

ТЕОРИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФРЕНЕЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАНСПАРАНТОВ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

А. П. Смирнов

Представлена теория формирования изображений Френеля периодических транспарантов произвольной структуры. Выводы теории согласуются с имеющимися в литературе результатами экспериментальных исследований.

Периодические дифракционные картины, возникающие в пространстве за периодическим транспарантом при освещении его когерентным светом, исследовались в работах [1, 2] и были названы в [2] изображениями Френеля. Эти изображения в общем случае отличаются от объекта (транспаранта) как периодом, так и структурой, но в некоторых плоскостях наблюдения они являются точными копиями объекта (в этом частном случае их называют изображениями Фурье). В работе [1] исследовались изображения Френеля двумерных ортогональных периодических транспарантов неограниченных размеров, а в работе [2] класс исследуемых транспарантов был расширен, но все еще оставался ограниченным с помощью условия, которое будет рассмотрено ниже. Целью данного сообщения было теоретическое исследование закономерностей, описывающих изображения Френеля двумерных транспарантов с произвольной периодической структурой.

Пусть на периодический транспарант T , расположенный в плоскости OXY декартовой системы координат (рис. 1), падает плоская волна с волновым вектором \mathbf{k} , нормальным к плоскости транспаранта. В плоскости $Z = Z_n$, где установлен экран \mathcal{E} , наблюдаются изображения Френеля. Функция амплитудного пропускания $t(\mathbf{x})$ произвольного периодического транспаранта может быть описана с помощью свертки функции пропускания элементарной ячейки $g(\mathbf{x})$ с функцией решетки $\varphi(\mathbf{x})$

$$t(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \oplus \varphi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \equiv (x, y)$, а знак \oplus обозначает операцию двумерной свертки. Функция решетки

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \delta[\mathbf{x} - (n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2)] \quad (2)$$

имеет ненулевые значения только в узлах решетки и описывается с помощью базисных векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 с углом между ними γ . Чтобы записать выражение для амплитуды поля в изображении Френеля, наблюдаемого в плоскости $Z = Z_n$, воспользуемся выражением для импульсной характеристики свободного пространства, которая в параболическом приближении сферических волновых фронтов [3] имеет вид

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ikz_n)}{i\lambda z_n} \exp\left(i \frac{\pi \mathbf{x}^2}{\lambda z_n}\right). \quad (3)$$

С учетом (1) и (3) амплитуда поля в изображении Френеля запишется так:

$$U(x) = \frac{1}{\lambda z_H} g(x) \oplus \varphi(x) \oplus \exp\left(i \frac{\pi x^2}{\lambda z_H}\right). \quad (4)$$

Экспоненциальный множитель в этом выражении опущен, так как при регистрации интенсивности его можно не учитывать. Выполнив преобразование Фурье над выражением (4), получим пространственный спектр изображения Френеля

$$\hat{U}(v) = \hat{g}(v) \hat{\varphi}(v) \exp(-i\pi\lambda z_H v^2), \quad (5)$$

где знак $\hat{}$ над функцией обозначает преобразование Фурье этой функции.

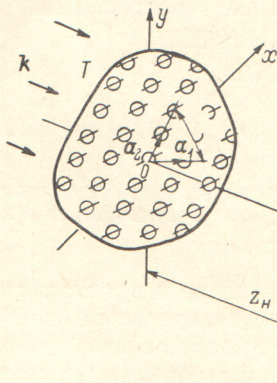


Рис. 1. Схема наблюдения изображений Френеля. Т — периодический транспарант, Э — экран наблюдения.

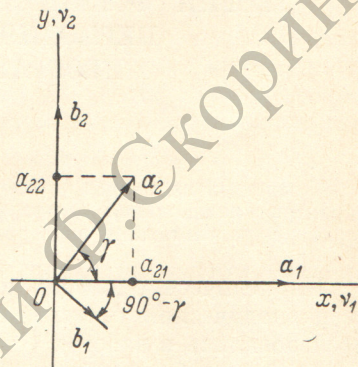


Рис. 2. Взаимное положение базисных векторов a_1 и a_2 прямой и базисных векторов b_1 и b_2 сопряженной решетки.

Определим спектр Фурье решетки $\varphi(x)$. Из (2) имеем

$$\hat{\varphi}(v) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi n_1 a_1 v) \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi n_2 a_2 v). \quad (6)$$

Если воспользоваться равенством [4]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi n x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(ax - n), \quad (7)$$

то для определения узлов решетки $\hat{\varphi}(v)$ из (6) получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 v &= a_{11} v_1 + a_{12} v_2 = n_1, \\ a_2 v &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 = n_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где n_1 и n_2 — целые. С учетом выбранной системы координат (рис. 2) решение запишется в виде: $v_1 = \frac{n_1}{a_1}$, $v_2 = n_2 \left(\frac{1}{a_2 \sin \gamma} - \frac{1}{a_1 \tan \gamma} \right)$. Образует пару векторов $b_1 = \frac{1}{a_1 \sin \gamma} (\sin \gamma, -\cos \gamma)$, $b_2 = \frac{1}{a_2 \sin \gamma} (0, 1)$, таких что $(v_1, v_2) = n_1 b_1 + n_2 b_2$. Очевидно, что векторы b_1 и b_2 являются базисными векторами решетки $\hat{\varphi}(v)$. Таким образом, базисные вектора прямой решетки и сопряженной связаны следующим образом:

$$b_i = \frac{1}{a_i \sin \gamma}, \quad a_i b_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая тот факт, что функция $\hat{\varphi}(v)$ дискрента, т. е. отлична от нуля только в узлах решетки, (5) можно представить в виде

$$\hat{U}(v) = \mu \hat{g}(v) \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \delta[v - (n_1 b_1 + n_2 b_2)] \exp[-i\pi\lambda z_H (n_1 b_2 + n_2 b_1)^2], \quad (10)$$

где $\mu = |\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|$ — нормирующий коэффициент. Раскрывая квадрат в экспоненциальном множителе, с учетом связи между базисными векторами (9), выражение (10) можно переписать так:

$$U(\mathbf{v}) = \mu \hat{g}(\mathbf{v}) \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \delta[\mathbf{v} - (n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2) \exp[-i2\pi p (n_1^2 N_1^2 + n_2^2 N_2^2 - 2n_1 n_2 N_1 N_2 \cos \gamma)]], \quad (11)$$

где расстояние до плоскости наблюдения $z_{\text{н}}$ выражено в единицах p , таких что

$$z_{\text{н}} = p \frac{2N_1 N_2 a_1 a_2 \sin^2 \gamma}{\lambda}, \quad (12)$$

где N_1 и N_2 — целые, такие что $N_1 a_1 = N_2 a_2$. Назовем такую единицу измерения расстояний единицей Фурье, так как, если структура транспаранта удовлетворяет условию

$$2N_1 N_2 \cos \gamma = n, \quad \text{где } n \text{ — целое число}, \quad (13)$$

то в плоскостях наблюдения с целым числом единиц Фурье будут находиться изображения Фурье.

Это заключение с очевидностью вытекает из (11), так как в этом случае при любых n_1 и n_2 степени экспонент в (11) окажутся кратными 2π , и спектр изображения Фурье совпадает со спектром самого объекта. Поэтому при выполнении условия (13) плоскости локализации p -го изображения Фурье (при целом p) находятся из (12). Условие (13), как уже упоминалось выше, ограничивает класс рассматриваемых в работе [2] транспарантов до таких, с помощью которых можно получить изображение Фурье в каждой плоскости с целым числом единиц Фурье. Для произвольной периодической структуры транспаранта величину $2N_1 N_2 \cos \gamma$ можно представить в виде дроби t/r , где t и r — целые не имеющие общих делителей числа. Нетрудно видеть, что условие саморепродукции периодического транспаранта будет выполнено через каждые r единиц Фурье или, что то же, расстояния между соседними изображениями Фурье возрастут в r раз.

Теперь рассмотрим изображения Френеля. Представим величину p , характеризующую расстояние до плоскости наблюдения в единицах Фурье, в виде $p' + s/m$, где p' — целое кратное r число, а дробь s/m такова, что s/mr — правильная дробь, тогда из (11) следует, что при анализе изображений Френеля достаточно ограничиться значениями $p = s/m$, т. е. изображения Френеля будут повторяться с шагом r единиц Фурье, так же как и изображения Фурье. С учетом введенных обозначений функция (обозначим ее через $\chi(\mathbf{v})$), выраженная в (11) через двойную сумму и представляющая собой произведение когерентной передаточной функции свободного пространства на спектр функции решетки, примет вид

$$\chi(\mathbf{v}) = \mu \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \delta[\mathbf{v} - (n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2)] \exp \times \\ \times \left[-i2\pi \frac{s}{rm} (rn_1^2 N_1^2 + rn_2^2 N_2^2 - tn_1 n_2) \right]. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что $\chi(\mathbf{v})$ — функция периодическая с периодом $c(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$, где $c = rm$, если rm — нечетное число и $c = rm/2$, если rm и t — четные числа. Такую функцию можно представить в виде ряда Фурье, и, если учесть, что за период у такой функции c^2 ненулевых значений, то ряд Фурье, записанный в каждой дискретной точке периода $\mathbf{v} = l_1 \mathbf{b}_1 + l_2 \mathbf{b}_2$, где $l_1, l_2 = 1, 2, \dots, c$, будет иметь вид системы из c^2 уравнений

$$\sum_{k_1=1}^c \sum_{k_2=1}^c C_{k_1 k_2} \exp \left[i \frac{2\pi}{c} (l_1 k_1 + l_2 k_2) \right] = \exp \left[-i2\pi \frac{s}{rm} (rl_1^2 N_1^2 + rl_2^2 N_2^2 - tl_1 l_2) \right], \quad (15)$$

справедливых в силу периодичности функции $\chi(\mathbf{v})$ при любых значениях l_1 и l_2 . Поэтому, подставив (15) в (14) и выполнив обратное преобразование

Фурье, запишем амплитуду изображения Френеля в плоскости наблюдения $p = s/m$ в виде

$$U(x) = \sum_{k_1=1}^c \sum_{k_2=1}^c C_{k_1 k_2} t \left[x - \frac{1}{c} (k_1 a_1 + k_2 a_2) \right]. \quad (16)$$

Сравнивая модуль функции $f(v)$, выраженной через ряд Фурье и ряд δ -функций, нетрудно показать, что абсолютные величины коэффициентов $C_{k_1 k_2}$ равны между собой и равны $1/c$, т. е. корню квадратному из числа коэффициентов. Например, для одномерного случая из (14) и (15), рассмотрев модуль функции $\kappa(v)$, получим равенство

$$b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - nb) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \exp\left(i2\pi n \frac{v}{cb}\right), \quad (17)$$

справедливое в силу тождества (7), если $|C_n|^2 = 1/c$. Таким образом, изображение Френеля представляет собой, как это следует из (16), сумму сдвинутых на $1/c$ периода исходной функции пропускания транспаранта. Если линейные размеры элементарной ячейки транспаранта $g(x)$ меньше величины сдвига, то изображение Френеля есть в c раз размноженное изображение самого транспаранта, у которого угол между базисными векторами $\gamma = 90^\circ$, и, следовательно, нужно положить $t=0$ и $r=1$. В этом частном случае функция $\kappa(v)$ распадается в произведение функций $\kappa(v_1)\kappa(v_2)$, периодических с периодами mb_i ($i=1, 2$) соответственно при m нечетном и с периодами $(1/2)mb_i$ при m четном. Последнее утверждение при $m/2$, равном нечетному числу, справедливо с точностью до множителя -1 , так как в этом случае $\kappa(v_i + m/2 b_i) = -\kappa(v_i)$. Однако если $\kappa(v_i)$ представить в виде разности двух mb_i -периодических функций $\kappa_1(v_i) - \kappa_1(v_i + mb_i/2)$, совпадающих с $\kappa(v_i)$ на полпериоде и равных нулю на второй половине периода, то при разложении $\kappa(v_i)$ в ряд Фурье по периоду mb_i нетрудно видеть, что все нечетные коэффициенты равны нулю, а четные удваиваются. В изображении Френеля это приводит к удвоению периода и к дополнительному сдвигу изображения на $1/m$ периода. Так, если $m=2$, то изображение Френеля ортогональных или одномерных транспарантов, как следует из вышесказанного, есть сдвинутое на полпериода саморепродуцированное изображение транспаранта. Этот факт был отмечен в работе [1] и экспериментально подтвержден в работе [5]. Чтобы найти выражение для коэффициентов $C_{k_1 k_2}$, достаточно каждое уравнение в (15) умножить на $\exp[-i2\pi(k_1 l_1 + k_2 l_2)]$ и просуммировать по l_1 и l_2

$$C_{k_1 k_2} = \frac{1}{c^2} \sum_{l_1=1}^c \sum_{l_2=1}^c \exp\left\{-i2\pi\left[\frac{s}{rm}(rl_1^2 N_1^2 + rl_2^2 N_2^2 - l_1 l_2 t) - \frac{1}{c}(k_1 l_1 + k_2 l_2)\right]\right\}. \quad (18)$$

Как уже отмечалось, фазы коэффициентов при отсутствии перекрытия смещенных составляющих изображений не влияют на изображение Френеля, в противном случае изображение Френеля усложняется фазовыми взаимодействиями. Однако если присутствует когерентный фон, т. е. пропускание транспаранта везде отлично от нуля, то фазовые взаимодействия отдельных составляющих изображений неизбежны. В этом случае происходит перераспределение энергии между элементарными размноженными изображениями исходного транспаранта. Для иллюстрации рассмотрим пример изображения Френеля одномерной решетки с шагом, в 12 раз большим, чем ширина штриха (данный транспарант исследовался в работе [6], где влияние когерентного фона изучалось экспериментально). В плоскости наблюдения $p = 1/3$ единиц Фурье, согласно изложенной теории, изображение Френеля будет представлять собой размноженное с коэффициентом 4 изображение исходного транспаранта, каждый штрих которого в отсутствие когерентного фона имеет одинаковую интенсивность. Коэффициенты C_k ($k=1, 2, 3, 4$) представлены графически на рис. 3, на котором также изображена исходная решетка и соответствующие

изображения Френеля. При наличии когерентного фона интенсивности штрихов уже не будут равны друг другу. Относительная интенсивность штрихов показана на рис. 3, в, из которого видно, что при фоне $\eta=0.1$ второй штрих в два раза слабее соседних штрихов. Это согласуется с результатами работы [6]. На рис. 4 показано влияние когерентного фона на взаимное перераспределение интенсивности штрихов при различных уровнях фона. Из графика видно, что, например, при фоне $\eta=0.26$ второй штрих сливается с фоном, а при еще больших значениях фона наблюдается отрицательный контраст.

Таким образом, в данной работе рассмотрены закономерности формирования

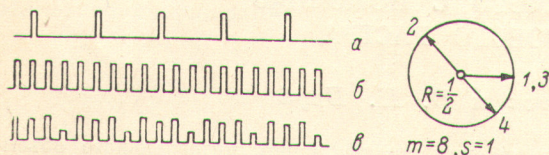


Рис. 3. Изображения Френеля одномерной решетки (а) в отсутствии когерентного фона (б) и с когерентным фоном $\eta=0.1$ (в).

Коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 изображены в виде векторов, концы которых лежат на окружности радиуса $R=1/2$ в комплексной плоскости и расположены соответственно в точках 1, 2, 3 и 4.

изображений Френеля периодических транспарантов произвольной структуры. Представленная теория позволила снять имеющиеся в работе [2] ограничения, сформулированные в виде целочисленного уравнения (13), которое сводило область исследуемых транспарантов к дискретной совокупности периодических структур. На основе представленной теории получены соотношения, определяющие коэффициент размножения изображений, зависящий не только от положения плоскости наблюдения, но и от структурного коэффициента, равного $2N_1N_2 \cos \gamma$, а также показано, что интенсивности размноженных изображений в отсутствие когерентного фона и перекрытия составляющих изображений равны друг другу, а наличие когерентного фона приводит к перераспределению энергии между отдельными элементарными изображениями вплоть до снижения интенсивности некоторых из них до и ниже уровня фона.

Автор благодарит А. Д. Гальперна и Ю. Н. Денисюка за полезные обсуждения и критические замечания.

Литература

- [1] J. M. Cowley, A. F. Moodie. Proc. Phys. Soc., B70, 486, 1957.
- [2] J. T. Winthrop, G. R. Worhington. J. Opt. Soc. Am., 55, 373, 1965.
- [3] В. А. Зверев. Радиооптика. «Советское радио», М., 1975.
- [4] Л. М. Сороко. Основы голографии и когерентной оптики. «Наука», М., 1975.
- [5] Ю. Н. Денисюк, Н. М. Рамишвили, В. В. Чавчанидзе. Опт. и спектр., 30, вып. 6, 1130, 1971.
- [6] G. L. Rogers. Brit. J. Appl. Phys., 14, 657-663.

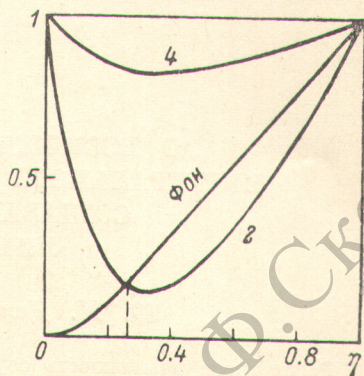


Рис. 4. Зависимость относительной интенсивности штрихов и когерентного фона в изображении Френеля ($p=1/8$) одномерной решетки при различных уровнях фона η в исходной решетке.

Интенсивности четвертого штриха (верхняя кривая) и второго штриха (нижняя кривая) отнесены к интенсивности первого и третьего штрихов, имеющих равную интенсивность. Монотонно растущая кривая характеризует относительный уровень фона в изображении Френеля.

Поступило в Редакцию 29 октября 1976 г.