Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

**А. П. СТАРОВОЙТОВ, Г. Н. КАЗИМИРОВ,
Ж. Н. КУЛЬБАКОВА**

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практическое пособие

для студентов математических специальностей

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015

УДК 517.53/.55(076.1)
ББК 22. 161.55я73
С773

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков,
доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Семенчук

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Старовойтов, А. П.
С773 Теория функций комплексного переменного: практическое пособие / А. П. Старовойтов, Г. Н. Казимиров, Ж. Н. Кульбакова ; М-во образования Республики Беларусь, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 42 с.
ISBN 978-985-577-077-1

Практическое пособие разработано в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Экономическая кибернетика». В пособии содержится материал по темам «Комплексные числа», «Функции комплексного переменного», «Интеграл функции комплексного переменного», «Ряды Тейлора и Лорана», «Элементы теории вычетов».

Адресовано студентам математического факультета.

УДК 517.53/.55(076.1)
ББК 22. 161.55я73

ISBN 978-985-577-077-1

Оглавление

Предисловие

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) в рамках университетской программы является продолжением дисциплины «Математический анализ». Её идеи и результаты проникли во многие другие математические дисциплины (алгебраическую топологию, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения математической физики, функциональный анализ теорию вероятностей, вычислительную математику и др.). Данное обстоятельство определило обязательность изучения курса ТФКП на всех естественно-математических факультетах университетов.

Среди всех математических дисциплин ТФКП обладает одной ярко выраженной особенностью методического характера: относительная легкость формального усвоения теоретического материала сочетается с серьёзными трудностями в овладении конкретными методами комплексного анализа. Эти трудности проявляются особенно зримо в процессе решения конкретных задач на практических занятиях и при выполнении домашних заданий.

Данное пособие имеет своей целью помочь студентам в овладении практическими навыками в применении методов ТФКП. Согласно программе определён перечень тем практических занятий по данному курсу, составляющих ядро этой дисциплины, необходимое как для овладения дополнительными знаниями по математике, так и для будущей работы в научно-производственной сфере и педагогической деятельности. В пособии рассматривается значительная часть этой тематики.

Практическое пособие содержит материал по наиболее важным разделам курса. Он состоит из семи самостоятельных тем, каждая из которых кроме перечня понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела, содержит базовый массив задач для аудиторной, домашней и самостоятельной работы. В каждой теме представлены типичные задачи и приводятся их подробные решения. Наличие подробных решений наиболее важных (с точки зрения усвоения теоретического материала) задач, на наш взгляд, будет способствовать активизации самостоятельной работы студентов и успешному выполнению ими домашних заданий по каждой теме.

Тема 1
Комплексные числа: модуль, аргумент, различные формы представления

Необходимые понятия и теоремы: алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел, геометрическое изображение комплексных чисел, сопряженные комплексные числа, формула корня n-й степени, комплексная плоскость как метрическое пространство.

Задачи

1.1 Упростить данное выражение. Полученное комплексное число записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

1) $\dfrac{6-2i}{1-2i}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{-i}$; 3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}i}$; 4) $\dfrac{7+2i}{4-14i}$;
5) $\dfrac{-10-2i}{2+3i}$; 6) $\dfrac{i+\sqrt{3}}{3i}$; 7) $\dfrac{9+3i}{i-2}$; 8) $\dfrac{2-2i}{1+i}$;
9) $\dfrac{3i-\sqrt{3}}{i}$; 10) $\dfrac{8i-4\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$.

1.2 Решить уравнение $z^n + a = 0$. Изобразить на плоскости полученные корни уравнения.

1) $n=3$, $a=-i$;
2) $n=4$, $a=2i$;
3) $n=2$, $a=(3+i)(-2+2i)$;
4) $n=3$, $a=8i$;
5) $n=4$, $a=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$;
6) $n=6$, $a=1$;
7) $n=2$, $a=\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$;
8) $n=3$, $a=1-i\sqrt{3}$;
9) $n=4$, $a=2+i2\sqrt{3}$;
10) $n=5$, $a=i$.

1.3 Дано число z. Изобразить на плоскости числа z и $\overline{z}$.

1) $(1+i)^6/8$;
6) $(-3+\sqrt{3}i)^4/144$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^5$;

3) $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7$;

4) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^4$;

5) $(-1+i)^6\cdot i$;

7) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{-2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^5$;

8) $\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

9) $\dfrac{\sqrt{2}(1+i)^7}{(-1+i)^6}$;

10) $\dfrac{36\sqrt{2}(\sqrt{3}-i)^5}{(3+\sqrt{3}i)^4}$.

1.4 Выяснить, какие множества на комплексной плоскости определяются следующими соотношениями. Сделать чертеж.

1) $1<|z-3+2i|<2$, $0<\operatorname{Im}(iz)<1$, $z^2+(\bar{z})^2=1$;
2) $2\le|z-2i|\le 4$, $\operatorname{Re}(2iz-1)>1$, $\operatorname{Im}(i+z)=|z|$;
3) $|z+2-i|\le 1$, $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$, $|z-2|=|1-2\bar{z}|$;
4) $1/2\le|z+1+i|\le 3/2$, $\operatorname{Im}(iz+2i)<0$, $\operatorname{Re}(1+z)=|z|$;
5) $|z-1-i|>2$, $\operatorname{Im}\dfrac{z-2}{z+1}=0$, $\operatorname{Re}(z^2-\bar{z})=0$;
6) $|z+3i-2|=1$, $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+2}=0$, $|z-1|=|z-i|$;
7) $|z+4-i|<1$, $\operatorname{Re}z^2=1$, $z\cdot\bar{z}+i(z-\bar{z})-2=0$;
8) $|z+2-2i|=2$, $\operatorname{Im}z^2=1$, $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2-\bar{z}}\right)=2-\operatorname{Im}z$;
9) $1<|z-2+2i|\le 2$, $\operatorname{Im}1/(\bar{z})=0,25$, $|z|=\operatorname{Re}z+1$;
10) $|z+i-1|\ge 1$, $\operatorname{Im}1/z=-1/2$, $2z\cdot\bar{z}+(2+i)z+(2-i)\bar{z}=2$.

Образцы решения типовых задач

1 Упростить выражение $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$. Полученное комплексное число записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Решение. Упростим данное выражение:

$$\frac{-1+5i}{3-2i}=\frac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\frac{-13+13i}{13}=-1+i.$$

Получили число $z=-1+i$. Это алгебраическая форма числа.

Обозначим $a=\operatorname{Re} z=-1$, $b=\operatorname{Im} z=1$. Тогда

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Так как $a<0, b>0$, то

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi=\operatorname{arctg}(-1)+\pi=(-\pi/4)+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z=|z|\cdot(\cos\arg z+i\sin\arg z)=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)).$$

В показательной форме

$$z=|z|\cdot e^{i\arg z}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

2 Решить уравнение $z^n+a=0$. Изобразить на плоскости полученные корни уравнения, если

$$n=4,\quad a=i\sqrt{8}-\sqrt{8}.$$

Решение. Решим уравнение $z^4+i\sqrt{8}-\sqrt{8}=0$,

$$z^4=\sqrt{8}-i\sqrt{8},\; z=\sqrt[4]{\sqrt{8}-i\sqrt{8}}.$$

Воспользуемся формулой n-й степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z+2\pi k}{n}},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

В данном случае $\left|\sqrt{8}-i\sqrt{8}\right|=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$,

$$\arg\left(\sqrt{8}-i\sqrt{8}\right)=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Данное уравнение имеет 4 корня:

$$z_1=\sqrt[4]{4}\cdot e^{i\frac{-\pi/4}{4}}=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{16}i},$$

$$z_2=\sqrt[4]{4}\cdot e^{i\frac{-\pi/4+2\pi}{4}}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{16}i},$$

$$z_3=\sqrt[4]{4}\cdot e^{i\frac{-\pi/4+4\pi}{4}}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{15\pi}{16}i},$$

$$z_4=\sqrt[4]{4}\cdot e^{i\frac{-\pi/4+6\pi}{4}}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{23\pi}{16}i}=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{9\pi}{16}i}.$$

Изобразим все корни уравнения на плоскости (рисунок 1).

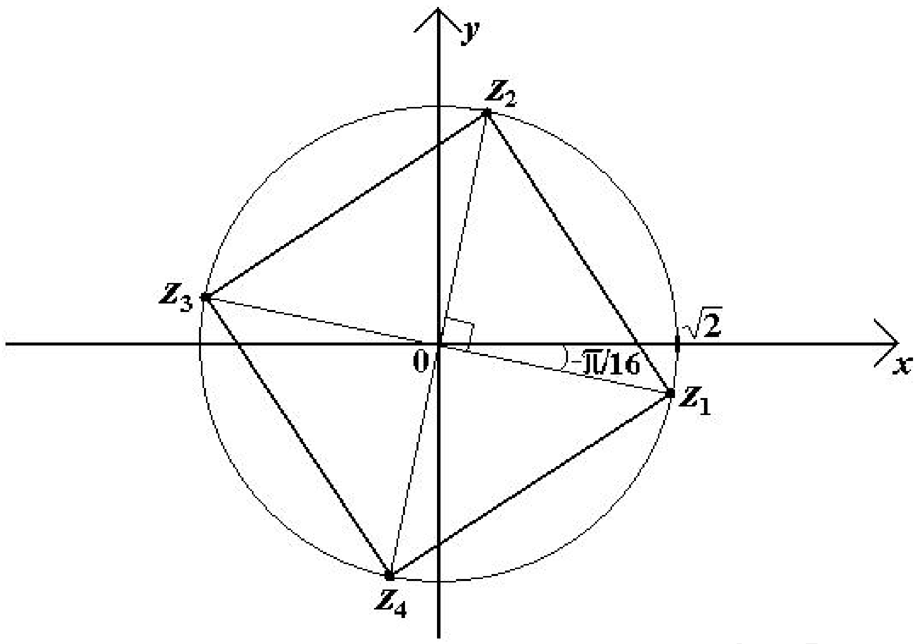

Рисунок 1 − Изображение корней уравнения

3 Дано число $z=(1-i)^5$. Изобразить на плоскости числа z и $\bar{z}$.

Решение. Воспользуемся формулой $z^n=|z|^n\cdot e^{in\arg z}$. Найдем модуль и аргумент числа $1-i$.

$$|1-i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \arg(1-i)=arctg(-1)=-\pi/4.$$

Значит, $(1-i)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Тогда $\bar{z}=4\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$. Изобразим числа z и $\bar{z}$ на комплексной плоскости (рисунок 2).

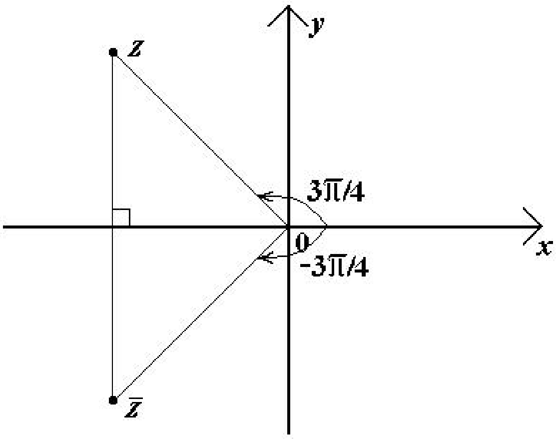

Рисунок 2 − Изображение точек z и $\bar{z}$

4 Выяснить, какие множества на комплексной плоскости определяются следующими соотношениями:

а) $|z+1-2i|\geq 1$; б) $\operatorname{Im}\left(\bar{z}\right)^2=2$; в) $|z-i|+|z+i|=4$.

Решение. а) Так как $|z+1-2i|$ есть расстояние между точками z и $-1+2i$, то данному неравенству удовлетворяют все точки плоскости, находящиеся от точки $-1+2i$ на расстоянии, большем или равном 1. Значит, данное соотношение определяет внешность круга радиуса 1 с центром в точке $-1+2i$ (рисунок 3).

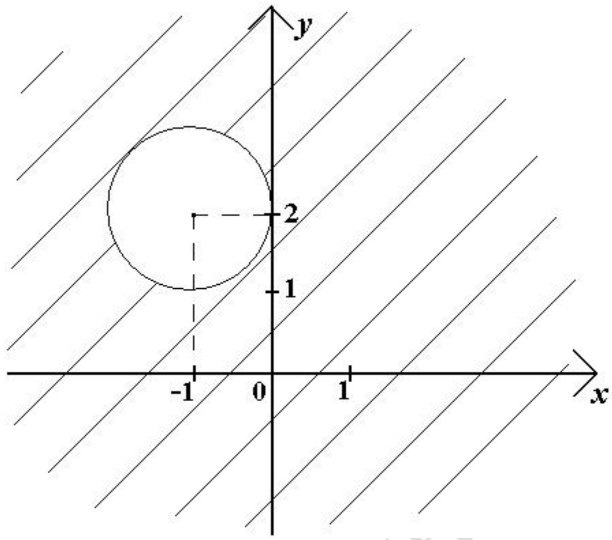

Рисунок 3 − Внешность круга $B(-1+2i;1)$

б) Пусть $z = x+iy$. Тогда

$$\left(\overline{z}\right)^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi,\ \operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)^2 = -2xy.$$

Значит, равенство $\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)^2 = 2$ определяет гиперболу $-2xy = 2$, т. е.

$$y = -\frac{1}{x}.$$

в) Заметим, что левая часть равенства $|z-i| + |z+i| = 4$ представляет собой сумму расстояний от точки z до точек i и $-i$. Эта сумма постоянна и равна 4. По определению, это эллипс с фокусами в точках i и $-i$ и большой осью, равной 4. Найдем явное задание этой кривой.

Пусть $z = x+iy$. Тогда $z \pm i = z + i(y \pm 1)$. Данное равенство примет вид:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4.$$

Перенесем один из корней из левой части в правую, далее возведем обе части полученного равенства в квадрат. После преобразований получим равенство $4x^2+3y^2=12$ или $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Таким образом, данное соотношение определяет эллипс $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Тема 2
Функции комплексного переменного

Необходимые понятия и теоремы: функция комплексного переменного, дифференцируемость функции комплексного переменного, условия Коши-Римана, критерий дифференцируемости в точке, аналитические функции комплексного переменного, критерий аналитичности функции в области, гармонические функции.

Задачи

2.1 Найти $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$.

1) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$;
2) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$;
3) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{z}$;
4) $f(z)=z\operatorname{Re} z$;
5) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$;
6) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$;
7) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{z}$;
8) $f(z)=z\operatorname{Im} z$;
9) $f(z)=e^z$;
10) $f(z)=z^2+zi$

2.2 Найти множество точек на плоскости, в которых данные функции являются дифференцируемыми, аналитичными.

1) $f(z)=z^2-zi$, $g(z)=z^2+\overline{z}$;
2) $f(z)=iz^2+2z$, $g(z)=3\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z$;
3) $f(z)=\cos z$, $g(z)=z+i|z|$;
4) $f(z)=z^2+zi$, $g(z)=|z|^2+2z$;
5) $f(z)=\dfrac{i}{z}$, $g(z)=z\cdot\operatorname{Re} z$;
6) $f(z)=e^z$, $g(z)=z^2\cdot\overline{z}$;
7) $f(z)=ze^z$, $g(z)=z^2\cdot\operatorname{Im} z$;
8) $f(z)=\sin(iz)$, $g(z)=2\operatorname{Re} z^2+i\operatorname{Im} z^2$;

9) $f(z)=e^{iz}$, $g(z)=z\cdot \operatorname{Im}\bar{z}$;

10) $f(z)=e^{z^2}$, $g(z)=z^2-3\bar{z}.$

2.3 Восстановить аналитическую функцию по ее действительной или мнимой части, если ее значение в точке z_0 равно w_0.

1) $u(x,y)=3x^2y-y^3$, $z_0=1$, $w_0=4i$;
2) $u(x,y)=\sin x\operatorname{sh} y$, $z_0=0$, $w_0=4i$;
3) $v(x,y)=x^2-y^2$, $z_0=i$, $w_0=-i$;
4) $u(x,y)=x^2-y^2+2x$, $z_0=i$, $w_0=-1+2i$;
5) $v(x,y)=e^x\sin y$, $z_0=2\pi i$, $w_0=0$;
6) $v(x,y)=x+3y-1$, $z_0=1+i$, $w_0=2+3i$;
7) $u(x,y)=e^x\cos y$, $z_0=-\pi i$, $w_0=-1+3i$;
8) $u(x,y)=y^2-x^2+2y$, $z_0=1+i$, $w_0=2-2i$;
9) $u(x,y)=4x-y+1$, $z_0=1-i$, $w_0=6+5i$;
10) $v(x,y)=\cos x\operatorname{ch} y$, $z_0=0$, $w_0=2+i.$

Образцы решения типовых задач

1 Найти $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$, если $f(z)=z^2-3iz+4$.

Решение. Пусть $z=x+iy$.
Тогда $f(x+iy)=(x+iy)^2-3i(x+iy)+4=$
$=x^2+2xyi-y^2-3xi+3y+4=\left(x^2-y^2+3y+4\right)+i\left(2xy-3x\right).$
Итак, $\operatorname{Re} f=x^2-y^2+3y+4$, $\operatorname{Im} f=2xy-3x$.

2 Найти множество точек на плоскости, в которых функция $f(z)$ является дифференцируемой, аналитичной, если

$$f(z)=z^2+2\left(\operatorname{Im} z\right)^2.$$

Решение. Найдем сначала $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. Пусть $z=x+iy$. Тогда
$f(x+iy)=(x+iy)^2+2y^2=x^2+2xyi-y^2+2y^2=x^2+y^2+2xyi$,

$$\operatorname{Re} f=u=x^2+y^2,\ \operatorname{Im} f=v=2xy.$$

Функции u и v дифференцируемы во всей комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, поскольку имеют непрерывные частные производные. Проверим выполнение условий Коши-Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Ясно, что условия Коши-Римана выполняются в точках вида

$$z = x + i \cdot 0, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Значит, $f(z)$ дифференцируема только в точках $z \in \boldsymbol{R}$.

Функция $f(z)$ не является аналитичной ни в одной точке из $\boldsymbol{C}$, так как ни для одной точки из $\boldsymbol{C}$ не существует ни одной окрестности этой точки, в которой бы выполнялись условия Коши-Римана.

3 Восстановить аналитическую функцию по ее действительной или мнимой части, если ее значение в точке z_0 равно w_0,

$$u(x, y) = 2x + 3y - 4, \quad z_0 = i, \quad w_0 = 4i - 6.$$

Решение. Так как искомая функция является аналитической, то для нее должны выполняться условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 3. \qquad (1)$$

Проинтегрировав первое из равенств (1) по y, получим

$$v(x, y) = 2y + c(x),$$

где $c(x)$ − некоторая функция, зависящая только от x.

Учитывая второе из равенств (1), получим

$$c'(x) = -3, \quad c(x) = -3x + C, \; C = \mathrm{const}.$$

Значит, $v(x, y) = 2y - 3x + C$.

Получили, что $f(x, y) = 2x + 3y - 4 + i(2y - 3x + C)$.

По условию, $f(i) = 4i - 6$. Подставим в выражение для $f(x, y)$ значения $x = 0$, $y = 1$, получим

$$f(i) = 3i - 4 + i(2i + C) = 3i - 4 - 2 + iC = -6 + (3 + C)i,$$

$$-6 + (3 + C)i = 4i - 6, \; 3 + C = 4, \; C = 1.$$

Итак, $f(x, y) = 2x + 3y - 4 + i(2y - 3x + 1)$.

Заметим, что $f(x, y) = 2(x + iy) - 3i(x + iy) - 4 + i$, т. е.

$$f(z) = (2 - 3i)z - 4 + i.$$

Тема 3
Конформные отображения элементарными функциями

Необходимые понятия и теоремы: конформное отображение, дробно-линейная функция, определения функций e^z, $\mathrm{Ln} z$, $\sin z$, $\cos z$, конформные отображения, задаваемые элементарными функциями.

Задачи

3.1 Для отображения $w = f(z)$ найти: а) точки комплексной плоскости ***C***, в которых отображение является конформным, б) угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке z_0.

1) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 1$;
2) $f(z) = z^3, \quad z_0 = i$;
3) $f(z) = z^2 + 1, \quad z_0 = -i$;
4) $f(z) = z^2 + 2z, \quad z_0 = i$;
5) $f(z) = iz^2, \quad z_0 = -i$;
6) $f(z) = e^z, \quad z_0 = i$;
7) $f(z) = e^{2z}, \quad z_0 = -i$;
8) $f(z) = e^z + z, \quad z_0 = i$;
9) $f(z) = e^z + 1, \quad z_0 = -1$;
10) $f(z) = e^{2z} - z, \quad z_0 = -i$.

3.2 Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, переводящую точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3, и определить, во что переходит при этом отображении область D.

1) $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = i; \quad w_1 = 0, w_2 = 2i, w_3 = 1 + i$;
$D = \{ z \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}$;
2) $z_1 = -i, z_2 = 0, z_3 = 1; \quad w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1$;
$D = \{ z \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$;
3) $z_1 = -i, z_2 = 1, z_3 = 1 - i; \quad w_1 = 1, w_2 = \infty, w_3 = -i$;
$D = \{ z \mid \mathrm{Re}\, z > 1 \}$;
4) $z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = -i; \quad w_1 = \infty, w_2 = 1, w_3 = i$;
$D = \{ z \mid \mathrm{Im}\, z < 0 \}$;
5) $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = i; \quad w_1 = i, w_2 = 1, w_3 = -1$;
$D = \{ z \mid \mathrm{Re}\, z > -1 \}$;

6) $z_1 = i,\ z_2 = -1,\ z_3 = \infty$; $w_1 = \infty,\ w_2 = 1,\ w_3 = i$;
$D = \{z \mid |z| < 1\}$;

7) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = i$; $w_1 = -1,\ w_2 = i,\ w_3 = 1$;
$D = \{z \mid |z-1| < 2\}$;

8) $z_1 = 2,\ z_2 = 0,\ z_3 = -2$; $w_1 = \infty,\ w_2 = 1,\ w_3 = 0$;
$D = \{z \mid |z+1| < 1\}$;

9) $z_1 = i,\ z_2 = \infty,\ z_3 = -1$; $w_1 = 1,\ w_2 = \infty,\ w_3 = 0$;
$D = \{z \mid |z| > 1\}$;

10) $z_1 = i,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1$; $w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$;
$D = \{z \mid |z-1| > 1\}$.

3.3 Решить уравнение.

1) $\sin z = \sqrt{5}$;
2) $\cos z = -\sqrt{10}$;
3) $\sin z = -2\sqrt{2}\,i$;
4) $\cos z = 2\sqrt{6}\,i$;
5) $\sin z = \sqrt{10}$;
6) $\cos z = 2\sqrt{2}\,i$;
7) $\sin z = -\sqrt{3}\,i$;
8) $\cos z = -\sqrt{5}$;
9) $\sin z = -2\sqrt{6}\,i$;
10) $\cos z = \sqrt{3}\,i$.

3.4 Найти отображение $w = f(z)$, взаимно-однозначно и конформно отображающее область D в плоскости z на область G в плоскости w.

1) $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$;
2) $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$, $G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$;
3) $D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Im} w > 0\}$;
4) $D = \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Im} w > 0\}$;
5) $D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Re} w > 0\}$;
6) $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Re} w > 0\}$;
7) $D = \{z \mid |z| < 1\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Re} w > 0\}$;
8) $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Im} w > 0\}$;
9) $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, $G = \{z \mid \operatorname{Im} w > 0,\ \operatorname{Re} w > 0\}$;
10) $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, $G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$.

Образцы решения типовых задач

1 Для отображения $w = f(z)$ найти: 1) точки комплексной плоскости **C**, в которых отображение является конформным, 2) угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке z_0, если

$$f(z) = ze^z, \ z_0 = i.$$

Решение. Функция $f(z) = ze^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости и задает конформное отображение во всех точках z плоскости **C**, в которых $f'(z) \neq 0$. Здесь $f'(z) = e^z(1+z)$. Поскольку $e^z \neq 0$, то $f'(z) = 0$ только при $z = -1$. Итак, отображение $f(z) = ze^z$ является конформным во всех точках комплексной плоскости **C**, кроме точки $z = -1$.

Угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке z_0 при отображении $f(z)$ находятся соответственно по формулам:

$$\alpha = \arg f'(z_0), \quad k = \left| f'(z_0) \right|.$$

В нашем случае $f'(z_0) = f'(i) = e^i(1+i) = e^i\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}e^{i(1+\pi/4)}$.

Поэтому $\alpha = 1 + \pi/4$, $k = \sqrt{2}$.

2 Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, переводящую точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3, и определить, во что переходит при этом отображении область D, если

$$z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1; \quad w_1 = \infty, w_2 = 1, w_3 = 0;$$

$$D = \left\{ z \,\middle|\, \operatorname{Re} z < 1 \right\}.$$

Решение. Дробно-линейное преобразование, переводящее точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3, однозначно определяется формулой:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \qquad (2)$$

Поскольку $w_1 = \infty$, то, переходя к пределу при $w_1 \to \infty$ в формуле (2), получим

$$\frac{w_3 - w_2}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Теперь, подставляя указанные точки, получим

$$\frac{-1}{w-1}=\frac{z+1}{z}\cdot\frac{1}{2},\quad w-1=\frac{-2z}{z+1},\quad w=1-\frac{2z}{z+1}=\frac{-z+1}{z+1}.$$

В силу конформности дробно-линейной функции во всей расширенной плоскости и принципа соответствия границ при конформном отображении, дробно-линейная функция $w=\dfrac{-z+1}{z+1}$ взаимно-однозначно отображает границу области D на границу области $w(D)$. Область D изображена на рисунке 4. Границей D является прямая $\operatorname{Re} z=1$. Найдем образ этой прямой.

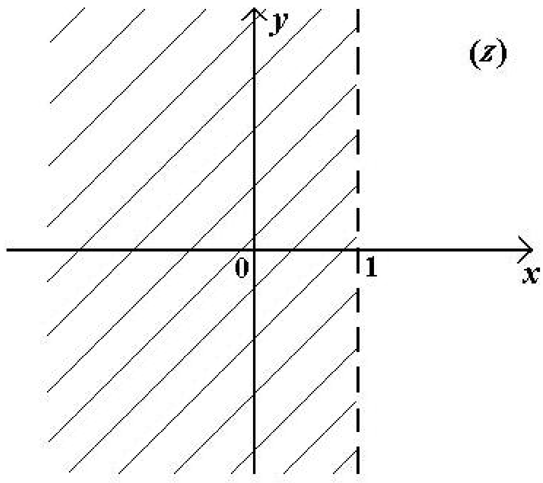

Рисунок 4 − Область D

В силу кругового свойства дробно-линейного отображения, образом любой окружности или прямой является окружность или прямая. Возьмем три различные точки прямой $\operatorname{Re} z=1$, например, $z_1=1, z_2=1-i, z_3=1+i$. Тогда

$$w_1=w(z_1)=0,\ w_2=w(z_2)=-1/5+i\,2/5,\ w_3=w(z_3)=-1/5-i\,2/5.$$

Точки w_1, w_2, w_3 не лежат на одной прямой. Значит, образом прямой $\operatorname{Re} z=1$ является окружность, проходящая через точки w_1, w_2, w_3. Найдем уравнение этой окружности в виде:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

где (x_0, y_0) − центр окружности, R − радиус.

Подставляя в это уравнение координаты точек w_1, w_2, w_3, получим систему

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=R^2 \\ \left(-1/5-x_0\right)^2+\left(2/5-y_0\right)^2=R^2 \\ \left(-1/5-x_0\right)^2+\left(2/5+y_0\right)^2=R^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = R^2 \\ (-1/5 - x_0)^2 + (2/5 - y_0)^2 = R^2 \\ (2/5 + y_0)^2 - (2/5 - y_0)^2 = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $x_0 = -1/2$, $y_0 = 0$, $R = 1/2$.

Итак, образом прямой $\operatorname{Re} z = 1$ является окружность $|z + 1/2| = 1/2$.

Пользуясь принципом взаимно-однозначного соответствия, заключаем, что образом внутренности области *D* будет внутренность или внешность круга $|z + 1/2| \le 1/2$. Возьмем любую точку внутри области *D*, например, точку $z' = 0$. Тогда $w(z') = 1$ принадлежит внешности круга $|z + 1/2| \le 1/2$. Следовательно, при отображении $w = \dfrac{-z+1}{z+1}$ область *D* перейдет во внешность круга $|z + 1/2| \le 1/2$, т. е. во множество $|z + 1/2| > 1/2$ (рисунок 5).

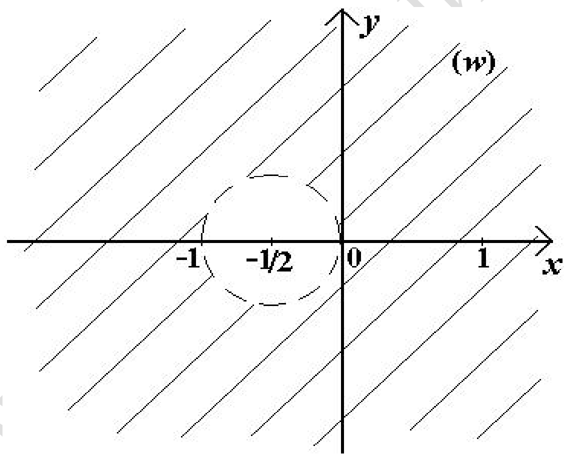

Рисунок 5 − Образ области *D*

3 Решить уравнение $\sin z + \cos z = \sqrt{6}$.

Решение. Так как $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, то данное уравнение принимает вид:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sqrt{6} \quad \text{или} \quad e^{iz} - e^{-iz} + i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 2\sqrt{6}\, i.$$

Обозначим $t = e^{iz}$, тогда

$$t - \frac{1}{t} + i\left(t + \frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{6}\, i,$$

$$t^2-1+i\left(t^2+1\right)-2\sqrt{6}\,i\cdot t=0.$$

Получили квадратное уравнение $t^2(1+i)-2\sqrt{6}\,i\cdot t-1+i=0$.

$$D=(-2\sqrt{6}\,i)^2-4(1+i)(-1+i)=-24+4\cdot 2=-16,\quad \sqrt{D}=\pm 4i.$$

$$t_1=\frac{2\sqrt{6}\,i+4i}{2(1+i)}=\frac{i(\sqrt{6}+2)(1-i)}{2}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}\cdot(1+i),$$

$$t_2=\frac{2\sqrt{6}\,i-4i}{2(1+i)}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}\cdot(1+i).$$

Таким образом, $e^{iz}=\dfrac{\sqrt{6}\pm 2}{2}\cdot(1+i)$, отсюда

$$iz=\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{6}\pm 2}{2}(1+i)\right)=\ln\left|\frac{\sqrt{6}\pm 2}{2}(1+i)\right|+i\arg\left(\frac{\sqrt{6}\pm 2}{2}(1+i)\right)+i2\pi k=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{6}\pm 2}{\sqrt{2}}+\frac{i\pi}{4}+i2\pi k=\ln(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})+\frac{i\pi}{4}+i2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

Окончательно получаем, что $z=-i\ln(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})+\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$.

4 Найти отображение $w=f(z)$, взаимно-однозначно и конформно отображающее область D в плоскости z на область G в плоскости w, если

$$D=\left\{z\,\middle|\,-\pi/2<\mathrm{Im}\,z<\pi/2\right\},\quad G=\left\{z\,\middle|\,|w|<1\right\}.$$

Решение. Отобразим сначала полосу $\left\{z\,\middle|\,-\pi/2<\mathrm{Im}\,z<\pi/2\right\}$ на правую полуплоскость. Для этого рассмотрим отображение $w^1(z)=e^z$. Границей области D являются прямые $\mathrm{Im}\,z=\pm\pi/2$. На прямой $\mathrm{Im}\,z=\pi/2$ $z=x+i\pi/2$. На образе прямой $\mathrm{Im}\,z=\pi/2$ имеем

$$w^1(z)=e^{x+i\pi/2}=e^x e^{i\pi/2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Т. е. образом прямой $\mathrm{Im}\,z=\pi/2$ является луч $\left\{\mathrm{Re}\,w^1=0,\,\mathrm{Im}\,w^1>0\right\}$. Аналогично получаем, что образом прямой $\mathrm{Im}\,z=-\pi/2$ является луч $\left\{\mathrm{Re}\,w^1=0,\,\mathrm{Im}\,w^1<0\right\}$. Отсюда заключаем, что образом границы (в расширенной комплексной плоскости) области D является мнимая ось. Считая, что граница области D ориентирована так, что при её обходе область D остается слева, в силу критерия однолистности функции в области, заключаем, что функция $w^1(z)=e^z$ взаимно-однозначно и конформно отображает область D в правую полуплоскость.

Для отображения правой полуплоскости $\operatorname{Re} w^1 > 0$ на круг $|w| < 1$ воспользуемся дробно-линейным отображением. Возьмем три различные точки прямой $\operatorname{Re} w^1 = 0$, например,

$$w_1^1 = i,\ w_2^1 = 0,\ w_3^1 = -i,$$

и три различные точки окружности $|w| = 1$, например,

$$w_1 = 1,\ w_2 = i,\ w_3 = -1.$$

Заметим, что при переходе от одной точки к другой вдоль контуров внутренние части обеих областей остаются слева.

Дробно-линейное отображение, переводящее точки w_1^1, w_2^1, w_3^1 соответственно в точки w_1, w_2, w_3, будет иметь вид:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{w^1 - w_1^1}{w^1 - w_2^1} : \frac{w_3^1 - w_1^1}{w_3^1 - w_2^1}.$$

Подставляя сюда выбранные точки, получим:

$$\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{w^1 - i}{w^1 - 0} : \frac{-i-i}{-i},$$

$$\frac{w-1}{w-i} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{w^1 - i}{2w^1}, \quad \frac{w-1}{w-i} = \frac{w^1 - i}{w^1(1+i)}.$$

Выразим из этого равенства w:

$$\frac{w - i + i - 1}{w - i} = \frac{w^1 - i}{w^1(1+i)}, \text{ тогда } 1 + \frac{i-1}{w-i} = \frac{w^1 - i}{w^1 + iw^1},$$

$$\frac{i-1}{w-i} = \frac{w^1 - i}{w^1 + iw^1} - 1 = \frac{-i - iw^1}{w^1 + iw^1} = \frac{1 + w^1}{iw^1 - w^1},$$

$$w - i = \frac{(i-1)(iw^1 - w^1)}{1 + w^1} = \frac{-2iw^1}{1 + w^1}.$$

Отсюда $w = \dfrac{-2iw^1}{1+w^1} + i = \dfrac{-2iw^1 + i + iw^1}{1+w^1} = \dfrac{-iw^1 + i}{1+w^1}$.

Итак, в силу критерия однолистности, функция $w(w^1) = \dfrac{-iw^1 + i}{1 + w^1}$ взаимно-однозначно и конформно отображает область $\operatorname{Re} w^1 > 0$ на область $|w| < 1$. Искомое же отображение $w(z)$ есть композиция отображений $w^1(z)$ и $w(w^1)$, т. е. $w(z) = \dfrac{-ie^z + i}{1 + e^z}$.

Тема 4
Интегралы. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Формула Коши для производных

Необходимые понятия и теоремы: интегралы от функции комплексного переменного, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши, интегральная формула Коши для производных.

Задачи

4.1 Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ от заданной функции $f(z)$ по указанной кривой γ.

1) $f(z) = \operatorname{Re} z$, γ − радиус-вектор точки $z = 2 + i$;
2) $f(z) = \operatorname{Im} z$, γ − радиус-вектор точки $z = 2 - i$;
3) $f(z) = |z|$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 2,\ 0 \le \arg z \le \pi \}$, начало в точке $z = 2$;
4) $f(z) = |z|^2$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 1,\ -\pi/2 \le \arg z \le \pi/2 \}$, начало: $z = i$;
5) $f(z) = \bar{z}$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 3,\ \operatorname{Im} z \le 0 \}$, начало в точке $z = -3$;
6) $f(z) = z \cdot \bar{z}$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 2,\ -\pi < \arg z \le \pi \}$;
7) $f(z) = |z|^2 \cdot \bar{z}$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 1,\ -\pi < \arg z \le \pi \}$;
8) $f(z) = \dfrac{1}{|z|}$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 2,\ \operatorname{Im} z \le 0 \}$, начало в точке $z = -2$;
9) $f(z) = z \cdot |z|$, $\gamma = \{ z \mid |z| = 1,\ \operatorname{Re} z \le 0 \}$, начало в точке $z = -i$;
10) $f(z) = e^{\bar{z}}$, γ − ломаная, соединяющая точки $0,\ 1,\ 1 + i$.

4.2 С помощью интегральной формулы Коши вычислить $\oint\limits_{\gamma} h(z)dz$ по замкнутому контуру C (обход в положительном направлении).

1) $h(z) = \dfrac{e^{\pi(z+i)/2}}{z^2 - 2z}$, C: $|z| = 1$;

2) $h(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$, C: $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=1$;

3) $h(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$, C: $|z+i|=1$;

4) $h(z)=\dfrac{\sin(\pi\cdot z/2)}{z^2-z}$, C: $|z-1|=0{,}5$;

5) $h(z)=\dfrac{\cos(\pi z)}{z^2-4z}$, C: $|z-3|=2$;

6) $h(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+4}$, C: $|z-2i|=3$;

7) $h(z)=\dfrac{\cos(\pi z/4)}{z^2-1}$, C: $|z-1|=1$;

8) $h(z)=\dfrac{\sin z\cdot\cos(z-1)}{z^2-z}$, C: $|z-1|=0{,}5$;

9) $h(z)=\dfrac{\sin(\pi z/2)}{z^2+2z-3}$, C: $|z-1|=2$;

10) $h(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-4z+3}$, C: $|z|=2$.

4.3 Применяя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции, вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} g(z)dz$ по замкнутому контуру C, проходимому в положительном направлении.

1) $g(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-1)^2}$, C: $|z|=2$;

2) $g(z)=\dfrac{\sin z}{(z+\pi)^4}$, C: $|z+\pi/2|=3$;

3) $g(z)=\dfrac{z^3}{(z-i)^3}$, C: $|z-i|=0{,}5$;

4) $g(z)=\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$, C: $|z|=4$;

5) $g(z)=\dfrac{z}{(z-2)^3(z+4)}$, C: $|z-3|=5$;

6) $g(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z+2)^2}$, C: $|z|=1$;

7) $g(z)=\dfrac{\sin z}{z(z+2)^2}$, C: $|z+4|=3$;

8) $g(z)=\dfrac{chz}{z^3}$, C: $|z|=5$;

9) $g(z)=\dfrac{\ln z}{(z+2i)^3}$, C: $|z+3i|=2$;

10) $g(z)=\dfrac{e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}$, C: $|z-3|=2$.

Образцы решения типовых задач

1 Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ от заданной функции $f(z)$ по указанной кривой γ, если

$$f(z)=|z|^3\cdot\bar{z},\ \gamma=\left\{z\,\big|\,|z|=2,\ \operatorname{Re}z\ge 0\right\}$$

Решение. Требуется вычислить $\int\limits_{\gamma}|z|^3\cdot\bar{z}dz$, где γ − правая часть окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

Если уравнение линии C имеет вид $z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то

$$\int\limits_{C} f(z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$

В данном случае уравнение кривой γ имеет вид:

$$z=2e^{it},\ -\pi/2\le t\le\pi/2.$$

Тогда $|z|=2$, $\bar{z}=2e^{-it}$, поэтому $\int\limits_{\gamma}|z|^3\cdot\bar{z}dz=$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\cdot 2e^{-it}\cdot 2ie^{it}dt=32i\cdot\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=32\pi i.$$

2 С помощью интегральной формулы Коши вычислить $\oint\limits_{\gamma} h(z)dz$ по замкнутому контуру C (обход в положительном направлении), если

$$h(z)=\frac{e^{i\pi(z+2)}}{z^2+6z+5},\ C:\ |z+2|=2.$$

Решение. Требуется вычислить $\int\limits_{|z+2|=2} \frac{e^{i\pi(z+2)}}{z^2+6z+5}dz$.

Знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в точках -1 и -5. Точка -1 лежит внутри данного контура, а точка -5 вне его. Для применения интегральной формулы Коши перепишем данный интеграл в виде:

$$\int\limits_{|z+2|=2} \frac{e^{i\pi(z+2)}}{z^2+6z+5}dz = \int\limits_{|z+2|=2} \frac{e^{i\pi(z+2)}}{(z+5)(z+1)}dz = \int\limits_{|z+2|=2} \frac{\frac{e^{i\pi(z+2)}}{z+5}}{z-(-1)}dz.$$

Здесь $f(z) = \frac{e^{i\pi(z+2)}}{z+5}$ − аналитична внутри и на окружности $|z+2| = 2$, а точка $z_0 = -1$ находится внутри этой окружности.

По интегральной формуле Коши, $\int\limits_{|z+2|=2} \frac{e^{i\pi(z+2)}}{z^2+6z+5}dz =$

$$= 2\pi i \cdot f(z_0) = 2\pi i \cdot f(-1) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i\pi}}{4} = \frac{\pi i}{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{\pi i}{2}.$$

3 Применяя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции, вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} g(z)dz$ по замкнутому контуру *C*, проходимому в положительном направлении, если

$$g(z) = \frac{e^{3z}}{(z-1)^4},\ C\colon\ |z| = 4$$

Решение. Требуется вычислить $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{(z-1)^4}dz$.

Применим формулу:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Возьмем $f(z) = e^{3z}$, $z_0 = 1$, $n = 3$. Тогда $f(z)$ аналитична внутри и на окружности $|z| = 4$, а точка $z_0 = 1$ лежит внутри этой окружности, и

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{3z}}{(z-1)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\cdot f^{(3)}(z_0) = \frac{\pi i}{3}\cdot f^{(3)}(1) = \frac{\pi i}{3}\cdot 27e^3 = 9\pi e^3 i.$$

Тема 5
Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. Теорема единственности

Необходимые понятия и теоремы: степенные ряды, область сходимости степенного ряда, ряд Тейлора, ряд Лорана, теорема Тейлора, теорема Лорана, теорема единственности для аналитических функций.

Задачи

5.1 Указанные функции разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и найти радиус сходимости полученного степенного ряда.

1) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=2$;

2) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^2}$, $z_0=1$;

3) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0=1$;

4) $f(z)=\sin^2 z$, $z_0=0$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)^2}$, $z_0=0$;

6) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^2}$, $z_0=1$;

7) $f(z)=e^{2z}$, $z_0=-1$;

8) $f(z)=\cos(3z-i)$, $z_0=0$;

9) $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(1-z^3\right)^2}$, $z_0=0$;

10) $f(z)=\dfrac{1}{3z+1}$, $z_0=-2$.

5.2 Найти круг сходимости степенного ряда, в этом круге просуммировать данный степенной ряд.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n+1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n}$.

5.3 Разложить указанную функцию в ряд Лорана в кольце K и в окрестности точки $z=\infty$.

1) $f(z)=\frac{z+1}{z(1-z)^2}$, $K=\{0<|z-1|<1\}$;

2) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $K=\{0<|z-i|<2\}$;

3) $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}$, $K=\{0<|z+1|<2\}$;

4) $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $K=\{0<|z+i|<2\}$;

5) $f(z)=\frac{z^2}{z(z-4)}$, $K=\{1<|z-1|<3\}$;

6) $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$, $K=\{1<|z+2i|<3\}$;

7) $f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$, $K=\{1<|z-2i|<2\}$;

8) $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$, $K=\{0<|z+i|<2\}$;

9) $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$, $K=\{0<|z|<1\}$;

10) $f(z)=\frac{z}{(z-i)(z+3)}$, $K=\{1<|z|<3\}$.

5.4 Выяснить, существует ли аналитическая функция f в круге $U=\{z\,|\,|z|<2\}$, удовлетворяющая заданным условиям.

1) $f(1/n)=\begin{cases} 1/n^2,\ n\neq 1,\ n\in N \\ 0,\ n=1 \end{cases};$

2) $f(1/n)=\sin^2(\pi n/2),\ n\in N;$

3) $f(1/n)=(1/n^2)\cos^2(\pi n/2),\ n\in N;$

4) $f(1/n)=\begin{cases} 2/n,\ n\neq 1,\ n\in N \\ 0,\ n=1 \end{cases};$

5) $f(1/n)=\dfrac{n}{n+1},\ n\in N;$

6) $f(1/n)=\dfrac{1}{1+\cos^2(\pi n/2)},\ n\in N;$

7) $f(1/n)=3+\cos^2(\pi n/2),\ n\in N;$

8) $f(1/n)=f(-1/n)=1/n^2;$

9) $f(1/n)=f(-1/n)=1/n^3;$

10) $f(1/n)=\begin{cases} 1/n,\ n=2k, \\ 0,\ n=2k-1,\ k\in N. \end{cases}$

Образцы решения типовых задач

1 Функцию $f(z)$ разложить в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ и найти радиус сходимости полученного степенного ряда, если

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^2},\quad z_0=i$$

Решение. Требуется разложить функцию $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$. Разложим сначала функцию $g(z)=\dfrac{1}{z+1}$ по степеням $(z-z_0)$.

$$g(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-i+1+i}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{1+i}}.$$

Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ \ |z|<1.$$

Чтобы воспользоваться этим неравенством, необходимо выполнение условия $\left|\frac{z-i}{1+i}\right|<1$. Оно выполняется в окрестности точки $z_0=i$ $U(i;\sqrt{2})=\left\{z\,\middle|\,|z-i|<\sqrt{2}\right\}$. В этой окрестности получим разложение

$$\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{1+i}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n,\ \ |z-i|<\sqrt{2}\text{, тогда}$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n,\ |z-i|<\sqrt{2}.$$

Поскольку степенной ряд внутри круга сходимости сходится равномерно, то его можно почленно продифференцировать. Получим:

$$g'(z)=\frac{-1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}.\text{ Тогда}$$

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}=\frac{z-i}{(z+1)^2}+\frac{i}{(z+1)^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}in}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i(n+1)}{(1+i)^{n+2}}(z-i)^n=$$

$$=\frac{i}{(1+i)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}}\left(n-\frac{i(n+1)}{1+i}\right)(z-i)^n,\ |z-i|<\sqrt{2}.$$

Радиус сходимости можно вычислить и непосредственно:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\,n\left|1-\dfrac{i}{1+i}\cdot\dfrac{n+1}{n}\right|}}=\sqrt{2}.$$

2 Найти круг сходимости степенного ряда, в этом круге просуммировать степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^n.$$

Решение. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$. Его радиус сходимости совпадает с радиусом сходимости данного ряда и равен 1 (доказать!).

В круге сходимости этого ряда, т. е. при $|z|<1$, имеет место равенство $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, и ряд можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Умножая на z обе части полученного равенства и подставляя в него вместо z переменную $-z$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n = \frac{-z}{(1+z)^2}.$$

3 Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце К и в окрестности точки $z_0=\infty$, если

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}, \quad K = \{2<|z+1|<3\}$$

Решение. Представим $f(z)$ в виде:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Далее разложим функцию $\frac{1}{z-2}$ в круге $|z+1|<3$, а функцию $\frac{1}{z-1}$ на множестве $|z+1|>2$ по степеням $(z+1)$. Имеем:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z+1-3} = \frac{-1}{3}\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = \left[\left|\frac{z+1}{3}\right|<3\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}, \quad |z+1|<3.$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1-2} = \frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = \left[\left|\frac{2}{z+1}\right|<1\right] =$$

$$= \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+1}}, \ |z+1|>2.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+1}} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n, \ 2<|z+1|<3.$$

Для получения разложения в окрестности точки $z_0 = \infty$ сделаем замену $z = 1/\xi$, тогда $\xi = 1/z$, $\xi_0 = 0$.

$$f(1/\xi) = \frac{1}{\frac{1}{\xi^2} - \frac{3}{\xi} + 2} = \frac{\xi^2}{2\xi^2 - 3\xi + 1} = \frac{\xi^2}{2(\xi-1)(\xi-1/2)} =$$

$$= \xi^2\left(\frac{1}{\xi-1} - \frac{1}{\xi-1/2}\right).$$

В окрестности точки $\xi_0 = 0$ получим

$$\frac{1}{\xi-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n \quad \text{при} \quad |\xi| < 1,$$

$$\frac{1}{\xi-1/2} = \frac{-2}{1-2\xi} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(2\xi)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\xi^n \quad \text{при } |\xi| < 1/2.$$ Тогда

$$f(1/\xi) = \xi^2\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n + \sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\xi^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\xi^{n+2}, \ |\xi| < 1/2.$$

Возвращаясь к переменной z, получим искомое разложение в окрестности точки $z_0 = \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\frac{1}{z^{n+2}}, \ |z| > 2.$$

4 Выяснить, существует ли аналитическая функция f в круге $U = \{z \,|\, |z| < 2\}$, удовлетворяющая заданным условиям:

$$f(1/n) = (1/n)\cos(\pi n).$$

Решение. $f(1/n) = (1/n)\cos(\pi n) = (-1)^n/n$.

Рассмотрим множества $E_1 = \{1/(2n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $E_2 = \{1/(2n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ из U. Они имеют в U предельную точку $z_0 = 0$.

С одной стороны, $f\left(1/(2n)\right) = 1/(2n) = g\left(1/(2n)\right)$, где $g(z) = z$. Так как на E_1 $f(z) = g(z)$, то, по теореме единственности, $f(z) \equiv g(z)$ и на множестве U.

С другой стороны, $f\left(1/(2n+1)\right) = -1/(2n+1) = h\left(1/(2n+1)\right)$, где $h(z) = -z$. По теореме единственности, $f(z) \equiv h(z) = -z$ при $z \in U$.

Итак, если предположить, что $f(z)$ существует и удовлетворяет данным условиям, то она одновременно равна z и $-z$ на U. Это противоречие говорит о том, что f, удовлетворяющая заданным условиям, не существует.

Тема 6
Классификация изолированных особых точек. Вычеты. Основная теорема о вычетах

Необходимые понятия и теоремы: классификация изолированных особых точек, вычет функции относительно изолированной особой точки, вычет в бесконечно удаленной точке, основная теорема о вычетах, следствие из неё.

Задачи

6.1 Найти изолированные особые точки функции $f(z)$, определить их характер исследовать поведение функции в бесконечности.

1) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$;

2) $f(z)=\dfrac{z^3}{1-z^3}$;

3) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)^2}$;

4) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^4+1}$;

5) $f(z)=\dfrac{z+1}{z\cdot e^z}$;

6) $f(z)=\dfrac{1}{z(e^z-1)}$;

7) $f(z)=z^3e^{1/z^3}$;

8) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

9) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$;

10) $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$.

6.2 Классифицировать изолированные особые точки функции $f(z)$ и найти в них вычеты.

1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$;

2) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$;

3) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^2}$;

6) $f(z)=z\sin\dfrac{1}{z^2}$;

7) $f(z)=z^2e^{1/z}$;

8) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+4)^2}$;

4) $f(z)=\dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}$;

9) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^3}$;

5) $f(z)=\dfrac{z^2}{e^z-1}$;

10) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

6.3 Вычислить $\oint\limits_C f(z)dz$ с помощью вычетов.

1) $f(z)=\dfrac{\cos(iz)}{z^3}$, C: $|z-1|=2$;

2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$, C: $|z|=2$;

3) $f(z)=z^2e^{1/z}$, C: $|z+1|=3$;

4) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}+e^{z^2}\cdot\cos z$, C: $|z|=2/3$;

5) $f(z)=z^2\sin 1/z$, C: $|z+1|=2$;

6) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$, C: $|z+2i|=2$;

7) $f(z)=\dfrac{z}{(z+3)(z-2)^2}$, C: $|z-1|=3$;

8) $f(z)=\dfrac{z^3}{2z^4+1}$, C: $|z|=1$;

9) $f(z)=\dfrac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$, C: $|z-i|=3/2$;

10) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z^3(z+1)}$, C: $|z|=2$.

6.4 С помощью теории вычетов вычислить несобственные интегралы.

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4-x^2+1}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x dx}{x^4+1}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2-2x+10}dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xdx}{x^2-2x+2}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xdx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}$;

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+3ix+4\right)^2}$.

6.5 С помощью теории вычетов вычислить интегралы от тригонометрических функций.

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3+4i\cos\varphi}$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}$;

3) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{3-2\sin\varphi}d\varphi$;

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{2+\cos\varphi}d\varphi$;

5) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3-2\sin\varphi}$;

6) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{8-6i\cos\varphi}$;

7) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{2+\sin\varphi}d\varphi$;

8) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{5+4\cos\varphi}d\varphi$;

9) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3+2\cos\varphi}$;

10) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos\varphi}$.

Образцы решения типовых задач

1 Найти изолированные особые точки функции $f(z)$, определить их характер, исследовать поведение функции в бесконечности, если

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z(1-z)}.$$

Решение. Функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости ***C***, кроме точек $z=0$ и $z=1$.

Исследуем сначала точку $z=1$. Пусть $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{z(1-z)}{1-\cos z}$. Тогда

$$\varphi(1)=0,\ \varphi'(z)=\frac{(1-2z)(1-\cos z)-z(1-z)\sin z}{(1-\cos z)^2},\ \varphi'(1)=\frac{1}{\cos 1-1}\neq 0.$$

Следовательно, точка $z=1$ является нулём кратности 1 для функции $\varphi(z)$. А значит, $f(z)$ имеет в точке $z=1$ полюс первого порядка.

Разложим в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. При $0<|z|<1$ имеем

$$f(z)=(1-\cos z)\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=$$

$$=\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)\right)\cdot\frac{1}{z}\cdot\left(1+z+z^2+\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\ldots\right)\left(1+z+z^2+\ldots\right)=\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{2!}+z^3\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots.$$

Это разложение не содержит отрицательных степеней z. Значит, точка $z=0$ − устранимая особая точка.

Исследуем теперь точку $z=\infty$. Введем замену переменной $z=1/\xi$ и рассмотрим функцию $\varphi(z)=f(1/\xi)$. Найдем разложение в ряд Лорана функции $\varphi(\xi)$ в точке $\xi_0=0$. Имеем при $0<|\xi|<1$

$$\varphi(\xi)=\frac{1-\cos(1/\xi)}{(1/\xi)(1-1/\xi)}=\frac{\xi^2(1-\cos(1/\xi))}{\xi-1}=$$

$$=-\xi^2\left(\frac{1}{2!\xi^2}-\frac{1}{4!\xi^4}+\ldots\right)\left(1+\xi+\xi^2+\ldots\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!\xi^2}-\ldots\right)\left(1+\xi+\xi^2+\ldots\right)=$$

$$=\ldots+\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\ldots\right)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\ldots\right)+\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots\right)+$$

$$+\xi\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots\right)+\xi^2\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots\right)+\ldots.$$

Это разложение содержит бесконечное число отрицательных степеней ξ. Следовательно, точка $\xi_0=0$ является существенно особой точкой для функции $\varphi(\xi)$. А значит, точка $z=\infty$ является существенно особой для функции $f(z)$.

Примечание. – То, что точка $z=\infty$ является существенно особой точкой для функции $f(z)$, следует также из того, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует. Действительно, так как $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z(1-z)}=\dfrac{2-e^{iz}-e^{-iz}}{2z(1-z)}$, то, полагая

$z = x$, получим $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x(1-x)} \to 0$ при $x \to \infty$.

А при $z = iy$ имеем $f(iy) = \dfrac{2-e^{-y}-e^{y}}{2iy(1-iy)} = \dfrac{2-e^{-y}-e^{y}}{2y(y+i)} =$

$$= \frac{(y-i)(2-e^{-y}-e^{y})}{2y(y^2+1)} = \frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2(y^2+1)} - i\,\frac{2-e^{-y}-e^{y}}{2y(y^2+1)},$$

поэтому $f(iy) \to \infty$ при $y \to \infty$.

2 Классифицировать изолированные особые точки функции $f(z)$ и найти в них вычеты, если

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^2}.$$

Решение. Данная функция аналитична во всей плоскости ***C***, кроме точки $z = -1$. Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{(z+1)^2}{\cos(\pi z)}$. Она имеет в точке $z = -1$ ноль второго порядка, поскольку $\cos(\pi z)\big|_{z=-1} = -1 \neq 0$,

$$(z+1)^2\Big|_{z=-1} = 0,\ \left((z+1)^2\right)'\Big|_{z=-1} = (2z+2)\big|_{z=-1} = 0,$$

$$\left((z+1)^2\right)''\Big|_{z=-1} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, точка $z = -1$ является полюсом второго порядка для функции $f(z)$.

Вычет функции $f(z)$ относительно полюса z_0 порядка n вычисляется по формуле:

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)}.$$

В нашем случае при $n = 2$ имеем:

$$\underset{z=-1}{res}\, f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\left(\cos(\pi z)\right)' = \lim_{z\to -1}\left(-\pi\sin(\pi z)\right) = -\pi\sin(-\pi) = 0.$$

Рассмотрим точку $z = \infty$. Это изолированная особая точка. Для нахождения вычета в этой точке разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Для этого разложим функцию $\varphi(\xi) = f(1/\xi)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\xi = 0$. Имеем:

$$\varphi(\xi) = f(1/\xi) = \cos(\pi/\xi)\frac{\xi^2}{(1+\xi)^2}.$$

Если $|\xi|<1$, то $\varphi(\xi)=\left(1-\frac{\pi^2}{2!\xi^2}+\frac{\pi^4}{4!\xi^4}-...\right)\xi^2\left(1-\xi+\xi^2-\xi^3+...\right)^2=$

$$=\left(\xi^2-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!\xi^2}-\frac{\pi^6}{6!\xi^4}+...\right)\left(1-\xi+\xi^2-\xi^3+...\right)^2=$$

$$=\left(\xi^2-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!\xi^2}-\frac{\pi^6}{6!\xi^4}+...\right)\left(1-2\xi+3\xi^2-4\xi^3+5\xi^4-6\xi^5+...\right)=$$

$$=...+\left(-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{3\pi^4}{4!}-\frac{5\pi^6}{6!}+...\right)+\xi\left(\frac{2\pi^2}{2!}-\frac{4\pi^4}{4!}+\frac{6\pi^6}{6!}-...\right)+....$$

Поэтому разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид:

$$f(z)=...+\left(\frac{2\pi^2}{2!}-\frac{4\pi^4}{4!}+\frac{6\pi^6}{6!}-...\right)\frac{1}{z}+\left(-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{3\pi^4}{4!}-\frac{5\pi^6}{6!}+...\right)+....$$

Отсюда $c_{-1}=\frac{2\pi^2}{2!}-\frac{4\pi^4}{4!}+\frac{6\pi^6}{6!}-...=\pi^2-\frac{\pi^4}{3!}+\frac{\pi^6}{5!}-\frac{\pi^8}{7!}+...=$

$$=\pi\left(\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+..\right)=\pi\sin\pi=0.$$

Итак, $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-c_{-1}=0$.

Примечание. – Вычет функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ можно было найти с помощью следствия из основной теоремы о вычетах. Согласно следствию, если функция $f(z)$ аналитична во всей расширенной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю.

То есть $\sum_{k=1}^{\infty}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)+\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=0$, где z_k $(k=1,2,...,n)$ – все конечные изолированные особые точки функции $f(z)$, точка $z=\infty$ тоже является изолированной особой точкой функции $f(z)$.

В нашем случае $z=\infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, поскольку $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^2}$ не существует. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(\pi x)}{(x+1)^2}=0,\ x\in\boldsymbol{R},\ \text{а}\ \lim_{y\to\infty}\frac{\cos(\pi iy)}{(iy+1)^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{(iy+1)^2}=\infty.$$

На основании следствия имеем:

$$\underset{z=-1}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0.$$

Поскольку $\underset{z=-1}{res}\, f(z) = 0$, то и $\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0$.

3 Вычислить $\oint\limits_C f(z)dz$ с помощью вычетов, если

$$f(z) = \frac{z^3}{\cos z}, \quad C\colon \ |z-3| = 4.$$

Решение. Функция $f(z)$ является аналитической во всей плоскости ***C***, за исключением точек $z = \pi/2 + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Внутри данного контура $|z-3| = 4$ лежат две изолированные особые точки: $z_1 = \pi/2$ и $z_2 = 3\pi/2$. Данный контур содержится, например, в круге $|z-3| < 4{,}5$, в котором функция $f(z) = \dfrac{z^3}{\cos z}$ является аналитичной, за исключением точек z_1 и z_2. По основной теореме о вычетах,

$$\int\limits_{|z-3|=4} \frac{z^3}{\cos z} dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{2} \underset{z=z_k}{res} \frac{z^3}{\cos z}.$$

Поскольку $f(z) = \dfrac{z^3}{\cos z} = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z) = z^3$, $\psi(z) = \cos z$, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точках z_1 и z_2, причем выполняются условия:

$$\varphi(z_k) \neq 0,\ \psi(z_k) = 0,\ \psi'(z_k) \neq 0, \text{ при } k = 1;\ 2,$$

то точки z_1 и z_2 являются полюсами первого порядка функции $f(z)$.

Так как $\underset{z=z_k}{res}\, f(z) = \dfrac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}$, то

$$\underset{z=\pi/2}{res} \frac{z^3}{\cos z} = \frac{(\pi/2)^3}{-\sin(\pi/2)} = -\frac{\pi^3}{8}, \quad \underset{z=3\pi/2}{res} \frac{z^3}{\cos z} = \frac{(3\pi/2)^3}{-\sin(3\pi/2)} = \frac{27}{8}\pi^3.$$

Итак, $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=4} \frac{z^3}{\cos z} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{27}{8}\pi^3 - \frac{\pi^3}{8} \right) = \frac{13\pi^4}{2} i.$

4 С помощью теории вычетов вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

Решение. Так как подынтегральная функция четная и данный интеграл сходится как несобственный, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4+1}$. Найдем нули знаменателя. Решая уравнение $z^4+1=0$, получим

$$z^4 = -1 \quad \text{или} \quad z = \sqrt[4]{-1} = e^{i(\pi+2\pi k)/4},$$

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \;\; z_2 = e^{i3\pi/4}, \;\; z_1 = e^{i5\pi/4}, \;\; z_1 = e^{i7\pi/4}.$$

Функция $f(z)$ аналитична всюду в верхней полуплоскости и на действительной оси, кроме точек $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ и $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. В этих точках она имеет простые полюса с вычетами:

$$\underset{z=z_1}{res}\, f(z) = \left.\frac{z^2+1}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1} = \frac{z_1^2+1}{4z_1^3} = \frac{e^{i\pi/2}+1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{i+1}{4}e^{-i3\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{4}(i+1)\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}(i+1) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(i+1)^2,$$

$$\underset{z=z_2}{res}\, f(z) = \frac{z_2^2+1}{4z_2^3} = \frac{e^{i3\pi/2}+1}{4e^{i9\pi/4}} = \frac{1-i}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)^2.$$

Применяя формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{2} \underset{z=z_k}{res}\, f(z), \text{ имеем}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}(i+1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)^2\right) =$$

$$= \pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}\left((1-i)^2-(1+i)^2\right) = \pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot(-4i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

5 С помощью теории вычетов вычислить интеграл от тригонометрической функции

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{5-3\sin\varphi}d\varphi.$$

Решение. Введем замену переменной $z = e^{i\varphi}$, тогда $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{z}$,

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z+1/z}{2}, \;\; \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}.$$

Если $\varphi \in [0; 2\pi]$, тогда z пробегает единичную окружность, т. е. $|z| = 1$.

Так как $dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi$, то $d\varphi = \dfrac{dz}{iz} = -\dfrac{idz}{z}$. Теперь

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{5 - 3\sin\varphi} d\varphi = \int_{|z|=1} \frac{-i\left(z + 1/z\right)/2}{\left(5 - 3\left(z - 1/z\right)/2i\right)z} dz = \int_{|z|=1} \frac{z + 1/z}{iz\left(10 + 3i\left(z - 1/z\right)\right)} dz =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(10iz - 3z^2 + 3)} dz.$$

Согласно основной теореме о вычетах, последний интеграл равен $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов в изолированных особых точках функции $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z(10iz - 3z^2 + 3)}$, лежащих внутри контура $|z| = 1$.

Решим уравнение $3z^2 - 10iz - 3 = 0$.

$$D = -100 + 4 \cdot 9 = -64,\ \sqrt{D} = \pm 8i,$$

$$z_1 = \frac{10i + 8i}{6} = 3i,\ \ z_2 = \frac{10i - 8i}{6} = \frac{i}{3}.$$

Поскольку z_2 лежит внутри контура $|z| = 1$, а z_1 – вне его, то

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(10iz - 3z^2 + 3)} dz = 2\pi i \cdot \left(\underset{z=0}{res}\, f(z) + \underset{z=i/3}{res}\, f(z) \right).$$

Точки $z = 0$ и $z = i/3$ являются полюсами первого порядка функции $f(z)$, поэтому

$$\underset{z=0}{res}\, f(z) = \left. \frac{z^2 + 1}{z'\left(10iz - 3z^2 + 3\right)} \right|_{z=0} = \frac{1}{3},$$

$$\underset{z=i/3}{res}\, f(z) = \left. \frac{z^2 + 1}{z(10iz - 3z^2 + 3)'} \right|_{z=i/3} = \left. \frac{z^2 + 1}{z(10i - 6z)} \right|_{z=i/3} = \frac{-1/9 + 1}{i/3(10i - 2i)} = -\frac{1}{3}.$$

Итак, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{5 - 3\sin\varphi} d\varphi = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = 0$.

Тема 7
Принцип аргумента. Теорема Руше

Необходимые понятия и теоремы: логарифмический вычет, принцип аргумента, теорема Руше.

Задачи

7.1 Найти число корней уравнения $f(z)=0$ в области D.

1) $f(z)=z^4-8z+10$, $D=\left\{z \,\middle|\, |z|<1\right\}$;
2) $f(z)=z^4-8z+10$, $D=\left\{z \,\middle|\, |z|<3\right\}$;
3) $f(z)=z^4-5z+1$, $D=\left\{z \,\middle|\, |z|<1\right\}$;
4) $f(z)=z^4-5z+1$, $D=\left\{z \,\middle|\, 1<|z|<2\right\}$;
5) $f(z)=z^6-14z^3-3z+2$, $D=\left\{z \,\middle|\, |z|<1\right\}$;
6) $f(z)=z^7-5z^4+z^2-2$, $D=\left\{z \,\middle|\, |z|<1\right\}$;
7) $f(z)=z^8+15z-1$, $D=\left\{z \,\middle|\, |z|<2\right\}$;
8) $f(z)=z^8-15z+1$, $D=\left\{z \,\middle|\, 1<|z|<2\right\}$;
9) $f(z)=z^4+100z-2$, $D=\left\{z \,\middle|\, 1<|z|<2\right\}$;
10) $f(z)=z^5-z+10$, $D=\left\{z \,\middle|\, 1<|z|<2\right\}$.

7.2 Определить, как расположены по квадрантам корни уравнения $f(z)=0$.

1) $f(z)=z^6+z+4$;
2) $f(z)=z^8+z+3$;
3) $f(z)=z^6+z+5$;
4) $f(z)=z^4+z+5$;
5) $f(z)=z^{10}+z+5$;
6) $f(z)=2z^4-3z^3+3z^2-z+1$;
7) $f(z)=z^6+z+6$;
8) $f(z)=z^4+z^3+4z^2+2z+3$;
9) $f(z)=z^6+z+10$;
10) $f(z)=z^8+z+5$.

Образцы решения типовых задач

1 Найти число корней уравнения $f(z)=0$ в области D, если

$$f(z)=z^3+50z-1,\ D=\left\{z \,\middle|\, 1<|z|<2\right\}.$$

Решение. Данное уравнение имеет вид:

$$z^3+50z-1=0.$$

Найдем сначала число корней этого уравнения в круге $\left\{z \,\middle|\, |z|<2\right\}$. Положим $\psi(z)=50z$, $\varphi(z)=z^3-1$. Тогда для всех z на границе этого круга $|z|=2$ и выполняется неравенство:

$$|\psi(z)|=|50z|=100>8+1\geq|\varphi(z)|.$$

Следовательно, по теореме Руше (функции $\psi(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы), функция $\psi(z)+\varphi(z)$ имеет в круге $\left\{z \,\middle|\, |z|<2\right\}$ столько нулей, сколько и функция $\psi(z)=50z$. А она имеет там ровно один нуль.

Найдем теперь число нулей в круге $\left\{z \,\middle|\, |z|<1\right\}$ (на окружности $|z|=1$ корней данного уравнения нет, так как $|50z|\neq\left|1-z^3\right|$ при $|z|=1$). Возьмем $\psi(z)=50z$, $\varphi(z)=z^3-1$. Тогда для всех z, для которых $|z|=1$, выполняется неравенство:

$$|\psi(z)|=|50z|=50>1+1\geq|\varphi(z)|.$$

По теореме Руше, число нулей функции $\psi(z)+\varphi(z)$ равно числу нулей функции $\psi(z)$, т. е. одному.

Итак, в кольце $D=\left\{z \,\middle|\, 1<|z|<2\right\}$ исходное уравнение корней не имеет.

2 Определить, как расположены по квадрантам корни уравнения $f(z)=0$, если

$$f(z)=z^6+z+3.$$

Решение. Рассмотрим уравнение $z^6+z+3=0$. При всех $x\in[0;+\infty)$ $x^6+x+3>0$ и $x^6-x+3>0$. Отсюда следует, что данное уравнение не имеет действительных корней. Не имеет оно и чисто мнимых корней, т. е. вида $z=iy$, так как ни при одном $y\in\boldsymbol{R}$ выражение $-y^6-iy+3$ обращаться в ноль не может. Посчитаем количество корней данного уравнения, расположенных в первом квадранте. Для этого воспользуемся принципом аргумента. Пусть $R>0$ − достаточно большое число и $C_R=l_1\cup\gamma\cup l_2$ − контур, указанный на рисунке (рисунок 6).

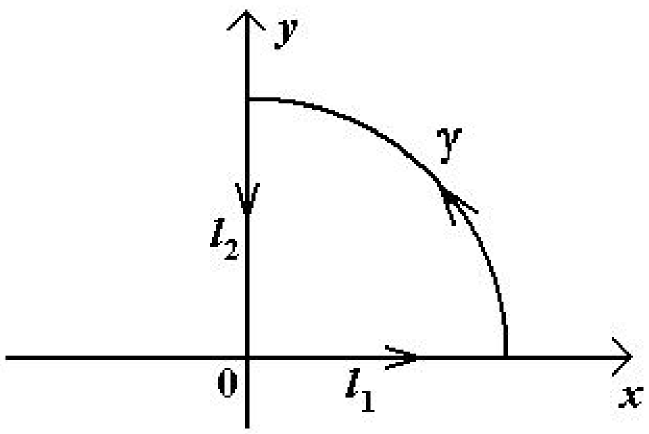

Рисунок 6 – Контур C_R

Поскольку на l_1 $z^6+z+3>0$, то $\operatorname*{Var}\limits_{l_1}\operatorname{Arg}\left(z^6+z+3\right)=0$ для $\forall R>0$. Если $R\to\infty$, то $\operatorname*{Var}\limits_{\gamma}\operatorname{Arg}R^6e^{6i\varphi}\left(1+R^{-5}e^{-5i\varphi}+3R^{-6}e^{-6i\varphi}\right)\to 3\pi$. Для подсчета $\lim\limits_{R\to\infty}\operatorname*{Var}\limits_{l_2}\operatorname{Arg}\left(z^6+z+3\right)$ проследим за изменением функции $\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{3-y^6}$ при уменьшении y от $+\infty$ к $\sqrt[6]{3}$, и затем за изменением функции $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{3-y^6}$ при уменьшении y от $\sqrt[6]{3}$ к 0. После этого заключаем, что $\lim\limits_{R\to\infty}\operatorname*{Var}\limits_{l_2}\operatorname{Arg}\left(z^6+z+3\right)=-\pi$.

Следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\operatorname*{Var}\limits_{C_R}\operatorname{Arg}\left(z^6+z+3\right)=2\pi$, и поэтому в первом квадранте, согласно принципу аргумента, уравнение имеет только один корень.

Поскольку уравнение имеет действительные коэффициенты, то его корни попарно сопряжены. Поэтому оно имеет один корень в четвертом квадранте и по два корня во втором и третьем квадрантах.

Литература

1. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учеб. для студентов высших учебных заведений / И. И. Привалов. − М.: Наука, 1977. – 444 с.

2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. пособ. для ун-тов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. − М.: Гл. ред. физ. мат. лит., 1987. − 688 с.

3. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. − М.: Наука, 1989 с. – 477 с.

4. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб. пособ. / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. − М.: Наука, 1981. − 304 с.

5. Волковысский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. − М.: Наука, 1975. − 478 с.

Производственно-практическое издание

Старовойтов Александр Павлович,
Казимиров Григорий Николаевич,
Кульбакова Жанна Николаевна

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 9.11.2015. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 25 экз. Заказ 649.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

А. П. СТАРОВОЙТОВ, Г. Н. КАЗИМИРОВ,
Ж. Н. КУЛЬБАКОВА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Гомель
2015