Е.М. Овсиюк[1], О.В. Веко[1], В.М. Редьков[2]

[1]УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь
[2]ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси, Минск, Беларусь

ПОЛУГРУППЫ МЮЛЛЕРА РАНГА 1 И 2

1. О параметризации линейной группы $GL(4, C)$

Известно, что в поляризационной оптике важнейшую роль играют матрицы Мюллера [1]. Важное подмножество матриц Мюллера образуют групповую структуру, изоморфную группе Лоренца [2]–[8]. Также имеется важный класс вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем, для описания последних невозможно использовать теоретико-групповые методы. Основная задача настоящей работы – сформулировать общий подход к исследованию вырожденных матриц

Мюллера и детально остановиться на описании некоторых множеств таких матриц.

Поскольку матрицы Мюллера – это вещественные 4×4-матрицы, действующие на вещественный 4-мерный вектор Стокса, то для исследования множества всех возможных матриц Мюллера можно использовать параметризацию 4-мерных матриц, получаемую на основе применения базиса матриц Дирака и развитую в работах [9]–[12]. Будем использовать спинорный базис. При этом произвольная 4-мерная матрица (с комплексными элементами) задается согласно

$$\begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\,\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\,\vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l}\,\vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m}\,\vec{\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & N \\ L & M \end{vmatrix}; \tag{1.1}$$

закон умножения представим в виде следующих соотношений:

$$k''_0 = k_0\,k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + n'_0\,l_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{l}, \qquad m''_0 = m_0\,m_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{m} + l'_0\,n_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{n},$$

$$n''_0 = k_0\,n_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{n} + n'_0\,m_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{m}, \qquad l''_0 = l_0\,k_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{k} + m'_0\,l_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{l},$$

$$\mathbf{k}'' = k'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\,k_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + n_0\,\mathbf{l} + \mathbf{n}'\,l_0 + i\,\mathbf{n}'\times\mathbf{l},$$

$$\mathbf{m}'' = m'_0\,\mathbf{m} + \mathbf{m}'\,m_0 + i\,\mathbf{m}'\times\mathbf{m} + l_0\,\mathbf{n} + \mathbf{l}'\,n_0 + i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}'' = k'_0\,\mathbf{n} + \mathbf{k}'\,n_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{n} + n_0\,\mathbf{m} + \mathbf{n}'\,m_0 + i\,\mathbf{n}'\times\mathbf{m},$$

$$\mathbf{l}'' = l'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{l}'\,k_0 + i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{k} + m_0\,\mathbf{l} + \mathbf{m}'\,l_0 + i\,\mathbf{m}'\times\mathbf{l}. \tag{1.2}$$

Чтобы получить множество вещественных матриц достаточно потребовать, чтобы компоненты параметров (k, m, l, n) с индексом 2 были чисто мнимыми, а все остальные компоненты были вещественными. Вырожденными матрицами Мюллера называют матрицы Мюллера с нулевым определителем; множества таких матрицам обладают структурой полугрупп (элементы множества можно перемножать, но обратные элементы не существуют). Среди вырожденных матриц Мюллера можно выделить подклассы, основываясь на понятии ранга матрицы: класс матриц с рангом 3, с рангом 2, с рангом 1. Ниже получим описание некоторых классов вырожденных матриц Мюллера с рангом 1 и 2.

2. Общий анализ возможных подмножеств в $GL(4.C)$

Предположим, что некоторые интересные подгруппы (или подмножества) матриц можно получить, накладывая на параметры матриц дополнительные условия линейной зависимости

$$A\,\mathbf{k} + B\,\mathbf{m} + C\,\mathbf{n} + D\,\mathbf{l} = 0, \qquad \alpha\,k_0 + \beta\,m_0 + s\,n_0 + t\,l_0 = 0. \tag{2.1}$$

В данной работе будут проанализированы некоторые возможности с одним независимым вектором (вариант **I(k)**):

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}, \qquad n_0 = \alpha\, k_0,$$
$$\mathbf{m} = B\,\mathbf{k}, \qquad m_0 = \beta\, k_0, \tag{2.2}$$
$$\mathbf{l} = D\,\mathbf{k}, \qquad l_0 = t\, k_0.$$

Можно рассматривать варианты, основанные на других векторах: **m, n, l**.

3. Один независимый вектор: вариант I(k)

Пусть

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k},\ \ \mathbf{m} = B\,\mathbf{k},\ \ \mathbf{l} = D\,\mathbf{k},\ \ n_0 = \alpha\, k_0,\ \ m_0 = \beta\, k_0,\ \ l_0 = t\, k_0. \tag{3.1}$$

Формулы умножения параметров (1.2) принимают вид

$$k_0 = k_0\, k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + \alpha t\; k'_0 k_0 + AD\,\mathbf{k}'\mathbf{k},$$
$$m''_0 = \beta^2\; k_0 k_0 + B^2\;\mathbf{k}'\,\mathbf{k} + t\alpha\; k'_0\, k_0 + DA\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k},$$
$$n_0 = \alpha\; k_0 k_0 + A\,\mathbf{k}'\mathbf{k} + \alpha\beta\; k'_0\, k_0 + AB\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k},$$
$$l_0 = t\; k_0\; k_0 + D\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k} + \beta t\; k'_0 k_0 + BD\,\mathbf{k}'\mathbf{k},$$
$$\mathbf{k}'' = k'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\, k_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + \alpha D\, k_0\,\mathbf{k} + A\alpha\,\mathbf{k}' k_0 + iAD\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k},$$
$$\mathbf{m}'' = \beta B\; k'_0\mathbf{k} + B\beta\,\mathbf{k}'\, k_0 + iB^2\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + tA\, k_0\mathbf{k} + D\alpha\,\mathbf{k}'\, k_0 + iDA\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n}'' = A\; k'_0\,\mathbf{k} + \alpha\;\mathbf{k}'\, k_0 + iA\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + \alpha B\, k_0\mathbf{k} + A\beta\,\mathbf{k}'\, k_0 + iAB\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k},$$
$$\mathbf{l}'' = t\; k'_0\mathbf{k} + D\,\mathbf{k}' k_0 + iD\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + \beta D\, k_0\;\mathbf{k} + Bt\,\mathbf{k}'\, k_0 + iBD\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k}.$$

Требуем выполнения соотношений (3.1) для штрихованных параметров, отсюда следует система уравнений

$$\alpha(1+\beta) = \alpha(1+\alpha t), \quad A(1+B) = \alpha(1+AD), \quad (\beta^2 + t\alpha) = \beta(1+\alpha t),$$
$$(B^2 + DA) = \beta(1+AD), \quad t(1+\beta) = t(1+\alpha t), \quad D(1+B) = t(1+AD),$$
$$(A+\alpha B) = A(1+\alpha D), \quad (\alpha + A\beta) = A(1+A\alpha), \quad A(1+B) = A(1+AD),$$
$$(\beta B + tA) = B(1+\alpha D), \quad (B\beta + D\alpha) = B(1+A\alpha), \quad (B^2 + AD) = B(1+AD),$$
$$(t+\beta D) = D(1+\alpha D), \quad (D+Bt) = D(1+A\alpha), \quad D(1+B) = D(1+AD). \tag{3.2}$$

Система (3.2) имеет, прежде всего, тривиальное решение:

$$A = B = D = 0, \qquad \alpha = \beta = t = 0,$$

этому отвечает <u>решение 1</u>

$$n = 0, \qquad m = 0, \qquad l = 0, \qquad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \tag{3.3a}$$

приводим выражение для вещественной матрицы Мюллера ранга 2 (учитываем $k_2 \Rightarrow ik_2$)

$$M=\begin{vmatrix} k_0+k_3 & k_1+k_2 & 0 & 0\\ k_1-k_2 & k_0-k_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}, \qquad \det M_{2\times 2}=k_0^2-k_1^2+k_2^2-k_3^2\,. \qquad (3.3b)$$

Требуя выполнения равенства $\det M_{2\times 2}=0$, приходим к 2-мерным матрицам Мюллера ранга 1.

Предположим теперь, что только четыре параметра равны нулю:

$$A=0,\ \alpha=0\,,\ D=0\,,\ t=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n=0,\ l=0\,,$$

$$\beta^2=\beta\,, \qquad B^2=\beta, \qquad \beta B=B\,, \qquad B^2=B,$$

откуда получаем $\beta=+1,\ B=+1$. Таким образом, имеем решение 2:

$$\mathbf{n}=0,\ \mathbf{l}=0,\ \mathbf{m}=+\,\mathbf{k}, \qquad n_0=0,\ l_0=0,\ m_0=+\,k_0, \qquad (3.4)$$

$$G=\begin{vmatrix} k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} & \\ 0 & k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma}\end{vmatrix}.$$

Теперь предполагаем, что все параметры $A,\ \alpha,\ D,\ t$ отличны от нуля. При этом уравнения (3.2) принимают вид (оставляем только независимые уравнения):

$$\beta=+\alpha t\,, \qquad A(1+B)=\alpha(1+AD)\,,$$

$$(\beta^2+t\alpha)=\beta(1+\alpha t)\,, \qquad (B^2+DA)=\beta(1+AD)\,,$$

$$D(1+B)=t(1+AD)\,,$$

$$B=AD\,, \qquad (\alpha+A\beta)=A(1+A\alpha)\,, \qquad B=AD\,,$$

$$(\beta B+tA)=B(1+\alpha D)\,, \qquad (B\beta+D\alpha)=B(1+A\alpha)\,, \qquad (B^2+AD)=B(1+AD)\,,$$

$$(t+\beta D)=D(1+\alpha D)\,, \quad (D+Bt)=D(1+A\alpha)\,, \quad B=AD\,. \qquad (3.5)$$

Исключим из уравнений B и β ($B=AD,\ \beta=\alpha t$):

$$A(1+AD)=\alpha(1+AD)\,, \qquad AD(1+AD)=\alpha t\,(1+AD)\,, \qquad D(1+AD)=t(1+AD)\,,$$

$$\alpha(1+At)=A(1+A\alpha)\,, \qquad t(1+\alpha D)=D(1+\alpha D)\,, \qquad \alpha(1+At)=A(1+A\alpha)\,,$$

$$t(1+\alpha D)=D(1+\alpha D)\,, \qquad t=\alpha\,. \qquad (3.6)$$

Исключим из этих равнений t ($B=AD,\ \beta=\alpha^2,\ \ t=\alpha$):

$$A(1+AD)=\alpha(1+AD)\,,\ AD(1+AD)=\alpha^2\,(1+AD)\,,\ D(1+AD)=\alpha(1+AD)\,,$$

$$\alpha(1+A\alpha)=A(1+A\alpha)\,, \qquad \alpha(1+\alpha D)=D(1+\alpha D)\,,$$

$$\alpha(1+A\alpha)=A(1+A\alpha)\,, \qquad \alpha(1+\alpha D)=D(1+\alpha D)\,. \qquad (3.7)$$

Пусть $1+AD\neq 0,$ тогда из (3.7) следует $\alpha = A,\ D = A,\ D=\alpha$. Таким образом, $\alpha = A,\ B = A^2,\ \beta = A^2,\ D = A,\ t = A$, и имеем решение 3

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{m} = A^2\,\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{l} = A\,\mathbf{k}\,,$$

$$n_0 = A\,k_0,\quad m_0 = A^2 k_0,\quad l_0 = A\,k_0, \qquad G = \begin{vmatrix} K & AK \\ AK & A^2K \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Это решение не интересно с групповой точки зрения, поскольку представляет множество вырожденных 4-мерных матриц с рангом 2. Эта возможность может быть интересна в контексте описания простейших вырожденных матриц Мюллера с рангом 2. При равенстве нулю определителя 2-мерного блока K имеем вырожденные 4-мерные матрицы ранга 1.

Теперь, пусть $1+AD=0,$ тогда из (3.7) следует

$$D = -\frac{1}{A}, \qquad (1-\frac{\alpha}{A})(1+A\alpha)=0\,, \qquad (1+A\alpha)(1-\frac{\alpha}{A})=0\,,$$

$$(1-\frac{\alpha}{A})(1+A\alpha)=0\,, \qquad (1+A\alpha)(1-\frac{\alpha}{A})=0\,.$$

Есть две возможности:

$$(1+A\alpha)=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{A}\,, \qquad (1-\frac{\alpha}{A})=0 \Rightarrow \alpha = A\,.$$

Соответственно получаем два решения.

Решение 4:

$$\alpha = -\frac{1}{A},\ D = -\frac{1}{A},\ t = -\frac{1}{A},\ B = -1\,,\ \beta = \frac{1}{A^2}\,,$$

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}\,, \qquad n_0 = -\frac{1}{A}\,k_0\,, \qquad \mathbf{m} = -\,\mathbf{k}\,, \qquad m_0 = \frac{1}{A^2}\,k_0\,,$$

$$\mathbf{l} = -\frac{1}{A}\,\mathbf{k}\,, l_0 = -\frac{1}{A}\,k_0\,, \qquad G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & -A^{-1}k_0 + A\mathbf{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma}) & A^{-2}k_0 - \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

Это вырожденные матрицы, поскольку строки 3 и 4 получаются из строк 1 и 2 умножением на $-A^{-1}$. Эта возможность также может быть интересна в контексте описания вырожденных матриц Мюллера с рангом 2 ($k_2 \Rightarrow ik_2$).

Решение 5:

$$\alpha = A,\ D = -\frac{1}{A},\quad t = A,\quad B=-1,\quad \beta = A^2,$$

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}\,, \qquad n_0 = A\,k_0\,, \qquad \mathbf{m} = -\,\mathbf{k}\,, \qquad m_0 = A^2\,k_0\,,$$

$$\mathbf{l} = -\frac{1}{A}\,\mathbf{k}\,, \quad l_0 = A\,k_0\,, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & A(k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma}) \\ Ak_0 - A^{-1}\mathbf{k}\vec{\sigma} & A^2k_0 - \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

Это вырожденные матрицы, поскольку столбцы 3 и 4 получаются из столбцов 1 и 2 умножением на A. Эта возможность может быть интересна в контексте описания вырожденных матриц Мюллера с рангом 2 ($k_2 \Rightarrow ik_2$).

Осталось исследовать случай двух равных нулю параметров. Пусть $\underline{A=0,\ \alpha=0}$:

$$\beta^2=\beta\,,\qquad B^2=\beta\,,\qquad t(1+\beta)=t\,,\qquad D(1+B)=t\,,$$
$$\beta B=B\,,\qquad B\beta=B\,,\qquad B^2=B\,,$$
$$t+\beta D=D\,,\qquad D+Bt=D\,,\qquad D(1+B)=D\,.$$

У этой системы есть два решения:

$$\{\,\beta=0\,,B=0\,,t=D\,\}\,;\qquad \{\,\beta=+1\,,B=+1\,,D=0\,,t=0\,\}\,.$$

Соответственно, получаем <u>решение 6:</u>

$$A=0,\ \alpha=0,\ \beta=0,\ B=0,\ t=D,\ \mathbf{n}=0,\ n_0=0,$$
$$\mathbf{m}=0\,,\qquad m_0=0\,,\qquad \mathbf{l}=D\,\mathbf{k}\,,\qquad l_0=D\,k_0\,,$$
$$G=\begin{vmatrix} K & 0\\ DK & 0\end{vmatrix},\qquad G'G=\begin{vmatrix} K' & 0\\ DK' & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix} K & 0\\ DK & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} K'K & 0\\ DK'K & 0\end{vmatrix}.$$

Это вырожденные матрицы, поскольку столбцы 3 и 4 нулевые. Эта возможность также может быть интересна в контексте описания простейших вырожденных матриц Мюллера с рангом 2. Второй вариант приводит к уже найденному решению 1. Теперь пусть $\underline{D=0,\ t=0}$:

$$\alpha\beta=0\,,\qquad A(1+B)=\alpha\,,\qquad \beta^2=\beta\,,\qquad B^2=\beta\,,$$
$$\alpha B=0\,,\qquad \alpha+A\beta=A(1+A\alpha)\,,\qquad AB=0\,,$$
$$\beta B=B\,,\qquad B\beta=B(1+A\alpha)\,,\qquad B^2=B\,.$$

Эта система приводит к уже найденным решениям (3.3) и (3.4).

4. О структуре полугруппы матриц Мюллера с рангом 1

Рассмотрим детально случай вырожденных матриц Мюллера с рангом 1. Исходим из явного выражения для вырожденной вещественной матрицы Мюллера ранга 2 (учитываем $k_2 \Rightarrow ik_2$)

$$M=\begin{vmatrix} k_0+k_3 & k_1+k_2 & 0 & 0\\ k_1-k_2 & k_0-k_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Если определитель 2-мерной матрицы равен нулю, то получаем вырожденную матрицу Мюллера ранга 1:

$$k_1-k_2=\mu(k_0+k_3)\,,\qquad k_0-k_3=\mu(k_1+k_2), \tag{4.2}$$

отсюда следуют равенства

$$k_1 = \frac{1+\mu^2}{2\mu} k_0 - \frac{1-\mu^2}{2\mu} k_3 , \qquad k_2 = \frac{1-\mu^2}{2\mu} k_0 - \frac{1+\mu^2}{2\mu} k_3 . \qquad (4.3)$$

Введем обозначения

$$k_0 + k_3 = A, \qquad k_0 - k_3 = B, \qquad (4.4)$$

тогда матрица Мюллера примет вид (следим за блоком 2×2)

$$M = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & \mu^{-1}(k_0 - k_3) \\ \mu(k_0 + k_3) & k_0 - k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mu^{-1} B \\ \mu A & B \end{vmatrix}. \qquad (4.5)$$

Общая матрица Мюллера из этого класса действует на 4-вектор Стокса согласно

$$S'_0 = AS_0 + \frac{B}{\mu} S_1, \qquad S'_1 = \mu A S_0 + BS_1,$$

$$(S'_0)^2 - (S'_1)^2 = A^2(1-\mu^2)\, S_0^2 + 2AB(\frac{1}{\mu} - \mu)\, S_0 S_1 + B^2(\frac{1}{\mu^2} - 1) S_1^2 . \qquad (4.6)$$

Заметим, что при этом выполняется равенство (свойство частично поляризованного света)

$$(S'_0)^2 - (S'_1)^2 = \left(A\sqrt{1-\mu^2}\ S_0 + B\,\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\, S_1 \right)^2 \geq 0 . \qquad (4.7)$$

Очевидно, что необходимо накладывать ограничение

$$\mu^2 \leq +1 . \qquad (4.8)$$

При $\mu = \pm 1$ получаем выполненным условие полной поляризации $(S'_0)^2 - (S'_1)^2 = 0$. Отметим, что из общих формул, в частности, следуют матрицы Мюллера для однородных идеальных линейных поляризаторов (см. [1, с. 318]):

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ \mu = \pm 1, \quad M = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (4.9)$$

Найдем закон умножения матриц вида (4.5):

$$\begin{vmatrix} A' & \mu'^{-1} B' \\ \mu' A' & B' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \mu^{-1} B \\ \mu A & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (A'A + \mu'^{-1} B' \mu A) & (A' \mu^{-1} B + \mu'^{-1} B' B) \\ (\mu' A' A + B' \mu A) & (\mu' A' \mu^{-1} B + B' B) \end{vmatrix}, \qquad (4.10)$$

т. е. $$A'' = A'A + \mu'^{-1} \mu\, B'A, \qquad B'' = \mu' \mu^{-1}\, A'B + B'B \qquad (4.11)$$

и

$$\mu'' = \frac{\mu' A' A + B' \mu A}{A' A + \mu'^{-1} \mu\, B' A} = \frac{\mu'^2\, A' A + \mu' \mu\, B' A}{\mu' A' A + \mu\, B' A} = \mu',$$

$$\mu''^{-1} = \frac{A' \mu^{-1} B + \mu'^{\,-1} B' B}{\mu' \mu^{-1}\, A' B + B' B} = \frac{\mu' A' B + \mu B' B}{\mu'^2\, A' B + \mu' \mu\, B' B} = \frac{\mu' A' A + \mu B' A}{\mu'^2\, A' A + \mu' \mu\, B' A} = \frac{1}{\mu'}. \quad (4.12)$$

Есть еще одно необходимое требование, которому должны удовлетворять матрицы Мюллера: знак нулевой компоненты 4-вектора Стокса не может быть отрицательным. Согласно (4.6) имеем

$$S'_0 = AS_0 + \frac{B}{\mu} S_1 \geq 0, \qquad S'_1 = \mu A S_0 + B S_1.$$

Очевидно, что это условие существенно зависит от свойств начального пучка. Например, если у начального пучка $S_1 > 0$, то выбирая положительными все три параметра

$$A > 0, \qquad B > 0, \qquad \mu > 0, \qquad (4.13)$$

мы не будем в результате последовательного комбинирования таких элементов выходить за пределы этого множества мюллеровских матриц, при этом всегда $S'_1 \geq 0$. В свою очередь, если у начального пучка $S_1 < 0$, то имеем два положительных параметра

$$A > 0, \qquad B > 0, \qquad \mu < 0, \qquad (4.14)$$

в результате последовательного комбинирования таких элементов мы не будем выходить за пределы этого множества мюллеровских матриц; при этом всегда $S'_1 \leq 0$. Т. е. есть два класса оптических элементов с плавно меняющими характеристиками A, B, μ. Матрицы Мюллера идеальных поляризаторов (4.9) являются представителями этих двух классов.

Понятно, что возможны два аналогичных варианта вырожденных матриц Мюллера с рангом 1, эффективно действующих на компонентах 4-векторов Стокса (S_0, S_2) и (S_0, S_3). Аналогичный дополнительный анализ необходим и для всех других множеств матриц Мюллера (вырожденных или нет). Например, симметричный рассмотренному вариант **I(m)** не представляет интереса в контексте формализма Мюллера, поскольку после действия таких матриц 4-вектор Стокса получался бы времени-подобным.

5. О структуре полугруппы матриц Мюллера с рангом 2.

Обратимся к

$$M=\begin{vmatrix} k_0+k_3 & k_1+k_2 & 0 & 0 \\ k_1-k_2 & k_0-k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad k_0^2-k_1^2+k_2^2-k_3^2\neq 0\,. \qquad (5.1)$$

Эта матрица действует на компоненты 4-вектора Стокса согласно

$$S'_0=(k_0+k_3)S_0+(k_1+k_2)S_1\,,\quad S'_1=(k_1-k_2)S_0+(k_0-k_3)S_1\,,\qquad (5.2)$$

$$S'^{\,2}_0-S'^{\,2}_1=(S_0^2-S_1^2)\,(k_0^2+k_3^2-k_1^2-k_2^2)+$$
$$+2S_0S_1\,(k_1k_2+k_0k_3)+4(S_0^2+S_1^2)\,(k_0k_2+k_1k_3)\,. \qquad (5.3)$$

С использованием обозначений

$$A=k_0^2+k_3^2-k_1^2-k_2^2\,,\ B=4(k_0k_2+k_1k_3)\,,\ C=(k_1k_2+k_0k_3)$$

предыдущее равенство принимает вид

$$S'^{\,2}_0-S'^{\,2}_1=(A+B)S_0^2+2CS_0S_1+(B-A)S_1^2. \qquad (5.4)$$

Полученное соотношение указывает на то, что не все матрицы этого множества могут рассматриваться как пригодные в качестве мюллеровских. Можно испробовать другой путь: в группе преобразований (5.2) есть три нетривиальные подгруппы, и довольно легко решить вопрос о пригодности этих подгрупп в качестве (2-мерных) мюллеровских.

Первая подгруппа:

$$(k_2=0,k_3=0)\qquad k_0=D\,\mathrm{ch}\,\beta,\qquad k_1=D\,\mathrm{sh}\,\beta\,,$$

$$S'_0=D\,\mathrm{ch}\,\beta S_0+D\,\mathrm{sh}\,\beta S_1,\qquad S'_1=D\,\mathrm{sh}\,\beta S_0+D\,\mathrm{ch}\,\beta S_1,$$

$$S'^{\,2}_0-S'^{\,2}_1=D^2(S_0^2-S_1^2)\,. \qquad (5.5)$$

Она вполне пригодна для описания 2-мерных мюллеровских матриц. Наиболее простой вариант подгруппы возникает при $D=+1$.

Вторая подгруппа:

$$(k_1=0,k_2=0)\qquad k_0=D\,\mathrm{ch}\,\lambda,\qquad k_3=D\,\mathrm{sh}\,\lambda\,,$$

$$S'_0=D\,(\mathrm{ch}\,\lambda+\mathrm{sh}\,\lambda)S_0=De^{+\lambda}S_0,\,S'_1=D\,(\mathrm{ch}-\mathrm{ch}\,\lambda)S_1=De^{-\lambda}S_1,$$

$$S'^{\,2}_0-S'^{\,2}_1=D^2(e^{+2\lambda}S_0^2-e^{-2\lambda}S_1^2)\,,(S_0^2\geq S_1^2)\,. \qquad (5.6a)$$

Эти матрицы пригодны для описания мюллеровских, хотя с довольно необычными свойствами (пусть для простоты определитель $D^2=+1$):

$$S'_0=e^{+\lambda}S_0,\quad S'_1=e^{-\lambda}S_1,\quad S'^{\,2}_0-S'^{\,2}_1=e^{+2\lambda}S_0^2-e^{-2\lambda}S_1^2,\quad (S_0^2\geq S_1^2);\ (5.6b)$$

при увеличении положительных λ интенсивность плавно растет, а степень поляризации плавно стремится к нулю. При отрицательных λ, но в пределах $e^{4\lambda}>S_1^2/S_0^2$, интенсивность света падает, а степень поляризации растет, достигая максимума при $e^{4\lambda} = S_1^2/S_0^2$. То есть матрицы с такой структурой пригодны для задания матриц Мюллера, только если

$$-\ln\left(\frac{S_0^2}{S_1^2}\right) \le \lambda < +\infty . \qquad (5.6c)$$

В общем случае ограничение (5.6c) не совместимо с глобальной структурой этой подгруппы. Действительно, закон умножения абелевый: $\lambda'' = \lambda' + \lambda$, и условие (5.6c) очевидно будет нарушаться при умножении (с отрицательными и достаточно большими по модулю значениями параметров) элементов этой группы. Однако очевидно, что существует вполне интерпретируемая подгруппа при всех $\lambda \in [0, +\infty)$, видимо именно ее здесь и можно рассматривать как представляющую интерес для поляризационной оптики. Третья подгруппа:

$$(k_1 = 0, k_3 = 0) \qquad k_0 = D\cos\alpha, k_2 = D\sin\alpha ,$$

$$S'_0 = D\,(\cos\alpha\; S_0 + \sin\alpha\; S_1)\,,\;\; S'_1 = D(-\sin\alpha\; S_0 + \cos\alpha\; S_1)\,,$$

$$S'^{\,2}_0 - S'^{\,2}_1 = D^2\left[\; (S_0^2 - S_1^2)\cos 2a + 2S_0 S_1 \sin 2a \;\right]. \qquad (5.9)$$

Это выражение может быть как положительным, так и отрицательным. Это указывает, что вся подгруппа в целом не может рассматриваться как пригодная для задания подгруппы матриц Мюллера. Кроме того, компонента S'_0 может быть как положительно, так и отрицательной, что также несовместимо с интерпретацией таких преобразований как мюллеровских.

Отметим, что в работе исследована только небольшая часть вырожденных матриц Мюллера в рамках структур полугрупп.

Литература

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения/ В.Н. Снопко. – Минск: Наука и техника, 1992. – 336 с.

2. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.

3. Бикватернионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 5. – С. 71–76.

4. Длугунович, В.А. Векторная параметризация преобразованной группы Лоренца и полярное разложение матриц Мюллера / В.А. Длугунович, Ю.А. Курочкин // Оптика и спектроскопия. – 2009. – Т. 107. – № 2. – С. 312–317.

5. Dlugunovich, V.A. The Polar Decomposition And Vector Parametrization Of The Mueller Matrices / V.A. Dlugunovich,

Yu. A. Kurochkin // AIP Conference Proceedings. – 2010. – Vol. 1205. – P. 65–71.

6. Редьков, В.М. Спинорный формализм группы Лоренца и поляризованный свет / В.М. Редьков // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика, математика. – 2010. – № 1. – С. 37–45.

7. Red'kov, V.M. Lorentz grpoup and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

8. Редьков, В.М. О нахождении матрицы Мюллера оптического элемента по результатам поляризационных экспериментов, теоретико-групповой анализ / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Оптика неоднородных структур – 2011: Материалы III Международной научно-практической конференции, г. Могилев, 16–17 февраля 2011 г. / УО «МГУ им. А.А. Кулешова»; редкол.: В.А. Карпенко (отв. редактор) [и др.]. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – С. 32–35.

9. Богуш, А.А. О четырехмерной векторной параметризации группы и некоторых ее подгрупп / А.А. Богуш, В.М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 57–63.

10. Bogush, A.A. On Unique parametrization of the linear group *GL(4.C)* and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11. – № 1. – P. 1–24.

11. Богуш, А.А. О вектор-параметрах 4-мерных матриц обратных преобразований в теории группы GL(4.C) / А.А. Богуш, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 3. – С. 64–69.

12. Red'kov, V.M. On Parametrization of the Linear *GL(4,C)* and Unitary *SU(4)* Groups in Terms of Dirac Matrices / V.M. Red'kov, A.A. Bogush, N.G. Tokarevskaya // SIGMA. – 2008. – Vol. 4. – 021. – 46 p.