

УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ПО ФАЗОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.В. Вареникова

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия

ON SOLUTIONS OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM FOR ONE NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A QUADRATIC AT PHASE VARIABLES RIGHT-HAND SIDE

E.V. Varenikova

I.G. Petrovski Briansk State University, Novozybkov, Russia

В работе рассматривается система вида $\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $\dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$, где $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ – непрерывные функции; a и b – постоянные. Для нее установлены условия, при которых эта система имеет линейную отражающую функцию Мироненко и, значит, линейное отображение за период $[-\omega; \omega]$. Полученные условия позволяют указать начальные данные решений двухточечной краевой задачи $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ и, значит, начальные данные 2ω -периодических решений рассматриваемой системы в том случае, когда ее коэффициенты 2ω -периодические непрерывные функции.

Ключевые слова: отражающая функция Мироненко, отображение за период, краевая задача, периодические решения.

In the paper we consider the system $\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $\dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$, where $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ are the continued functions; a and b are the constants. For this system we established conditions under which this system has a linear Mironenko reflecting function and therefore a linear mapping in period $[-\omega; \omega]$. The obtained conditions allow us point out the initial data of the solutions of the two-point boundary task $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ and therefore, the initial data of the 2ω -periodic solutions of the system (1) in the case when its coefficients are 2ω periodic continued functions.

Keywords: reflective function Mironenko, in-period transformation, boundary problem, periodic solutions.

Введение

Исследование многомерных дифференциальных систем связано со значительными математическими трудностями. Начало их систематическому исследованию положили А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов. Их методы до сих пор являются основными при качественном исследовании систем дифференциальных уравнений. Применение этих методов в каждом конкретном случае наталкивается на огромные трудности. Это вынуждает исследователей искать другие пути, облегчающие работу по изучению свойств решений дифференциальных систем.

Два десятилетия назад Мироненко В.И. предложил новый метод – метод отражающей функции. С его помощью удается находить начальные данные периодических решений периодических дифференциальных систем и исследовать эти решения на устойчивость. Конкретные примеры такого исследования можно найти как в [1] так и в [2], а также в работах других исследователей. Это прежде всего работы [3]–[9], а

также работы [10]–[11], в которых предложен новый подход к использованию понятия отражающей функции.

1 Основные положения теории отражающей функции

Приведем здесь основные положения теории отражающей функции необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Для каждой дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности с общим решением в форме Коши $\varphi(t; t_0, x_0)$ отражающая функция $F(t, x)$ определяется формулой $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$. Такое определение позволяет сразу заметить, что в том случае, когда система (1.1) 2ω -периодична, отображение $x \mapsto F(-\omega, x)$ является отображением А. Пуанкаре (отображением за период $[-\omega; \omega]$).

Функция $F(t, x)$ является отражающей функцией системы (1.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \\ F(0, x) \equiv x. \quad (1.2)$$

Основные применения отражающей функции основаны на том, что эта функция по состоянию системы $x(t)$ позволяет найти состояние $x(-t) \equiv F(t, x(t))$. Это свойство позволяет при известной отражающей функции $F(t, x)$ находить начальные данные краевой задачи $\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0$ из конечного уравнения $\Phi(x(\omega), F(\omega, x(\omega))) = 0$, а значит находить и начальные данные 2ω -периодических решений и определять характер их устойчивости (подробнее см. по этому поводу [1]) для 2ω -периодических систем (1.1).

2 Отражающая функция квадратичной системы

В работе рассматривается система вида

$$\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \quad (2.1)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ – непрерывные функции; a и b – постоянные.

Используя основное соотношение для отражающей функции (1.2) для системы (2.1) установлены условия

$$a_{20} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - b_{20} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{20} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{a}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{02} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{11} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - b_{11} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \\ - \bar{a}_{20} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{a}_{11} \cos 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{02} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{02} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - b_{02} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{20} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \bar{a}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{02} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{20} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + b_{20} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau +$$

$$+ \bar{b}_{20} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{b}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{02} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{11} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + b_{11} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \\ - \bar{b}_{20} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{b}_{11} \cos 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{02} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{02} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + b_{02} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{20} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \bar{b}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{02} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \quad (2.2)$$

при которых эта система имеет такую же отражающую функцию, что и линейная система

$$\dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = -bx + ay,$$

и, значит, линейное отображение за период $[-\omega; \omega]$.

Полученные условия позволяют указать начальные данные решений двухточечной краевой задачи $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ и, значит, начальные данные 2ω -периодических решений рассматриваемой системы в том случае, когда ее коэффициенты 2ω -периодические непрерывные функции.

Теорема 2.1. Пусть для системы (2.1) с непрерывными коэффициентами выполнены условия (2.2). Тогда для краевой задачи (2.1) и

$$a_1 x(\omega) + a_2 y(\omega) + a_3 x(-\omega) + a_4 y(-\omega) = c_1, \\ b_1 x(\omega) + b_2 y(\omega) + b_3 x(-\omega) + b_4 y(-\omega) = c_2, \quad (2.3)$$

верны следующие положения:

1. Если число

$$D := (a_1 b_2 + a_3 b_4 - a_2 b_1 - a_4 b_3) + \\ + (a_3 b_1 + a_4 b_3 - a_1 b_3 - a_2 b_4) \times \\ \times e^{-2 \int_0^\omega a_q(\tau) d\tau} \sin 2 \int_0^\omega b_q(\tau) d\tau + \\ + (a_1 b_4 + a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_4 b_1) \times \\ \times e^{-2 \int_0^\omega a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^\omega b_q(\tau) d\tau \neq 0,$$

то краевая задача (2.3) имеет единственное решение, начинающееся при $t = \omega$ в точке $(x(\omega), y(\omega))$, удовлетворяющей системе алгебраических уравнений

$$M \cdot x(\omega) + N \cdot y(\omega) = c_1, \\ P \cdot x(\omega) + Q \cdot y(\omega) = c_2, \quad (2.4)$$

где числа

$$\begin{aligned}
 M &:= a_1 + a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ a_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau, \\
 N &:= a_2 - a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ a_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau, \\
 P &:= b_1 + b_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ b_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau, \\
 Q &:= b_2 - b_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ b_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

(если только это решение продолжимо на $[-\omega, \omega]$). Если же это решение не продолжимо на $[-\omega, \omega]$, то задача (2.3) для системы (2.1) решений не имеет).

2. Если число $D = 0$ и

$$\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} \neq \frac{c_2}{c_1}, \quad (2.5)$$

то краевая задача (2.3) не имеет решений.

3. если число $D = 0$ и

$$\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} = \frac{c_2}{c_1} \quad (2.6)$$

то краевая задача (2.3) имеет бесконечно много решений, причем при $t = \omega$ множество начальных данных $(x(\omega), y(\omega))$ этих решений находится на прямой

$$M \cdot x(\omega) + N \cdot y(\omega) = c_1.$$

4. Если $M = N = P = Q = c_1 = c_2 = 0$, то краевая задача (2.3) имеет своими решениями все решения системы (2.1) продолжимые на $[-\omega, \omega]$.

Доказательство. Ранее было доказано [12], что продолжимое на $[-\omega; \omega]$ решение $(x(t), y(t))$ системы (2.1) будет удовлетворять условию

$$\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$$

тогда и только тогда, когда начальная точка $(x(\omega), y(\omega))$ этого решения удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
 &\Phi(x(\omega), y(\omega), F_1(\omega, x(\omega), y(\omega)), \\
 &F_2(\omega, x(\omega), y(\omega))) = 0.
 \end{aligned}$$

В нашем случае F_1 и F_2 определяются соотношениями

$$F(t, x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} F_1(t, x(t), y(t)) \\ F_2(t, x(t), y(t)) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{-2\int_0^t a_y(\tau) d\tau} \left(x \cos 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau - y \sin 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau \right) \\ e^{-2\int_0^t a_y(\tau) d\tau} \left(x \sin 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau + y \cos 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau \right) \end{pmatrix}.$$

Поэтому предыдущее условие примет вид

$$\begin{aligned}
 &\Phi \left(x(\omega), y(\omega), e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \left(x(\omega) \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - y(\omega) \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \left(x(\omega) \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + y(\omega) \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Учтем теперь, что в нашем случае функция Φ определяется соотношениями (2.3). Поэтому решение $(x(t), y(t))$ будет удовлетворять нужным краевым условиям тогда и только тогда, когда $x(\omega), y(\omega)$ удовлетворяют системе (2.4).

Запишем ее в виде:

$$A \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$,

Найдём определитель матрицы A :

$$\det A = M \cdot Q - N \cdot P =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(a_1 + a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + a_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) \times \\
 &\times \left(b_2 - b_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + b_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) - \\
 &- \left(a_2 - a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ a_4 e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau \right) \times \\ &\times \left(\begin{aligned} &b_1 + b_3 e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau + \\ &+ b_4 e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \sin 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau \end{aligned} \right).$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \det A = &(a_1 b_2 + a_3 b_4 - a_2 b_1 - a_4 b_3) + \\ &+ (a_3 b_1 + a_4 b_3 - a_1 b_3 - a_2 b_4) e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \sin 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau + \\ &+ (a_1 b_4 + a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_4 b_1) e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как $D := \det A$, то система (2.4) будет иметь единственное решение если $D \neq 0$. Если же $D = 0$, то при выполнении условий (2.5) система не имеет решений, а при выполнении условий (2.6) существует бесконечное множество решений. В случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $c_1 = c_2 = 0$, система (2.3) вырождается в тождество.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. МIRONENKO. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.
2. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. МIRONENKO. – Гомель : УО «ГГУ» им. Ф.Скорины», 2004. – 196 с.
3. Musafirov, E.V. Differential systems, the mapping over period for which is represented by a

product of three exponential matrixes / E.V. Musafirov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 329. – P. 647–654.

4. Musafirov, E.V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.

5. Zhou, Zhengxin. On the Poincare mapping and periodic solutions of nonautonomous differential systems / Zhengxin Zhou // Commun. Pure Appl. Anal. – 2007. – Vol. 6, № 2. – P. 541–547.

6. Zhang, Shanlin. On the equivalence of the Abel equation / Shanlin Zhang, Zhengxin Zhou // Ann. Differ. Equations. – 2006. – Vol. 22, № 3. – P. 461–466.

7. Zhou, Zhengxin. Stability of differential systems / Zhengxin Zhou // Appl. Math., Ser. B (Engl. Ed.). – 2006. – Vol. 21, № 3. – P. 327–334.

8. Zhou, Zhengxin. On the reflective function of polynomial differential system / Zhengxin Zhou // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 278, № 1. – P. 18–26.

9. Zhou, Zhengxin. The nonlinear reflective function of differential system / Zhengxin Zhou, Yuexin Yan // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2003. – Vol. 53, № 6 (A). – P. 733–741.

10. МIRONENKO, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. МIRONENKO, В.В. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.

11. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.

12. Вареникова, Е.В. Отражающая функция и решения двухточечных краевых задач для неавтономных двумерных дифференциальных систем / Е.В. Вареникова // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т.48, №1. – С. 143–147.

Поступила в редакцию 02.09.13.