}\chi_{R_+}(x)$

Образец решения и оформления задачи 4.14

По определению

$$f=f*\chi_{[-1,1]}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\chi_{[-1,1]}(y)dy=\int_{-1}^{1}e^{-(x-y)}\chi_{R_+}(x-y)dy=$$

$$=[y=x-t]=\int_{x-1}^{x+1}e^{-t}\chi_{R_+}(t)dt=\int_{[x-1,x+1]\cap R_+}e^{-t}dt.$$

Для вычисления последнего интеграла рассмотрим три случая.

1) $x<-1$. Тогда $[x-1,x+1]\bigcap R_{+}=\varnothing$, поэтому $f*\chi_{[-1,1]}(x)=0$;

2) $-1\le x<1$. Тогда $[x-1,x+1]\bigcap R_{+}=[0,x+1]$. Поэтому

$$f*\chi_{[-1,1]}(x)=\int\limits_{0}^{x+1}e^{-t}dt=1-e^{-x-1};$$

3) $x\ge 1$. Тогда $[x-1,x+1]\subset R_{+}$. Следовательно,

$$f*\chi_{[-1,1]}(x)=\int\limits_{x-1}^{x+1}e^{-t}dt=\left(e-e^{-1}\right)e^{-x}.$$

Окончательно имеем

$$f*\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ 1-e^{-x}, -1\le x<1\\ (e-e^{-1})e^{-x}, x\ge 1.\end{cases}$$

5. Решите интегральное уравнение в пространстве $L_1(\boldsymbol{R})$

$$f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t-s)x(s)ds.$$

Таблица 4.4

Номер задания	$f(t)$	$K(t)$	Номер задания	$f(t)$	$K(t)$
5.1	e^{-t^2}	e^{-4t^2}	5.8	e^{-2t^2}	e^{-3t^2}
5.2	$\frac{1}{t^2+4}$	$\frac{1}{t^2+1}$	5.9	$\frac{1}{t^2+3}$	$\frac{1}{t^2+2}$
5.3	$te^{-\frac{t^2}{2}}$	te^{-t^2}	5.10	$te^{-\frac{t^2}{4}}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$
5.4	te^{-2t^2}	te^{-4t^2}	5.11	te^{-2t^2}	te^{-3t^2}
5.5	$\frac{1}{\left(t^2+4\right)^2}$	$\frac{1}{t^2+1}$	5.12	$\frac{1}{\left(t^2+2\right)^2}$	$\frac{1}{t^2+1}$
5.6	$\frac{t}{\left(t^2+9\right)^2}$	$\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}$	5.13	$\frac{1}{\left(t^2+4\right)^2}$	$\frac{1}{\left(t^2+3\right)^2}$
5.7	$e^{-\lvert t\rvert}\left(1+\lvert t\rvert\right)$	$e^{-\lvert t\rvert}$	5.14	$e^{-t^2}\operatorname{sh}2t$	te^{-t^2}

Образец решения и оформления задачи 5.14

Применяя к обеим частям данного уравнения преобразование Фурье, в силу теоремы о свертке, имеем

$$\widehat{x}(\lambda)=\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\widehat{K}(\lambda)}.$$

Мы вычислим $\widehat{f}, \widehat{K}$ не прибегая к помощи таблиц, а пользуясь лишь формулой

$$F\left(e^{-ax^2}\right)(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

где $(a > 0)$, которая выводится при помощи того же приема, что и в задаче 1.14. Поскольку $(g')^\wedge(\lambda) = i\lambda\widehat{g}(\lambda)$, $te^{-t^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-t^2}\right)'$,

то

$$\widehat{K}(\lambda) = F\left(te^{-t^2}\right)(\lambda) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} i\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

Далее,

$$f(t) = e^{-t^2}\operatorname{sh} 2t = \frac{1}{2}e^{-t^2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) = \frac{e}{2}\left(e^{-(t-1)^2} - e^{-(t+1)^2}\right).$$

Поскольку

$$F\left(g\left(x-a\right)\right)(\lambda) = e^{-i\lambda a}F\left(g\right)(\lambda),$$

то

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{e}{2}\left(e^{-i\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sqrt{\pi} - e^{i\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sqrt{\pi}\right) = \frac{e\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\left(e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}\right) = -ie\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda.$$

Таким образом,

$$\widehat{x}(\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\widehat{K}(\lambda)} = \frac{-ie\sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda}{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}i\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}} = 2e\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Неизвестная функция x теперь может быть найдена по формуле (4.6), из которой при $a = -1, b = 1$ следует, что $2\frac{\sin\lambda}{\lambda} = F\left(\chi_{[-1,1]}\right)(\lambda)$. Окончательно получаем, что

$$x(t) = e\chi_{[-1,1]}(t).$$

6. Верно ли, что преобразование Фурье F есть линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y (таблица 4.5)?

Таблица 4.5

Номер задания	X	Y
6.1	$L_1(R)$	$C_0(R) = \{f \in C(R) : f(\infty) = 0\}$
6.2	$L_1(R)$	$L_1(R)$

Окончание таблицы 4.5

Номер задания	X	Y
6.3	$L_1(R)\bigcap L_2(R)$	$L_2(R)$
6.4	$L_2(R)$	$C_0(R)$
6.5	$L_1(R)$	$BC(R)$
6.6	$L_1(R)$	$UC(R)$ – пространство равномерно непрерывных функций
6.7	$\{f : f(x)e^{\alpha x} \in L_1(R) \forall a \ge 0\}$	$BC(R)\bigcap O(C)$
6.8	$\{f \in L_1(R) : xf(x) \in L_1(R)\}$	$C^1(R)$
6.9	$\{f \in L_1(R) : f''(x) \in L_1(R)\}$	$L_1(R)$
6.10	$L_2(R)$	$L_1(R)$
6.11	$D(R)$	$O(R)$
6.12	$L_1(R)\bigcap L_2(R)$	$L_1(R)\bigcap L_2(R)$
6.13	$L_1(R)$	$L_2(R)$
6.14	$\{f \in L_1(R) : f(x)e^{\lvert x\rvert} \in L_1(R)\}$	$O(\{z : \lvert\operatorname{Im} z\rvert < 1\})$

$O(D)$ – пространство функций, аналитических в области $D \subset \boldsymbol{C}$.

Образец решения и оформления задачи 6.14

В доказательстве нуждается лишь утверждение, что $F(f) \in Y \forall f \in X$. Докажем это. Функция $\hat{f}(\lambda)$ $(\lambda \in R)$ формулой

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-izx} dx \tag{4.8}$$

продолжается в полосу $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}|$ z-плоскости $(z = \lambda + i\tau)$, поскольку в этой полосе интеграл (4.8) абсолютно сходится. Осталось доказать дифференцируемость функции $\hat{f}(z)$ в каждой точке z_0 этой полосы. В соответствии с теоремой о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра (см., например, [6]; для интеграла Лебега эта теорема также справедлива), достаточно показать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx} (-ix) dx$$

от производной по параметру подынтегральной функции в (4.8) сходится равномерно (по параметру z) в некоторой окрестности точки z_0. Действительно, если $q < 1$ таково, что $|\operatorname{Im} z_0| < q$, то в полуплоскости $\{\tau < q\}$, содержащей z_0, имеем оценку

$$\left| f(x)e^{-izx}(-ix)\right| = \left| f(x)\right| |x| e^{\tau x} = \left| f(x)\right| e^{|x|} |x| e^{\tau x-|x|} \le \left| f(x)\right| e^{|x|} |x| e^{-(1-q)|x|},$$

причем последняя функция интегрируема. Осталось применить мажорантный признак (признак Вейерштрасса) равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Варианты заданий указаны в таблице 1.6.

Дополнительные задачи и упражнения

1. Докажите, что в пространстве тригонометрических полиномов формула $\omega(x,y) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(s)\overline{y(s)}ds$ определяет скалярное произведение.

2. Проверьте, что континуум функций $e^{i\lambda x}$ $(\lambda \in R)$ образует ортогональный базис этого пространства.

3. Вычислите углы треугольника с вершинами $x_0(t) = 1$; $x_1(t) = t$; $x_2(t) = 0$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

4. Проверьте, что последовательность векторов $\varphi_{k,n} = e^{2\pi i(nt+ks)}$, $n, k \in Z$ образует ортогональный базис пространства $L_2([0,1]\times[0,1])$.

5. Найдите ортогональное дополнение в $L_2[-1,1]$ подпространства четных функций.

6. Докажите, что при любых $x, y, z \in H$ справедливо неравенство Птолемея $\|x-z\|\cdot\|y-t\| \le \|x-y\|\cdot\|z-t\| + \|y-z\|\cdot\|x-t\|$.

Докажите следующие утверждения для ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H.

7. Если оператор A самосопряжен, то $\|A\| = \sup\{(Ax,x) : \|x\| = 1\}$.

8. Следующие операторы унитарны в пространстве $L_2(\boldsymbol{R})$:

8.1 оператор сдвига $(T_h x)(t) = x(t-x)$;

8.2 преобразование Фурье $(Fx)(\lambda) = \int_R x(t)e^{-2\pi i\lambda t}dt$.

9. Оператор P в H, обладающий свойством $P^2 = P^* = P$, является ортопроектором.

10. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.

11. Может ли дискретный спектр самосопряженного оператора быть пустым множеством?

Приложение А
(справочное)
Некоторые из основных банаховых и гильбертовых пространств функционального анализа

E	Вид элементов в E	Размер-мер-ность	Норма в E $\|x\| =$	Скалярное произведение
$\boldsymbol{R}$	действительное число	1	$\lvert x\rvert$	$(x, y) = xy$
$\boldsymbol{C}$	комплексное число	1	$\lvert x\rvert$	$(x, y) = x\overline{y}$
$\boldsymbol{R}^n$	$(x_1,\dots,x_n)$, $x_i \in \boldsymbol{R}$	n	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$\boldsymbol{C}^n$	$(x_1,\dots,x_n)$, $x_i \in \boldsymbol{C}$	n	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$
$C[a,b]$	$x(t)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция	∞	$\max\limits_{a\le t\le b}\lvert x(t)\rvert$	–
$C^{(1)}[a,b]$	$x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция	∞	$\max\limits_{a\le t\le b}\lvert x(t)\rvert + \max\limits_{a\le t\le b}\lvert x'(t)\rvert$	–
l_2	$(x_1, x_2,\dots)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^2 < \infty$	∞	$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$	$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$
l_p	$(x_1, x_2,\dots)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p < \infty$	∞	$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p}$	–
l_∞	$(x_1, x_2,\dots)$ – огранич. последовательность	∞	$\sup\lvert x_i\rvert$	–
c	$(x_1, x_2,\dots)$, $\exists\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \infty$	∞	$\sup\lvert x_i\rvert$	–
c_0	$(x_1, x_2,\dots)$, $\exists\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$	∞	$\sup\lvert x_i\rvert$	–
$L_p[a,b]$	$x(t)$ – измеримая на $[a,b]$ функция и $\int_a^b\lvert x(t)\rvert^p\,dt < \infty$	∞	$\left(\int_a^b\lvert x(t)\rvert^p\,dt\right)^{1/p}$	$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$

Литература

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебное пособие для ун-тов по спец. «Математика» / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск: Изд-во «Университетское», 1984. – 351 с., ил.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 543 с., ил.

3. Мухин, В. В. Лабораторные работы по функциональному анализу для студентов специальности 2013: в 2 ч. Ч. 1 / В. В. Мухин, А. Р. Миротин, А. П. Старовойтов. – Гомель. 1987. – 65 с.

4. Мухин, В. В. Лабораторные работы по функциональному анализу для студентов специальности 2013: в 2 ч. Ч. 2 / В. В. Мухин, А. Р. Миротин, А. П. Старовойтов. – Гомель. 1987. – 67 с.

5. Садовничий, В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. – 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.

6. Функциональный анализ и интегральные уравнения : лабораторный практикум : учеб. пособие / А. Б. Антоневич [и др.]; под ред. А. Б. Антоневича и Я. В. Радыно. – Минск: БГУ, 2003. – 179 с.

Производственно-практическое издание

Старовойтов Александр Павлович,
Старовойтова Наталья Александровна,
Казимиров Григорий Николаевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Гильбертовы пространства, сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве, интегральные уравнения и преобразования Фурье

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 15.02.2016. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,3.
Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 25 экз. Заказ 106.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

**А. П. СТАРОВОЙТОВ, Н. А. СТАРОВОЙТОВА
Г. Н. КАЗИМИРОВ,**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Гильбертовы пространства, сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве, интегральные уравнения и преобразования Фурье

Гомель
2016