Введение.

Лабораторный практикум по математическому анализу составлен в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для математических специальностей университетов. Настоящее пособие разбито на 4 части по семестрам. Первая часть «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» содержит 17 лабораторных работ по следующим разделам : теория пределов, дифференциальное исчисление, приложения дифференциального исчисления, которые излагаются в 1 семестре обучения. Каждая лабораторная работа содержит наборы заданий с примерами решения типовых задач. Нумерация таблиц и рисунков сквозная, нумерация заданий своя в каждой лабораторной работе. При составлении лабораторного практикума авторы использовали литературу, список которой приводится в конце пособия. Материал пособия подготовили:

1 – 3 лабораторные работы составил Казимиров Г.Н.;

4 – 6, 16, 17 лабораторные работы составили Парукевич И.В., Лабыч Ю.А.;

7 – 9 лабораторные работы составил Старовойтов А.П.;

10 – 12 лабораторные работы составил Гаврилюк А.В.;

13 – 15 лабораторные работы составила Кульбакова Ж.Н.

Лабораторный практикум по математическому анализу предназначен, с одной стороны, для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 01 02 «Математика», 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)», 1-31 03 06 01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)». С другой стороны, лабораторный практикум может быть использован при проведении практических занятий и формирования индивидуальных заданий студентам разных форм обучения.

Лабораторная работа №1
Элементы теории множеств и математической логики

Необходимые понятия и теоремы: операции над множествами, равенство множеств, декартово произведение множеств, высказывания и формулы алгебры высказываний, таблица истинности, кванторы, важнейшие тавтологии.
Литература: [1] с. 5 – 16, [2] с. 13- 23, [3] с. 9 – 24.

1 Составьте подмножества множества *A* элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа и числа кратные 2

№	*A*	№	*A*
1.1	$\left\{-20;-1;\frac{3}{4};2;0\right\}$	1.11	$-12;0;21;23;27$
1.2	$\left\{-10;-\frac{3}{5};0;2;13;7\right\}$	1.12	$2,5;2,6;2,7;2,8;2,9;3$
1.3	$\left\{1;2;3;17;\frac{2003}{10}\right\}$	1.13	$2;4;6;8;10;12;14;16;18$
1.4	$\left\{0;1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$	1.14	$;3;7;9;11,13;15;17$
1.5	$2,5;3,5;6,7;12$	1.15	$-3;3;-4;4;-5;5;-6;6$
1.6	$-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2$	1.16	$\left\{;\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$
1.7	$\left\{-7;-5;-3;-1;0;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7}\right\}$	1.17	$\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$
1.8	$\left\{-\frac{9}{10};-\frac{8}{10};-\frac{7}{10};-\frac{6}{10}\right\}$	1.18	$\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$
1.9	$24;25;26;27;28$	1.19	$\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$
1.10	$\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{1}{8}\right\}$	1.20	$\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$

2 Найти пересечение, объединение, разность множеств *A* и *B*

№	*A*	*B*	№	*A*	*B*
2.1	$2;4;6;8;10;\ldots$	$4;8;12;16;20;\ldots$	2.11	$-10;-100;-1000;\ldots$	$-10;-20;-30;\ldots$

2.2	$3;6;9;12;15;\ldots$	$9;18;27;36;\ldots$	2.12	$-4;-8;-12;-16;-20;\ldots$	$-8;-16;-24;\ldots$
2.3	$4;8;12;16;20;\ldots$	$8;16;24;\ldots$	2.13	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$	$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}\ldots\right\}$
2.4	$5;10;15;20;\ldots$	$10;20;30;\ldots$	2.14	$\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27}\ldots\right\}$	$\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$
2.5	$6;12;18;24;\ldots$	$3;6;9;12;15;\ldots$	2.15	$0,1;0,01;0,001;\ldots$	$0,1;0,2;0,3;\ldots$
2.6	$8;16;24;\ldots$	$2;4;6;8;10;\ldots$	2.16	$-1;-2;-3;-4;\ldots$	$-1;-3;-5;-7;\ldots$
2.7	$9;18;27;\ldots$	$3;6;9;12;15;\ldots$	2.17	$-5;-10;-15;-20;\ldots$	$-10;-100;-1000;\ldots$
2.8	$10;100;1000;\ldots$	$10;20;30;\ldots$	2.18	$-5;-10;-15;-20;\ldots$	$-10;-20;-30;\ldots$
2.9	$2;4;6;8;10;\ldots$	$2;4;8;16;\ldots$	2.19	$\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$	$\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$
2.10	$3;6;9;12;15;\ldots$	$1;3;5;7;9;\ldots$	2.20	$0,1;0,2;0,3;\ldots$	$\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$

3 Выяснить, в каком из соотношений $\subset, \supset, =$ находятся множества A и B?

№	A	B	№	A	B
3.1	$\mathbf{Z}\setminus\{-1;0\}$	$\mathbf{N}\cup\{0\}$	3.11	$[0;1]\cap\mathbf{Q}$	$[0;2]\setminus\mathbf{Z}$
3.2	$\mathbf{Q}\setminus\mathbf{N}$	$\mathbf{Q}\setminus\{0, 1, 2, \ldots\}$	3.12	$[0;1]\cap(\{1\}\cup\{0\})$	$([0;1]\setminus\{1\})\cup\{0\}$
3.3	$\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$	$\mathbf{Q}\setminus\{0, 1, 2, \ldots\}$	3.13	$([0;2]\setminus[0;1])\cap[1,3]$	$([0;2]\cap[1;3])\setminus[0;1]$
3.4	$\mathbf{Q}\cap\mathbf{N}$	$\mathbf{N}\cap\mathbf{Z}$	3.14	$\mathbf{R}\cap\mathbf{Z}$	$\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$
3.5	$\mathbf{Z}\cap\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}\cap\mathbf{N}$	3.15	$(-\infty;0]\cap\mathbf{Z}$	$\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$
3.6	$\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$	$\mathbf{Q}$	3.16	$(A\cap B)\cup C$	$(A\cup C)\cap(B\cup C)$
3.7	$\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$	$\mathbf{Z}$	3.17	$(A\setminus B)\cap C$	$(A\cap C)\setminus B$
3.8	$\mathbf{R}\cap\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$	3.18	$A\setminus B$	$A\setminus(A\cap B)$
3.9	$(-\infty;0)$	$\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$	3.19	A	$(A\cap C)\cup(A\setminus B)$
3.10	$\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$	$(-\infty;0]\cap\mathbf{Z}$	3.20	$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	$(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

4 Найти декартово произведение множеств A и B. Изобразить на плоскости $A\times B$.

№	A	B	№	A	B
4.1	[0;1]	[0;1]	4.11	$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$
4.2	[0;2]	[-1;1]	4.12	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;0)$
4.3	(0;3)	[1;2)	4.13	$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
4.4	(1;2]	(3;4]	4.14	$(-\infty;0]$	$(-\infty;+\infty)$
4.5	{1,2,3}	{3,4,5}	4.15	$(-\infty;+\infty)$	[0;1]
4.6	{1,2,5}	{3,6,7}	4.16	[0;2]	$(-\infty;+\infty)$
4.7	$[0;+\infty)$	$(-\infty;0]$	4.17	$[0;1]\cup[3;4]$	[2;5]
4.8	$(-\infty;0)$	$(-\infty;0)$	4.18	$[-1;0]\cup[1;2]$	$[0;+\infty)$
4.9	$(-\infty;0]$	$[0;+\infty)$	4.19	**N**	$(-\infty;+\infty)$
4.10	$[0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	4.20	**N**	**Z**

5 Каким из знаков $\Rightarrow,\Leftarrow,\Leftrightarrow$ связаны высказывания A и B. Докажите это. Является ли A необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для B? Здесь $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$.

№	A	B	№	A	B
5.1	f принимает только положительные значения	$a>0$	5.11	множеством значений f является $[-\frac{D}{4a};+\infty)$	$a>0$
5.2	f принимает только отрицательные значения	$a<0$	5.12	множеством значений f является $(-\infty;-\frac{D}{4a}]$	$a<0$
5.3	f принимает только неотрицательные значения	$D\le 0$	5.13	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$
5.4	f принимает только положительные значения	$a>0$ и $D<0$	5.14	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$
5.5	f принимает только отрицательные значения	$a<0$ и $D<0$	5.15	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$ и $\frac{c}{a}>0$
5.6	f принимает только неотрицательные значения	$a>0$ и $D\le 0$	5.16	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$ и

					$\frac{c}{a}>0$
5.7	f принимает только неположительные значения	$a<0$ и $D\le 0$	5.17	уравнение $f(x)=0$ имеет 1 положительный и 1 отрицательный корень	$\frac{c}{a}<0$
5.8	f принимает положительные и отрицательные значения	$D>0$	5.18	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня	$-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$
5.9	множеством значений f является $[-2;+\infty)$	$a>0$	5.19	уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня	$-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$
5.10	множеством значений f является $(-\infty;4]$	$a<0$	5.20	уравнение $f(x)=0$ имеет неотрицательные корни	$-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$

6 Записать с помощью кванторов высказывание *A* и его отрицание

№	*A*	№	*A*
6.1	все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x\ge m$	6.11	в числовом множестве X существует элемент x_0 такой, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x\ge x_0$
6.2	все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x\le M$	6.12	в числовом множестве X существует элемент x_0 такой, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x\le x_0$
6.3	существует число M такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x\le M$	6.13	во всяком подмножестве B числового множества X существует элемент x_0 такой, что все элементы x множества B удовлетворяют условию $x\le x_0$
6.4	существует число m такое, что все элементы x число-	6.14	во всяком подмножестве B числового множества X существует эле-

	вого множества X удовлетворяют условию $x \geq m$		мент x_0 такой, что все элементы x множества B удовлетворяют условию $x \geq x_0$
6.5	существуют числа m и M такие, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $m \leq x \leq M$	6.15	все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' > M'$
6.6	существуют элементы x числового множества X, удовлетворяющие условию $x \geq m$	6.16	все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' < m'$
6.7	существуют элементы x числового множества X, удовлетворяющие условию $x \leq M$	6.17	существует число M такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' > M'$
6.8	для любого числа M существует элемент x числового множества X такой, что $x > M$	6.18	существует число m такое, что все элементы x числового множества X удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент x' из множества X такой, что $x' < m'$
6.9	для любого числа m существует элемент x числового множества X такой, что $x < m$	6.19	Существует число c такое, что любой элемент x числового множества X удовлетворяет условию $x \leq c$ и любой элемент y числового множества Y удовлетворяет условию $y \geq c$
6.10	для любых чисел m и M существуют элементы x и y числового множества X такие, что $x < m$ и $y > M$	6.20	Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что любой элемент x из множества X меньше либо равен любого элемента y из множества Y, существует число M такое, что $x \leq M \leq y$ для любых элементов x из X и y из Y

Решение типовых примеров

1.20 $A=\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$. Множество *B* называется подмножеством множества *A*, если любой элемент множества *B* является элементом множества *A*. Так как множество натуральных чисел ***N***$=\ 1;2;3;4;...\ $, то подмножеством натуральных чисел для *A* будет $\ 22;23\ $. Множество целых чисел ***Z***$=\ ...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\ $. Поэтому подмножеством целых чисел для *A* будет $\ 22;23\ $. Нечётными называются числа вида $2n+1$, где $n\in$ ***Z***. Поэтому подмножеством нечётных чисел для *A* будет $\ 23\ $, поскольку $23=2\cdot 11+1$. Чётными называются числа вида $2n$, где $n\in$ ***Z***. Поэтому подмножеством чётных чисел для A будет $\ 22\ $, поскольку $22=2\cdot 11$. Отрицательными называются числа, расположенные слева от нуля на числовой прямой. Таких во множестве *A* нет. Поэтому и подмножеств, состоящих из этих чисел для *A* нет. Положительными называются числа, расположенные справа на числовой прямой. Все элементы множества *A* являются положительными числами. Поэтому в качестве подмножества положительных чисел для A можно взять само множество *A*. Натуральное число называется кратным 2, если оно делится на 2 нацело. Поэтому подмножеством чисел, кратных 2 для A будет $\ 22\ $.

2.20 $A=\ 0{,}1;0{,}2;0{,}3;...\ $, $B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};...\right\}$. Пересечением множеств *A* и *B* называется множество $A\cap B=\ x\,|\,x\in A\ \text{ и }\ x\in B\ $. Поскольку $0{,}1=\frac{1}{10}$, а все остальные элементы множества *B* меньше любого элемента множества *A*, то других общих элементов для *A* и *B* нет и следовательно в данном случае $A\cap B=\left\{\frac{1}{10}\right\}$. Объединением множеств *A* и *B* называется множество $A\cup B=\ x\,|\,x\in A\ \text{ или }\ x\in B\ $. Таким образом в объединение множеств *A* и *B* входят все элементы как множества *A*, так и множества *B*. В нашем случае $A\cup B=\left\{0;\frac{1}{10};0{,}2;\frac{1}{20};0{,}3;\frac{1}{30};0{,}4;\frac{1}{40};...\right\}$. Разностью множеств *A* и *B* называется множество $A\setminus B=\ x\,|\,x\in A\ \text{ и }\ x\notin B\ $. В нашем случае только элемент 0,1 из множества *A* принадлежит *B*. Поэтому $A\setminus B=\ 0;0{,}2;0{,}3;0{,}4;...$

3.20 Докажем, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Два множества равны, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Покажем, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Пусть $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Тогда $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$. Если $x \in A \setminus B$, то $x \in A$ и $x \notin B$. Из того, что $x \in A$ следует, что $x \in A \cup B$, а из того, что $x \notin B$ следует, что $x \notin A \cap B$. Значит $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Аналогично получаем, что $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, если $x \in B \setminus A$.

Докажем теперь, что $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \notin A \cap B$. Из того, что $x \in A \cup B$ следует, что $x \in A$ или $x \in B$, а из того, что $x \notin A \cap B$ следует, что $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда, если $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$, а, если $x \in B$ и $x \notin A$, то $x \in B \setminus A$. Других ситуаций быть не может. Итак, $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$. Значит $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ доказано.

4.20 $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}$. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = (x, y) | x \in A, y \in B$. В нашем случае $A \times B = (x, y) | x \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{Z}$. Изобразим множество $A \times B$ на плоскости

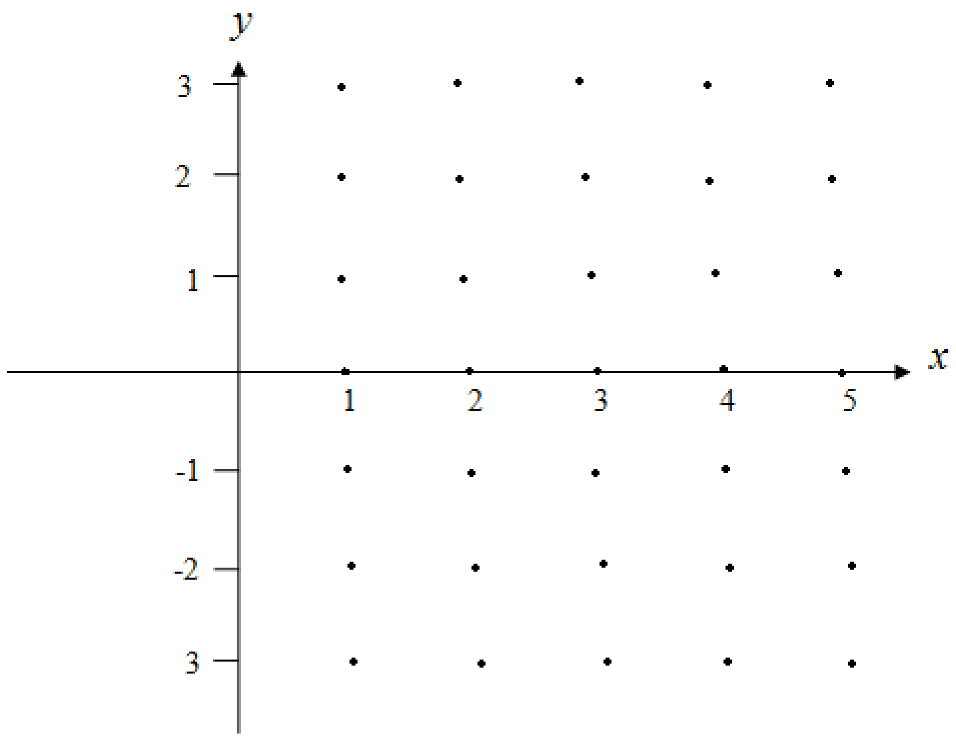

Рисунок 1 – Множество $A \times B = (x, y) | x \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{Z}$

5.20 A={ уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет неотрицательные корни }, B={ $-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$ }.

Докажем, что из A не следует B. Рассмотрим уравнение $x^2+3x-4=0$. Оно имеет неотрицательный корень $x=1$. Однако $-\frac{b}{a}=\frac{-3}{1}=-3<0$.

Докажем, что $B\Rightarrow A$. Пусть $-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$. Из условия $D\ge 0$ следует, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни. Из теоремы Виета следует, что их произведение равно $\frac{c}{a}$ и поскольку $\frac{c}{a}\ge 0$, то либо оба корня имеют одинаковый знак либо один из них равен нулю. Если один из корней равен нулю, то он и является неотрицательным корнем, т.е. A выполнено. Если же оба корня имеют одинаковый знак, то из теоремы Виета и условия $-\frac{b}{a}\ge 0$ следует, что их сумма $x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ge 0$. Поэтому они оба положительные. Значит и в этом случае уравнение имеет неотрицательный корень. Итак импликация $B\Rightarrow A$ доказана.

6.20 A={Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что любой элемент x из множества X меньше либо равен любого элемента y из множества Y, существует число M такое, что $x\le M\le y$ для любых элементов x из X и y из Y}. Запишем с помощью кванторов высказывание A и его отрицание $\neg A$:

$$A=\ \forall X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\to x\le y\exists M:x\le M\le y\forall x\in X,\forall y\in Y$$

$$\neg A=\ \exists X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\to x\le y\wedge\forall M\exists x\in X,\exists y\in Y:x>M\vee y<M$$

Заметим, что высказывание A представляет собой теорему об отделимости числовых множеств и выполняется всегда. Поэтому высказывание $\neg A$ ложно.

Лабораторная работа №2
Отображения и числовые функции

Необходимые понятия и теоремы: отображения, числовые функции, образ, прообраз, график, обратное отображение, композиция отображений
Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 23- 36, [3] с. 71 – 84.

1 Для отображения $y = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c так, чтобы оно отображало X на Y (сюрьекция) и его график проходил через точку (x_0, y_0) или доказать, что таких a, b, c не существует

№	X	Y	$(x_0; y_0)$	№	X	Y	$(x_0; y_0)$
1.1	$\boldsymbol{R}$	$[0;+\infty)$	$(0;1)$	1.11	$(-4;5)$	$(0;8]$	$(0;3)$
1.2	$\boldsymbol{R}$	$[2;+\infty)$	$(0;4)$	1.12	$(-3;1]$	$[1;5]$	$(0;4)$
1.3	$[2;+\infty)$	$[1;+\infty)$	$(3;4)$	1.13	$(-\infty;+\infty)$	$[0;4]$	$(1;3)$
1.4	$[1;+\infty)$	$(-\infty;0]$	$(1;0)$	1.14	$(-\infty;0]$	$(0;8]$	$(-1;4)$
1.5	$\boldsymbol{R}$	$(-\infty;1]$	$(0;1)$	1.15	$(0;8)$	$[1;3]$	$(1;2)$
1.6	$(-\infty;0]$	$(-\infty;0]$	$(-3;0)$	1.16	$[4;10]$	$(1;5)$	$(5;4)$
1.7	$[0;+\infty)$	$(-\infty;-1]$	$(2;-1)$	1.17	$(-1;3)$	$[1;9)$	$(2;4)$
1.8	$[1;6]$	$[2;8]$	$(2;4)$	1.18	$(1;5)$	$(3;8]$	$(2;4)$
1.9	$[2;8]$	$[-3;9]$	$(3;5)$	1.19	$(-\infty;1]$	$(1;5)$	$(0;3)$
1.10	$(-3;8)$	$(-4;3)$	$(0;1)$	1.20	$[-2;4)$	$(-1;3)$	$(0;0)$

2 Для функции $y = f(x)$ найти образ множества A и прообраз множества B

№	$y = f(x)$	A	B	№	$y = f(x)$	A	B
2.1	$y = 3x^2 + 6x - 1$	$(-3;5)$	$(-3;8)$	2.11	$y = e^{x-1}$	$(-\infty;1)$	$(0;1)$
2.2	$y = -x^2 + 2x + 1$	$(-4;0)$	$(-\infty;0]$	2.12	$y = \frac{1}{2^{x+1}}$	$(-\infty;-1)$	$(0;2]$
2.3	$y = \sin x$	$\left\{\frac{\pi}{2}k, k \in Z\right\}$	$\left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$	2.13	$y = \ln(x+2)$	$(-2;3]$	$(-\infty;3]$
2.4	$y = \cos 2x$	$\left\{\frac{\pi}{2}k, k \in Z\right\}$	$\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$	2.14	$y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$	$(-1;4]$	$[2;5]$
2.5	$y = tgx$	$\left\{\frac{\pi}{4}k, k \in Z\right\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right\}$	2.15	$y = \cos 2x - 1$	$(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$	$[-1;0]$

2.6	$y=\cos x$	$[\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}]$	$(-1;-\frac{1}{2}]$	2.16	$y=\sin(x-1)$	$(1;\frac{3}{2})$	$(0;\frac{1}{3})$
2.7	$y=\cos(-x)$	$(\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2})$	$(0;\frac{\sqrt{2}}{2})$	2.17	$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$	(0;3)	$(-\infty;\log_2 3)$
2.8	$y=\lvert x\rvert-1$	[–4;1)	[5;+∞)	2.18	$y=\lvert x^2-5x+6\rvert$	(0;2,8]	$(\frac{1}{8};+\infty)$
2.9	$y=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$	[–3;8]	(1;+∞)	2.19	$y=ctg(x+2)$	(–1;1)	$(\frac{\pi}{4};2\pi)$
2.10	$y=\lvert x-1\rvert-1$	[0;1]	(2;4]	2.20	$y=\frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$	(3;5]	$(0;\frac{1}{13})$

3 Найти инъективное, биективное отображение множества *X* в *Y* (доказать инъективность, биективность) или доказать, что такого отображения нет

№	*X*	*Y*	№	*X*	*Y*
3.1	**R**	**R**	3.11	**R**	$-\pi;\pi)$
3.2	$[-1;2]$	$[-4;8]$	3.12	$\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$	**R**
3.3	$[0;+\infty)$	$[2;+\infty)$	3.13	(-1;1)	**R**
3.4	$[3;+\infty)$	$[0;+\infty)$	3.14	**R**	(-2;2)
3.5	$[1;+\infty)$	$(-\infty;2]$	3.15	$(0;\pi)$	**R**
3.6	**R**	$(0;+\infty)$	3.16	множество нечётных чисел	**N**
3.7	**R**	$(-\infty;0)$	3.17	множество чётных чисел	**N**
3.8	$(-\infty;0)$	**R**	3.18	**N**	**Z**
3.9	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$	3.19	**N**	**Q**
3.10	**R**	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	3.20	**N**	(0;1)

4 Построить график отображения $y=f(x), x\in X$, $f:X\to Y$. Найти *Y* и обратное отображение $f^{-1}:Y\to X$, если это возможно или доказать, что его нет

№	$y=f(x)$	X	№	$y=f(x)$	X
4.1	$y=2x^2+x-1$	$[-\frac{1}{4};5]$	4.11	$y=\sin 2x$	$[0;\pi]$
4.2	$y=\sin x$	$[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$	4.12	$y=\cos 2x$	$[-\frac{\pi}{4};0]$
4.3	$y=\cos x$	$[\pi;2\pi]$	4.13	$y=ctgx$	$(\pi;2\pi)$
4.4	$y=x^2-4x+3$	$[3;8]$	4.14	$y=\sin\frac{x}{2}$	$[-\pi;\pi]$
4.5	$y=tgx$	$[0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi]$	4.15	$y=\cos\frac{x}{2}$	$[0;2\pi]$
4.6	$y=\|x-1\|$	$[1;5]$	4.16	$y=\sin(x-1)$	$[0;1]$
4.7	$y=\|x+1\|$	$[-2;3]$	4.17	$y=\cos(x+1)$	$[0;1]$
4.8	$y=\|\ln x\|$	$(0;1]$	4.18	$y=\sin(x+2)$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
4.9	$y=e^{\|x\|}$	$[-1;2]$	4.19	$y=\cos(x-2)$	$[0;\pi]$
4.10	$y=e^{\|x-1\|}$	$[-1;1]$	4.20	$y=tg(x+1)$	$[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$

5 Найти следующие композиции: $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$ или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций f и g

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
5.1	2^x	x^3	5.11	3^{x+1}	$\log_3 x-1$
5.2	x^2	$\sqrt{x^3}$	5.12	$\arcsin x$	$\sin x$
5.3	3^x	x^2	5.13	$\arccos x$	$\cos x$
5.4	x^2	$\sqrt{x}$	5.14	$\cos x$	$\arccos x$
5.5	10^x	$\lg x$	5.15	$\arcsin x$	$\cos x$
5.6	x^5	$x+5$	5.16	$\arccos x$	$\sin x$
5.7	$\sin x$	$x-1$	5.17	$\arcsin x$	e^x
5.8	$\cos x$	$\ln x$	5.18	$\arccos x$	$\ln x$
5.9	$x+2$	$\ln(x-2)$	5.19	$\arccos x$	$\arcsin x$
5.10	e^x	$\ln(x-1)$	5.20	$arctgx$	$\ln x$

Решение типовых примеров

1.20 $X=[-2;4)$, $Y=(-1;3)$, $(x_0;y_0)=(0;0)$. Очевидно, что при отображении $y=ax^2+bx+c$ образом промежутка (интервала, полуинтервала, отрезка) будет промежуток (убедиться в этом, нарисовав все возможные случаи) или одна точка. Образом включённого левого конца промежутка будет включённый конец промежутка (убедиться геометрически). Поэтому полуинтервал $[-2;4)$ не может перейти в интервал $(-1;3)$. Значит указанного отображения, а следовательно и чисел a,b,c не существует.

2.20 $y=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$, $A=(3;5]$, $B=(0;\dfrac{1}{13})$.

Образом множества A при отображении f называется множество $f(A)=\ f(x)\big|x\in A\ $. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на $[0;+\infty)$, то $\forall x_1,x_2\in[0;+\infty): x_1<x_2\rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$, а функция $y=\dfrac{1}{2^x}$ или $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, то $\dfrac{1}{2^{\sqrt{x_1}}}>\dfrac{1}{2^{\sqrt{x_2}}}$. Поэтому функция $y=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ убывает на $[0;+\infty)$. Отсюда заключаем, что для $f(x)=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ образ $f((3;5])=\left\{\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}\Big|x\in(3;5]\right\}=[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}};\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}})$, поскольку $f(x)=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ не может принять любое значение вне $[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}};\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}})$ при $x\in(3;5]$ (в силу убывания) и принимает любое значение $a\in[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}};\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}})$ в точке $x_0=\log_2^2 a\in(3;5]$ (доказать).

Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B)=\ x\big|f(x)\in B\ $. В нашем случае $f^{-1}((0;\dfrac{1}{13}))=\left\{x\left|\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}\in(0;\dfrac{1}{13})\right.\right\}=$ $=\left\{x\left|0<\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\dfrac{1}{13}\right.\right\}$. Решим неравенство $0<\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\dfrac{1}{13}$. Левое неравенство выполняется при всех $x\in[0;+\infty)$ (области определения f). Правое перепишем в виде $\frac{1}{2^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{2^{\log_2 13}}$ или $\sqrt{x} > \log_2 13$ или $x > \log_2^2 13$. Итак $f^{-1}((0;\frac{1}{13})) = (\log_2^2 13;+\infty)$.

3.20 X=**N**, Y=(0;1). Рассмотрим отображение $f: X \to Y$, действующее по формуле: $f(x) = \frac{1}{2x}$. Отображение называется инъективным, если оно различные элементы переводит в различные, т.е., если $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$. Очевидно, f - инъективно. Отображение $f: X \to Y$ называется биективным или взаимно-однозначным, если оно сюрьективно, т.е. $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ и инъективно. Докажем, что нет биективного отображения f :**N**$\to$(0;1). Предположим, что такое отображение существует. Тогда оно является сюрьективным и каждому действительному числу из (0;1) соответствует вполне определённый номер $n \in$**N**. Значит, все действительные числа из (0;1) можно записать в порядке возрастания соответствующих им номеров:

$$\alpha_1 = 0,\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}...$$
$$\alpha_2 = 0,\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}...$$
$$\alpha_3 = 0,\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(3)}...$$

Рассмотрим число $\beta = 0,\beta_1\beta_2\beta_3...$ такое, что $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}, \beta_1 \neq 9, \beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq \alpha_2^{(2)}, \beta_2 \neq 9, \beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq \alpha_3^{(3)}, \beta_3 \neq 9, \beta_3 \neq 0, \ldots$. Очевидно, число $\beta \in (0;1)$ и не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_n, n \in$**N**. Противоречие. И следовательно наше предположение неверно.

На самом деле нами доказано, что (0;1) не является счётным множеством.

4.20 $y = tg(x+1)$, X=$[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$. Если $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$, то $x+1 \in [1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\pi}{8}] \subset [0;\frac{\pi}{2})$. Поэтому графиком функции $y = tg(x+1), x \in X$ будет часть графика функции $y = tgx, x \in [1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\pi}{8}]$, сдвинутая на 1 влево. Нарисуем эти графики (рис.2).

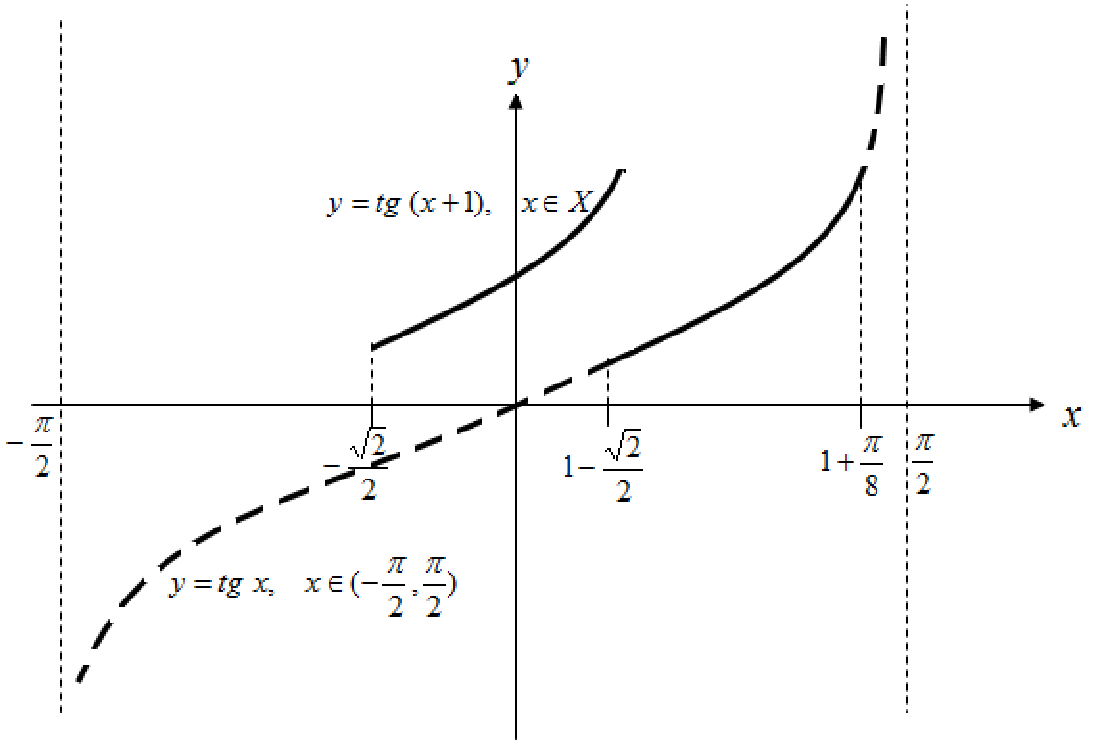

Рисунок 2 – Рисунок к задаче 4.20

Поскольку при $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \to x_1 + 1 < x_2 + 1$ и $y = tgx, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ возрастает, то и функция $y = tg(x+1), x \in X$ возрастает. Поэтому множеством значений этой функции будет множество $Y = [tg(1-\frac{\sqrt{2}}{2}); tg(1+\frac{\pi}{8})]$ и в силу возрастания отображение $f : X \to Y$ будет взаимно-однозначным (биективным), а следовательно будет существовать обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$. Найдём его, выразив переменную x через y из уравнения $y = tg(x+1)$ и учтя, что $x + 1 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:

$$x + 1 = arctgy \quad \text{или} \quad x = arctgy - 1.$$

Итак, $f^{-1}(x) = arctgx - 1, x \in Y$ – отображение, обратное к $f(x) = tg(x+1), x \in X$.

5.20 $f(x) = arctgx$, $g(x) = \ln x$. Сложная функция $f(g)$ (или композиция функций f и g будет определена тогда, когда множество значений *E(g)* функции g содержится в области определения *D(f)* функции *f*. В нашем случае $E(g)=(-\infty;+\infty)$, $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $D(g)=(0;+\infty)$, $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Так как $E(g)\subset D(f)$, то определена функция $f(g(x))=arctg(\ln x)$.

Поскольку $E(f)$ не содержится в $D(g)$, то композиция $g(f)$ на естественных областях не возможна.

$E(f)\subset D(f)$ и значит определена сложная функция $f(f(x))=arctg(arctgx)$.

$E(g)$ не содержится в $D(g)$. Поэтому композиция $g(g)$ на естественных областях не возможна.

На естественной области определения f не определена функция $\frac{1}{f^2}$ (в точке $x=0$) и поэтому не определена функция $f\left(\frac{1}{f^2}\right)$.

Областью определения функции $y=\sqrt{x}$ является множество $[0;+\infty)$. Так как множество значений функции f не содержится в нём, то композиция $\sqrt{f}$ не возможна на естественной области определения f.

Лабораторная работа №3
Числовые функции

Необходимые понятия и теоремы: область определения, область значений, графики элементарных функций, сдвиги
Литература: [1] с. 16 – 28, [2] с. 23- 36, [3] с. 71 – 84.

1 Найти область определения функции $y = f(x)$

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
1.1	$y=\sqrt{5x-3x^3}$	1.11	$y=\arccos\frac{3x}{1-x}$
1.2	$y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x}}$	1.12	$y=\arcsin(2\cos 2x)$
1.3	$y=\log_x \sin x$	1.13	$y=\sqrt[4]{(x-1)\cos^2 \pi x}$
1.4	$y=\log_{-x} \cos x$	1.14	$y=\sqrt[5]{\ln(x^2+x-1)}$
1.5	$y=\frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$	1.15	$\arccos(\|1-x\|+\|1+x\|)$
1.6	$y=\sqrt{\cos 2x}$	1.16	$y=\left(\sqrt[6]{\sin x-\frac{1}{2}}\right)^6$
1.7	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin 3x-1}}$	1.17	$y=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}+\log_x(x^2-1)$
1.8	$y=\log_3 \log_2 x$	1.18	$y=ctg\frac{\pi}{\sqrt{x}}$
1.9	$y=\frac{1}{\sqrt{(\sin x)^2}}$	1.19	$arctg\left(\ln\|\cos x\|-\frac{1}{2}\right)$
1.10	$y=\frac{1}{\sqrt{\|x\|-\|x+1\|}}$	1.20	$\arccos(\lg(10x))$

2 Найти множество значений функции $y = f(x)$

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
2.1	$y=\sqrt{x^2-x-2}$	2.11	$y=\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}$
2.2	$y=\sqrt[3]{x^2-4x-5}$	2.12	$y=\sqrt{\cos(2x+1)}$

2.3	$y=3x-4, x\in[-2;2]$	2.13	$y=\cos\sqrt{x^2-6x+5}$
2.4	$y=3^{\sin x}$	2.14	$\sin\sqrt[4]{3-x^2}$
2.5	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$	2.15	$\arccos(x^2-10x+6)$
2.6	$e^{\log_2 x}$	2.16	$arctg\sqrt[6]{x^2+5x+6}$
2.7	$y=\sin\ -\sqrt{x-2}$	2.17	$\arccos(\log_{\frac{1}{2}} x)$
2.8	$y=\ln(\cos x)$	2.18	$y=\log_{\frac{1}{2}}(arcsix)$
2.9	$y=\ln(tgx)$	2.19	$y=\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(\cos x))$
2.10	$y=\arcsin 2^x$	2.20	$y=\arccos(\arcsin x)$

3 Построить график функции $y=f(x)$

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
3.1	$y=\left\|x^2-4\right\|$	3.11	$y=4\cos 2x$
3.2	$y=\left\|\sin 2x\right\|$	3.12	$y=5\sin(x-2)$
3.3	$y=\left\|\cos\frac{x}{2}\right\|$	3.13	$y=2\cos\frac{x}{2}$
3.4	$y=\log_{\frac{1}{2}}\left\|x-1\right\|$	3.14	$y=\sqrt[3]{x+3}$
3.5	$y=\left\|3-x^2\right\|$	3.15	$y=\sqrt[4]{\left\|x\right\|}$
3.6	$y=2^{\left\|x+1\right\|}$	3.16	$y=\sqrt[5]{x-\frac{1}{2}}$
3.7	$y=2^{-x-1}$	3.17	$y=\sqrt[3]{\left\|x+1\right\|}$
3.8	$y=-\cos 2x$	3.18	$y=\left\|\sqrt{x+1}-1\right\|$
3.9	$y=ctg(-x)$	3.19	$y=\sqrt{\left\|x-1\right\|}-3$
3.10	$y=tg(1-x)$	3.20	$y=\log_2(x-2)^2$

4 Исходя из графика функции $y=f(x)$ построить графики функций $y=f(x-1)$, $y=f(x+2)$, $y=f(x)+3$, $y=f(x)-4$, $y=f(2x)$, $y=f(\frac{x}{3})$,

$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=2f(x)$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$ и объяснить такое построение

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
4.1	$y=\ln x$	4.11	$y=arctgx$
4.2	$y=e^x$	4.12	$y=\log_\pi x$
4.3	$y=\dfrac{1}{x}$	4.13	$y=\log_{1/2} x$
4.4	$y=\sqrt[3]{x}$	4.14	$y=\sqrt{x+2}$
4.5	$y=(x-1)^2$	4.15	$y=\|3x+1\|$
4.6	$y=\cos x$	4.16	$y=-\dfrac{2}{x}$
4.7	$y=\sin x$	4.17	$y=\dfrac{3}{x+2}$
4.8	$y=\arccos x$	4.18	$y=\log_2(x+2)^2$
4.9	$y=\arcsin x$	4.19	$y=\sin\dfrac{x}{2}$
4.10	$y=tgx$	4.20	$y=\arcsin(x-1)$

5 Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что

№		№	
5.1	$f(x+1)=x^2+2x+2$	5.11	$f(x^3)=\sqrt[3]{x}$
5.2	$f(x-1)=x^2-2x+5$	5.12	$f(\sqrt{x})=x^3+1$
5.3	$f(x-\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^4+1}{x^2}$	5.13	$f(\sqrt[3]{x})=x^9$
5.4	$f(\dfrac{1}{x})=x^3+1$	5.14	$f(x^3)=1-x^2$
5.5	$f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$	5.15	$f(e^x)=e^{2x}+e^x-1$
5.6	$f(\dfrac{x}{x+1})=x^2$	5.16	$f(\ln x)=2\ln x^2-3\ln x+1$
5.7	$f(x^2)=1-x^3$	5.17	$f(\cos x)=1+2\cos 2x$
5.8	$f(x+2)=e^{4-2x-x^2}$	5.18	$f(\sin x)=\cos^4 x-\cos 4x$
5.9	$f(3x)=\ln x^2$	5.19	$f(tgx)=\dfrac{1}{\cos^2 x+1}$

5.10	$f(\frac{x}{4})=\log_3 x^3$	5.20	$f(\lvert x\rvert)=\ln x^6-\lvert x\rvert$

Решение типовых примеров

1.20 $y=\arccos(\lg(10x))$. Функция $y=\lg(10x)$ определена, если $10x>0$, а функция $y=\arccos x$ определена при $x\in[-1;1]$. Поэтому сложная функция $y=\arccos(\lg(10x))$ будет определена при выполнении двух условий:

$\begin{cases}10x>0\\ -1\le\lg(10x)\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -1\le 1+\lg x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -2\le\lg x\le 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 10^{-2}\le x\le 10^{0}\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 0{,}01\le x\le 1\end{cases}$, что равносильно условию $x\in[0{,}01;1]$. Итак, областью определения функции $y=\arccos(\lg(10x))$ является множество $[0{,}01;1]$.

2.20 $y=\arccos(\arcsin x)$. Найдём сначала область определения этой функции. Она будет определена для x, удовлетворяющих системе

$\begin{cases}x\in[-1;1]\\ -1\le\arcsin x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ \sin(-1)\le\sin(\arcsin x)\le\sin 1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sin 1\le x\le\sin 1\end{cases}$,

что равносильно условию $x\in[-\sin 1;\sin 1]$. Поскольку функция $y=\arcsin x$ возрастает, то для $x\in[-\sin 1;\sin 1]$ она примет все значения из [-1;1] и только их. Поэтому функция $y=\arccos(\arcsin x)$ примет все значения из $[0;\pi]$ и только их. Итак, множесвом значений функции $y=\arccos(\arcsin x)$ является $[0;\pi]$.

3.20 $y=\log_2(x-2)^2$. Так как $a^2=\lvert a\rvert^2$, то функция может быть переписана в виде $y=2\log_2\lvert x-2\rvert$. Построим сначала график функции $y=\log_2\lvert x\rvert$. Он состоит из графика функции $y=\log_2 x$ и линии, симметричной этому графику относительно оси *Oy*, так как в точках *x* и –*x* функция $y=\log_2\lvert x\rvert$ принимает одно и тоже значение (чётная).

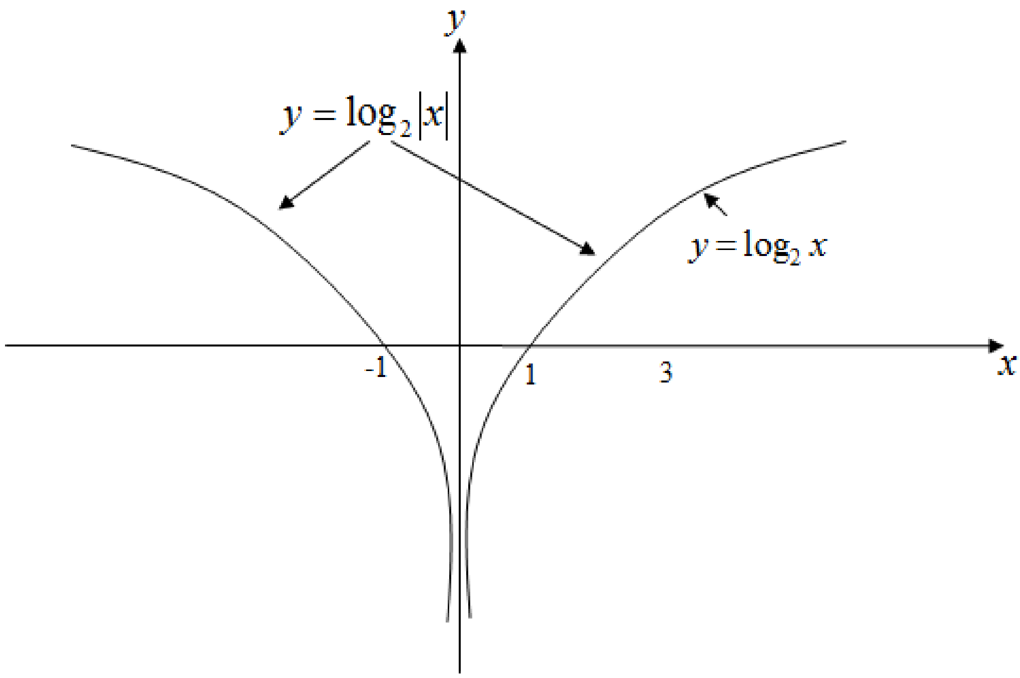

Рисунок 3 – График функции $y = \log_2|x|$

Далее построим график функции $y = \log_2|x-2|$, который получается из графика функции $y = \log_2|x|$ сдвигом вправо на 2 единицы, так как значение функции $y = \log_2|x-2|$ в точке $x+2$ совпадает со значением функции $y = \log_2|x|$ в точке x.

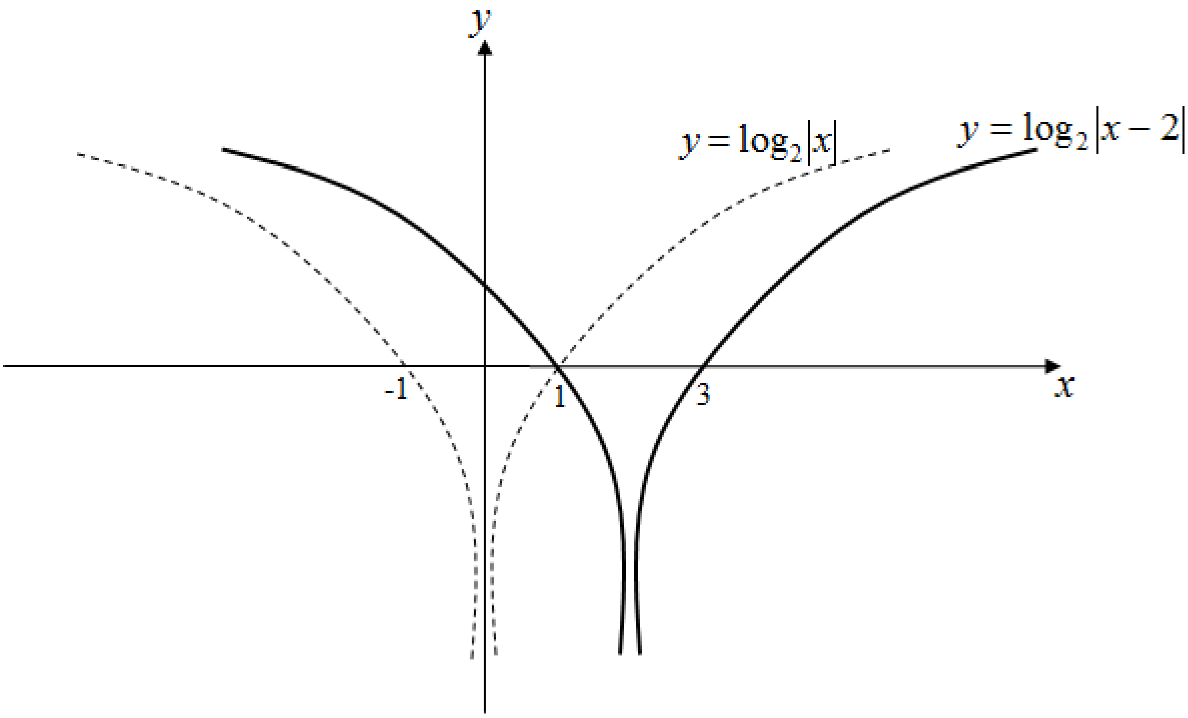

Рисунок 4 – График функции $y = \log_2|x-2|$

И наконец, строим график функции $y = 2\log_2|x-2|$, который получается из рафика функции $y=\log_2|x-2|$ растяжением в 2 раза вдоль оси *Oy* относительно точки *O*.

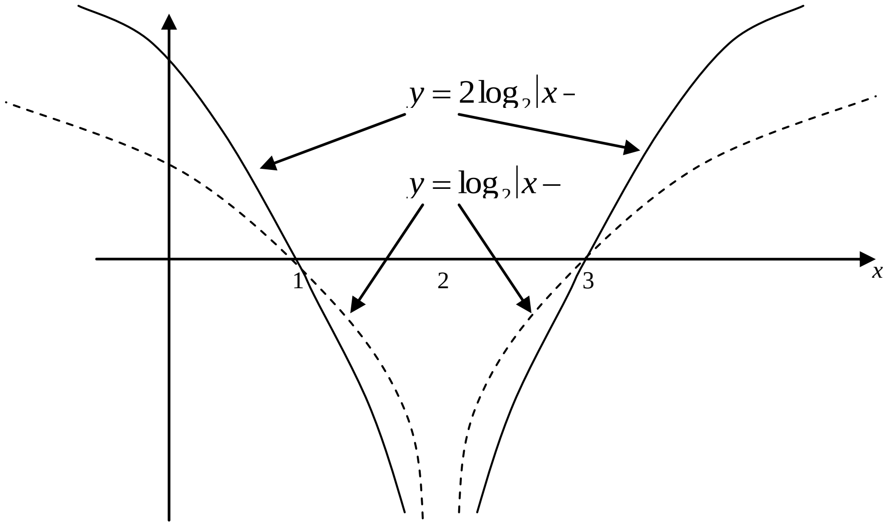

Рисунок 5 – График функции $y = 2\log_2|x-2|$

4.20 $y=\arcsin(x-1)$. В нашем случае $f(x)=\arcsin(x-1)$. Построим сначала график функции $y=\arcsin(x-1)$, исходя из графика функции $y=\arcsin x$ в одной системе координат

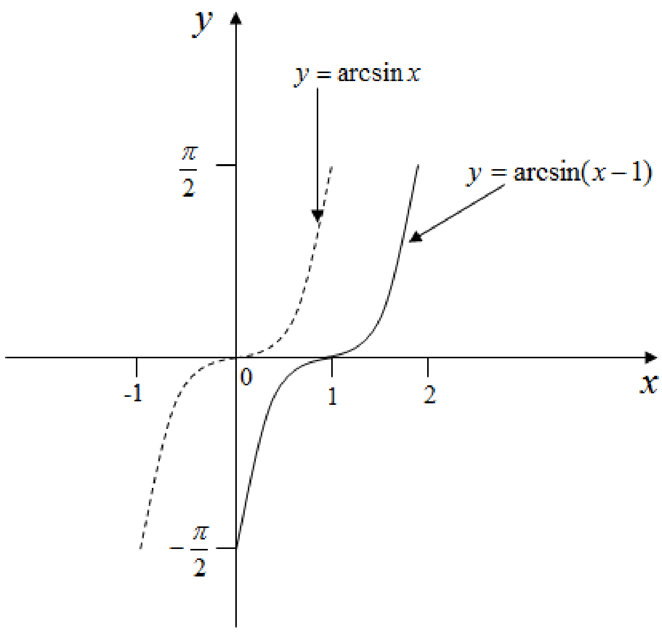

Рисунок 6 – График функции $y=\arcsin(x-1)$

Графиком функции $y=f(x)$ является множество $A=\{x, f(x)\ |x\in[0;2]\}$. Функция $y=f(x-1)$ определена при всех $x: x-1\in[0;2]$ или $x\in[1;3]$. Графиком функции $y=f(x-1)$ является множество $B=\{(x, f(x-1)) \mid x\in[1;3]\}$. Сделаем замену $x-1=z$. Тогда $B=\{(x-1+1; f(x-1)) \mid x\in[1;3]\} = \{(z+1; f(z)) \mid z\in[0;2]\}$. Поэтому каждая точка множества B получается из соответствующей точки множества A сдвигом на 1 вправо, т.е. график функции $y=f(x-1)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом на 1 вправо.

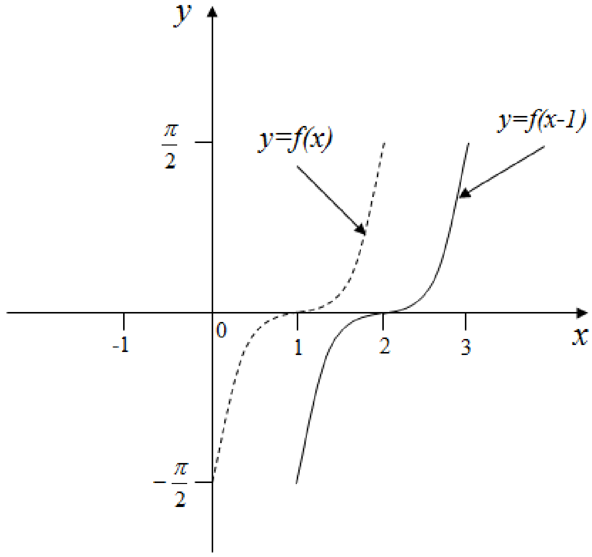

Рисунок 7 – График функции $y=f(x-1)$

График функции $y=f(x+2)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом влево на 2 единицы (объяснить)

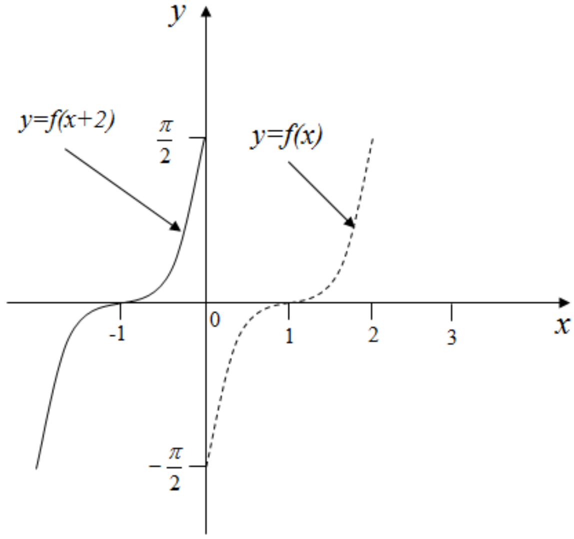

Рисунок 8 – График функции $y=f(x+2)$

График функции $y = f(x) + 3$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на 3 единицы вверх –

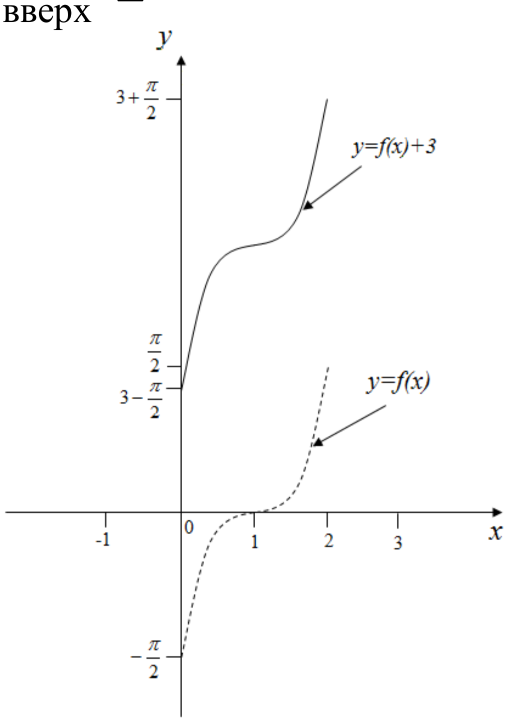

Рисунок 9 – График функции $y = f(x) + 3$

График функции $y = f(x) - 4$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на 4 единицы (объяснить)

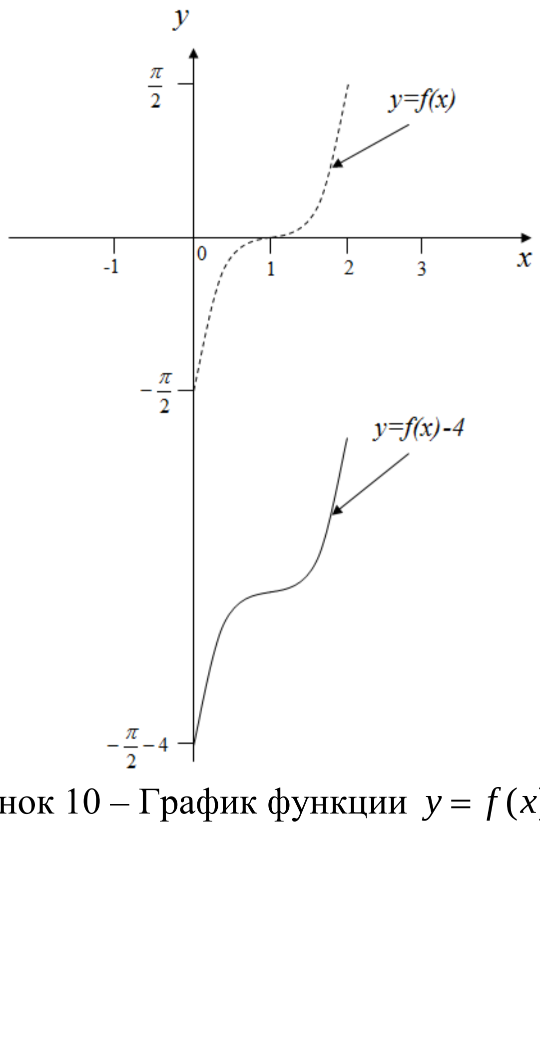

Рисунок 10 – График функции $y = f(x) - 4$

График функции $y = f(2x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием вдоль оси Ox в 2 раза (объяснить)

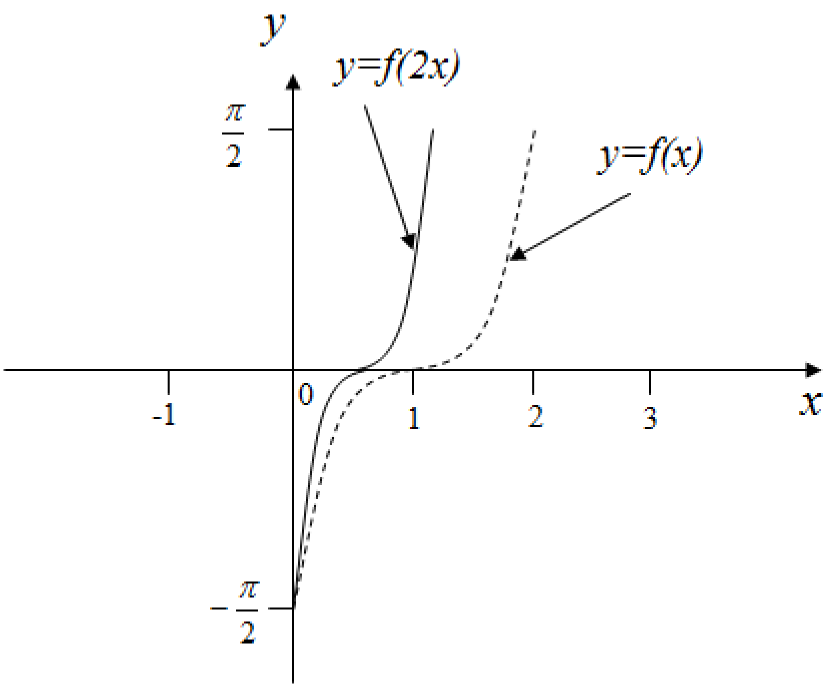

Рисунок 11 – График функции $y = f(2x)$

График функции $y = f(\frac{x}{3})$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Ox в 3 раза (объяснить)

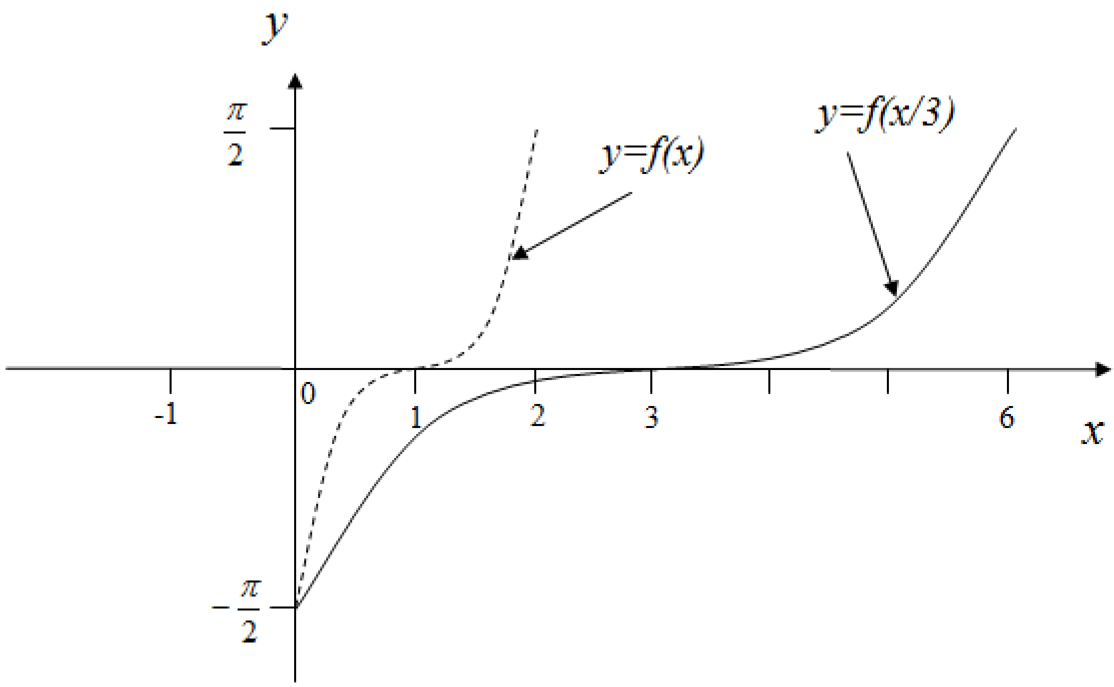

Рисунок 12 – График функции $y = f(\frac{x}{3})$

График функции $y = |f(x)|$ состоит из части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси Ox и линии, симметричной относительно оси Ox части графика $y = f(x)$, расположенной ниже оси Ox (объяснить).

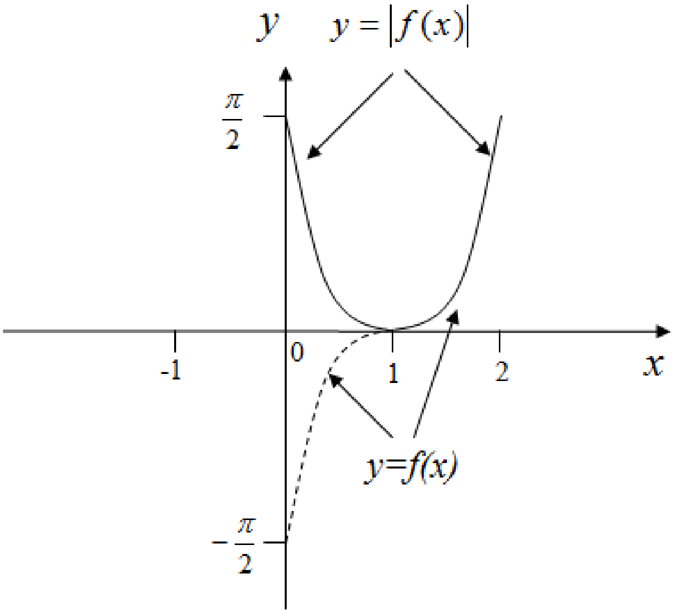

Рисунок 13 – График функции $y = |f(x)|$

График функции $y = f(|x|)$ состоит из графика функции $y = f(x)$ и линии, симметричной графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (объяснить)

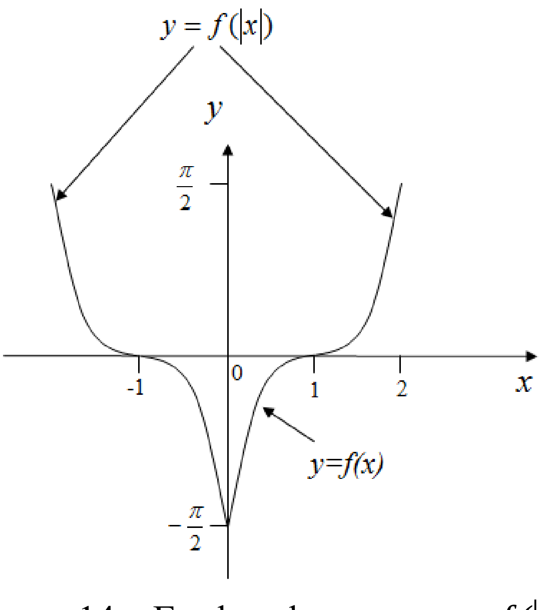

Рисунок 14 – График функции $y = f(|x|)$

График функции $y = 2f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси Oy в 2 раза (объяснить)

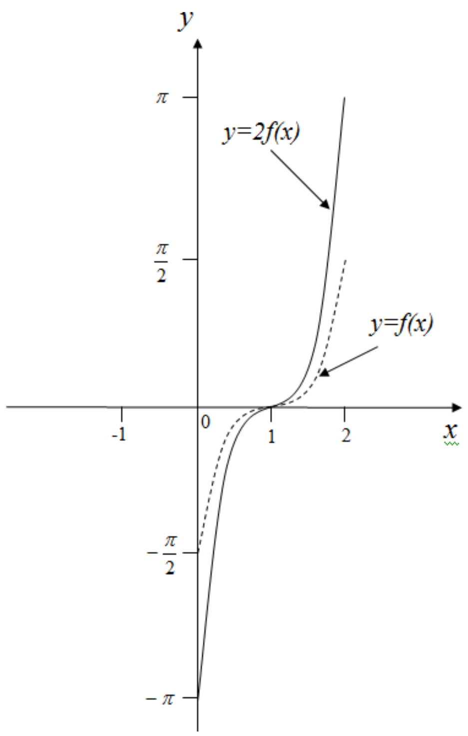

Рисунок 15 – График функции $y = 2f(x)$

График функции $y = -f(x)$ состоит из линии, симметричной относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси Ox и линии, симметричной относительно оси Ox части графика функции $y = f(x)$, расположенной ниже оси Ox (объяснить)

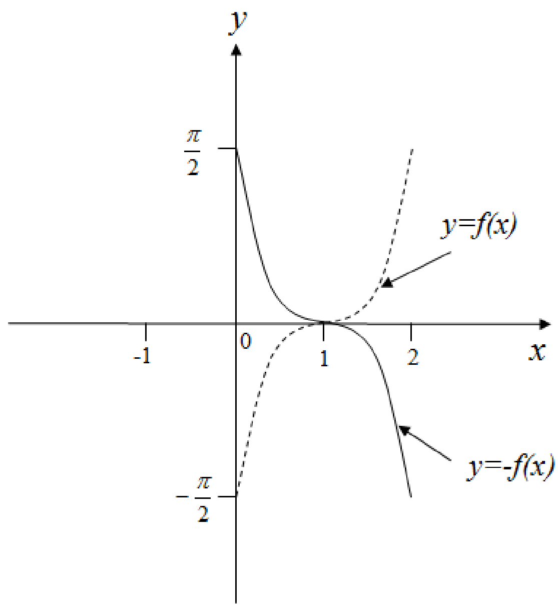

Рисунок 16 – График функции $y = -f(x)$

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси Oy (объяснить)

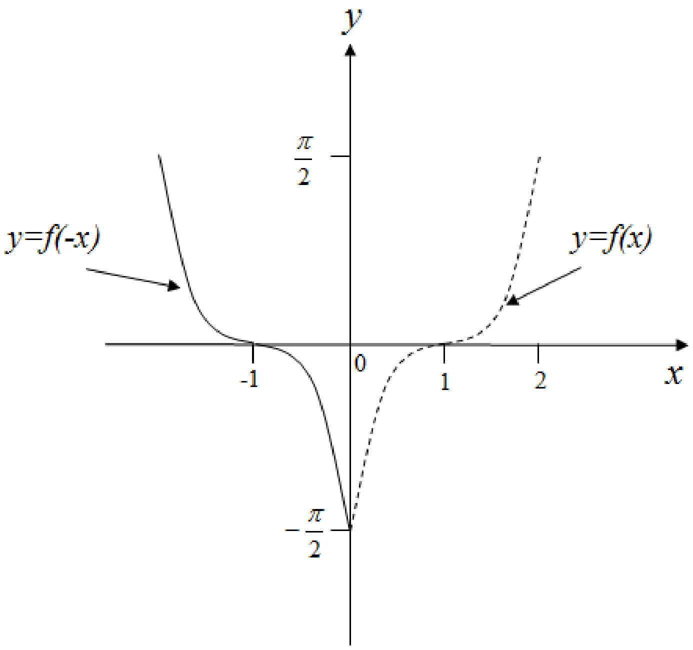

Рисунок 17 – График функции $y = f(-x)$

5.20 $f(|x|) = \ln x^6 - |x|$. Поскольку $x^6 = |x|^6$, то $f(|x|) = \ln|x|^6 - |x|$. Отсюда заключаем, что $f(x) = \ln x^6 - x, x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.

Лабораторная работа № 4
Вещественные числа

Необходимые понятия и теоремы: рациональные и иррациональные числа, действительные числа, аксиомы действительных чисел, принцип математической индукции, верхняя и нижняя грани множеств, ограниченные множества.

Литература: [1] с. 29 – 61, [2] с. 37 – 80.

1 Исходя из аксиом действительных чисел, доказать утверждения:

1.1 Если $a+b=c$, то $a=c-b$.
1.2 Число, обладающее свойством единицы, единственно.
1.3 Если $a>b$, то для любого числа c справедливо $a+c>b+c$.
1.4 Для любого числа a справедливо $a\cdot 0=0$.
1.5 Число, обладающее свойством нуля, единственно.
1.6 Число, обратное к данному отличному от нуля числу, единственно.
1.7 Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.
1.8 Если $a\cdot b=0$, то хотя бы один из сомножителей a и b равен нулю.
1.9 Число, противоположное данному, единственно.
1.10 Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $a:a=1$.
1.11 Если $a<b$, то $-a>-b$.
1.12 Для любых чисел a и b справедливо $(-a)\cdot b=-a\cdot b$.
1.13 Для любых чисел a и b справедливо $-a-b=-(a+b)$.
1.14 Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $1:(1:a)=a$.
1.15 Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a+c<b+d$.
1.16 Уравнение $a\cdot x=b,\ a\neq 0$, имеет единственное решение.
1.17 Для любой дроби $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$, и $\forall c\neq 0$ справедливо $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.
1.18 Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a-c<b-d$.
1.19 Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.
1.20 Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

2 Доказать иррациональность числа a:

№	a	№	a	№	a	№	a
2.1	$\sqrt{3}$	2.6	$\sqrt{13}$	2.11	$\sqrt{21}$	2.16	$\sqrt{43}$
2.2	$\sqrt{5}$	2.7	$\sqrt{17}$	2.12	$\sqrt{22}$	2.17	$\sqrt{51}$
2.3	$\sqrt{7}$	2.8	$\sqrt{15}$	2.13	$\sqrt{33}$	2.18	$\sqrt{57}$
2.4	$\sqrt{11}$	2.9	$\sqrt{19}$	2.14	$\sqrt{37}$	2.19	$\sqrt{50}$
2.5	$\sqrt{10}$	2.10	$\sqrt{20}$	2.15	$\sqrt{41}$	2.20	$\sqrt{2}$

3 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

№	X	№	X
3.1	$\{x \in \mathbb{Q} : \lvert x \rvert < 1\}$	3.11	$\{x \in \mathbb{Q} : \lvert x \rvert > 1\}$
3.2	$[0; 2)$	3.12	$[1; 2]$
3.3	$\{(-1)^n(1-1/n), n \in \mathbb{N}\}$	3.13	$\{1+(-1)^n/n, n \in \mathbb{N}\}$
3.4	$\{\cos n, n \in \mathbb{Z}\}$	3.14	$\{-1/3; -1/9; ..., -1/3^n, ...\}$
3.5	$\{1/3; 1/9; ..., 1/3^n, ...\}$	3.15	$\{-1/2; -3/4; ..., -(2^n-1)/2^n, ...\}$
3.6	$\{x \in \mathbb{Q} : \lvert x \rvert \geq 1\}$	3.16	$\{x \in \mathbb{Q} : \lvert x \rvert < 3\}$
3.7	$(0; 5]$	3.17	$\{\sin n, n \in \mathbb{Z}\}$
3.8	$\{n^2 e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$	3.18	$\{1/10; 1/100; ..., 1/10^n, ...\}$
3.9	$\{1/10; 1/100; ..., 1/10^n, ...\}$	3.19	$\{2; 1+1/2; ..., 1+1/n, ...\}$
3.10	$\{1/2; 3/4; ..., (2^n-1)/2^n, ...\}$	3.20	$\{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$

4 Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Найти:

4.1	$\sup\limits_m \inf\limits_n \dfrac{m-n}{m+n}$	4.8	$\inf\limits_n \sup\limits_m \dfrac{m-n}{m+3n}$	4.15	$\sup\limits_n \inf\limits_m \dfrac{m-n}{2m+n}$
4.2	$\inf\limits_n \sup\limits_m \dfrac{m-n}{m+n}$	4.9	$\sup\limits_m \inf\limits_n \dfrac{m}{7m+n}$	4.16	$\inf\limits_m \sup\limits_n \dfrac{m-n}{2m+n}$
4.3	$\sup\limits_m \inf\limits_n \dfrac{m}{m+n}$	4.10	$\inf\limits_n \sup\limits_m \dfrac{m}{7m+n}$	4.17	$\sup\limits_n \inf\limits_m \dfrac{m-n}{m+3n}$
4.4	$\inf\limits_n \sup\limits_m \dfrac{m}{m+n}$	4.11	$\sup\limits_n \inf\limits_m \dfrac{m-n}{m+n}$	4.18	$\inf\limits_m \sup\limits_n \dfrac{m-n}{m+3n}$
4.5	$\sup\limits_m \inf\limits_n \dfrac{m-n}{2m+n}$	4.12	$\inf\limits_m \sup\limits_n \dfrac{m-n}{m+n}$	4.19	$\sup\limits_n \inf\limits_m \dfrac{m}{7m+n}$
4.6	$\inf\limits_n \sup\limits_m \dfrac{m-n}{2m+n}$	4.13	$\sup\limits_n \inf\limits_m \dfrac{m}{m+n}$	4.20	$\inf\limits_m \sup\limits_n \dfrac{m}{m+n}$
4.7	$\sup\limits_m \inf\limits_n \dfrac{m-n}{m+3n}$	4.14	$\inf\limits_m \sup\limits_n \dfrac{m}{m+n}$	4.21	$\sup\limits_m \inf\limits_n \dfrac{m-n}{m+2n}$

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений при $n \in \mathbb{N}$:

5.1 $n^3 + 5n$ кратно 6.

5.2 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5.3 $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6.

5.4 $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

5.5 $7^{2n}-1$ кратно 24.

5.6 $2\cdot 2+3\cdot 5+\cdots(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

5.7 13^n+5 кратно 6.

5.8 $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\cdots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

5.9 15^n+6 кратно 7.

5.10 $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$.

5.11 9^n+3 кратно 4.

5.12 $1+6+20+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$.

5.13 $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n+1\ {}^{2}}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

5.14 $(1-\dfrac{1}{4})\cdot(1-\dfrac{1}{9})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{n+1}{2n}$.

5.15 7^n+3n-1 кратно 9.

5.16 $(1-\dfrac{4}{1})(1-\dfrac{4}{9})(1-\dfrac{4}{25})\cdots(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2})=\dfrac{1+2n}{1-2n}$.

5.17 $7^n+12n+17$ кратно 18.

5.18 $\dfrac{1}{5\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 19}+\cdots+\dfrac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\dfrac{n}{5(7n+5)}$.

5.19 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$.

5.20 $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\ \ n+1}{2}$.

6 С помощью метода математической индукции доказать неравенство при $n\in\mathbb{N}$:

6.1 $4^n>7n-5$.

6.2 $3^n-2^n\geq n$.

6.3 $4^n>n^2+3^n$.

6.4 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1.$

6.5 $y_1+y_2+\ldots+y_n\ge n,\ \ \forall y_1,y_2,\ldots,y_n>0\colon y_1y_2\ldots y_n=1.$

6.6 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2},\ \ \forall n\ge 2.$

6.7 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\ \forall n\ge 2.$

6.8 $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n\ge 2.$

6.9 $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \ x_k\ge 0, \forall k=\overline{1,n}.$

6.10 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$

6.11 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}},\ \forall n\ge 2.$

6.12 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{14},\ \forall n\ge 2.$

6.13 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ \forall n\ge 2.$

6.14 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n,\ \forall n\ge 2.$

6.15 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2},\ \forall n\ge 2.$

6.16 $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\ge\frac{1}{2},\ x_k\ge 0, \forall k=\overline{1,n},$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n\le\frac{1}{2}.$

6.17 $(2n)!>\frac{4n}{n+1}(n!)^2,\ \forall n\ge 2.$

6.18 $2^n n!<n^n,\ \forall n>2.$

6.19 $3^n>2^n+7n,\ \forall n\ge 4.$

6.20 $n\le 2^{n-1}.$

7 Построив соответствующее сечение, доказать равенство:

7.1	$\sqrt{2}+\sqrt{32}=\sqrt{50}$	7.7	$\sqrt{3}+\sqrt{75}=\sqrt{108}$	7.13	$\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{30}$
7.2	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$	7.8	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$	7.14	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{77}$
7.3	$\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$	7.9	$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$	7.15	$\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$
7.4	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}$	7.10	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}$	7.16	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$

7.5	$\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$	7.11	$\sqrt{7}+\sqrt{28}=\sqrt{63}$	7.17	$\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$
7.6	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{35}$	7.12	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{14}$	7.18	$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$

Решение типовых примеров

1.20 Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

*Решение***.** Число $-a+b$ удовлетворяет уравнению $a+x=b$. В самом деле: $a+(-a+b)=(a+(-a)+b)=0+b=b$. Других решений нет. Действительно, если $x\in\mathbb{R}$ и является решением уравнения $a+x=b$, то

$$\begin{aligned} -a+b&=-a+b,\\ -a+(a+x)&=-a+b,\\ (-a+a)+x&=-a+b,\\ 0+x&=-a+b,\\ x&=-a+b. \end{aligned}$$

2.20 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

*Решение***.** Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда m есть четное число, и, следовательно, представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Следовательно, n^2 есть четное число, тогда и n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$

3.20 Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества

$$X=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\; m,n\in\mathbb{N}, m<n\right\}$$

Решение.

Шаг 1. Покажем, что $\inf X = 0$, то есть, 1) $\forall x = \frac{m}{n} \in X$, $\frac{m}{n} > 0$ (0 – нижняя граница X); 2) $\forall x^* > 0 \; \exists \overline{x} \in X$ такой, что $\overline{x} < x^*$ (0 – наибольшая из нижних границ). Утверждение 1) очевидно.

Докажем утверждение 2). Представим x^* в виде десятичной дроби $x^* = a, x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} ...$. Если $a > 0$, то неравенство $\overline{x} < x^*$ очевидно, так как множество X состоит из правильных дробей. Если $a = 0$, то $\exists n$ такой, что $x_n \neq 0$, и поэтому $\overline{x} = 0, x_1 x_2 ... x_{n-1}(x_n - 1)...$ – искомое, то есть, $\overline{x} < x^*$.

Шаг 2. Покажем, что $\min X$ не существует. По определению, наименьшим элементом множества X называется такое число $c \in X$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \geq c$. Заметим, что $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n} \notin X$, 0– не натуральное число, и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 3. Покажем, что $\sup X = 1$, то есть 1) $\forall x = \frac{m}{n} \in X$, $\frac{m}{n} < 1$ (1 – верхняя граница X); 2) $\forall x^* < 1 \; \exists \overline{x} \in X$ такой, что $\overline{x} > x^*$ (1 – наименьшая из верхних границ). Утверждение 1) очевидно, так как X содержит только правильные дроби.

Докажем утверждение 2). Представим x^* в виде десятичной дроби $x^* = 0, x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} ...$. Тогда $\exists n$ такой, что $x_n \neq 0$, и поэтому $\overline{x} = 0, x_1 x_2 ... x_{n-1}(x_n + 1)...$ – искомое, то есть, $\overline{x} > x^*$.

Шаг 4. . Покажем, что $\max X$ не существует. По определению, наибольшим элементом множества X называется такое число $c \in X$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq c$. Заметим, что $\sup X \notin X$, так как $\frac{m}{n} = 1$ при $m = n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

4.20 Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Найти $\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$.

Решение. Заметим, что если $\exists \max X$ и $\min X$, то $\sup X = \max X$, $\inf X = \min X$.

Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $0 \leq \frac{m}{m+n} \leq \frac{m}{m+1}$. Следовательно, $\max\limits_n \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1}$, а значит, $\sup\limits_n \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1}$

Для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется $\frac{1}{2} \le \frac{m}{m+1} < 1$. Следовательно, $\min\limits_{m} \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$, а значит, $\inf\limits_{m} \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$.

5.20 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение.

Шаг 1. При $n = 1$ равенство очевидно.

Шаг 2. Предположим, что равенство верно для натурального числа $n = k$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Шаг 3. Проверим верность утверждения для натурального числа $n = k + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \left[\!\left[\begin{matrix} \textit{учитывая} \\ \textit{шаг } 2 \end{matrix} \right]\!\right] = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$
$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n = k$ вытекает его истинность при $n = k + 1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

6.20 С помощью метода математической индукции доказать неравенство $n \le 2^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Решение.

Шаг 1 При $n = 1$ неравенство верно, т.к. $1 \le 1$.

Шаг 2. Предположим, что неравенство верно для $n = k$, то есть $k \le 2^{k-1}$.

Шаг 3. Докажем, что неравенство верно для $n = k + 1$:

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \ge \left[\!\left[\begin{matrix} \textit{учитывая} \\ \textit{шаг } 2 \end{matrix} \right]\!\right] \ge 2 \cdot k \ge k + k \ge k + 1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n = k$ вытекает его истинность при $n = k + 1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

7.20 Построив соответствующее сечение, доказать равенство

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}.$$

Решение. Для удобства обозначим $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \alpha$. Необходимо доказать, что $\alpha = \sqrt{18}$. Покажем, что совпадают верхние классы сечений, определяющие числа α и $\sqrt{18}$. Сначала построим сечения, определяющие действительные числа $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$. Рассмотрим верхние классы этих сечений:

$$\sqrt{2} = A \mid A'; \quad A' = \{a' \mid a'^2 > 2, a' > 0\};$$
$$\sqrt{8} = B \mid B'; \quad B' = \{b' \mid b'^2 > 8, b' > 0\};$$
$$\sqrt{18} = C \mid C'; \quad C' = \{c' \mid c'^2 > 18, c' > 0\}.$$

Теперь определим, какой верхний класс определяет число $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{8}$. Пусть α производит сечение $D \mid D'$. Рассмотрим рациональные числа $a', a, b', b,$ удовлетворяющие неравенствам $a < \sqrt{2} < a'$ и $b < \sqrt{8} < b'$, где $a \in A,\ a' \in A',\ b \in B,\ b' \in B'$.

По определению, суммой $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ называется число, которое содержится в следующих рациональных границах:

$$a + b < \sqrt{2} + \sqrt{8} < a' + b'.$$

Из определения суммы двух вещественных чисел следует, что в верхний класс D' сечения, определяющего число $\sqrt{2} + \sqrt{8}$, входят всевозможные суммы вида $a' + b'$:

$$D' = \{d' \mid d' = a' + b', a' \in A', b' \in B'\}.$$

Докажем совпадения классов D' и C'. Для этого вначале покажем, что $D' \subset C'$. Пусть $d' \in D'$, тогда $\alpha' = a' + b'$, $a' \in A'$, $b' \in B'$ и $a'^2 > 2$, $a' > 0$, $b'^2 > b$, $b' > 0$.

Ясно, что $d' > 0$. Докажем, что $d'^2 > 18$. Так как $a'^2 b'^2 > 16$, то $a'b' > 4$ и $2a'b' > 8$. Следовательно,

$$d'^2 = (a' + b')^2 = a'^2 + 2a'b' + b'^2 > 2 + 8 + 8,$$

т. е. $d'^2 > 18$, $d' \in C \Rightarrow D' \subset C'$.

Покажем, что $C' \subset D'$. Пусть $c' > 0$, $c' \in C'$, т. е. $c'^2 > 18$. Положим $c'^2 - 18 = h$ (h –рациональное число) и выберем $a' > 0$ так, чтобы

$$2 < a'^2 < 2 + \frac{1}{6}h,\ a'^2 < 3 \text{ и } b' = c' - a'.$$

Тогда $b' > 0$ и $b'^2 = c'^2 + a'^2 - 2c'a'$. Так как $c'^2 = 18 + h$, а $4a'^2 < 4(2 + h/6) = 8 + 2h/3$, то

$$4c'^2 a'^2 < (8 + 2h/3)(18 + h) = 144 + 20h + 2h^2/3 <$$
$$< 144 + 20h + 25h^2/36 = (12 + 5h/6)^2,$$

т.е. $2c'a' < 12 + 5h/6$, а $a'^2 + c'^2 > 20 + h$, следовательно, $b'^2 > 8 + h/6$, т.е. $b'^2 > 8$ или $c' = a' + b'$, где $a' \in A'$, $b' \in B'$ и верхний класс C' содержится в классе D'. Так как $C' \subset D'$ и $D' \subset C'$, то классы C' и D' совпадают. Верхние классы D' и C' сечений совпадают, значит, совпадают и нижние классы D и C и, следовательно, $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.

Лабораторная работа № 5
Предел последовательности: определение, свойства

Необходимые понятия и теоремы: определение числовой последовательности, ограниченные и неограниченные последовательности, монотонные последовательности, определение предела последовательности, сходящиеся и расходящиеся последовательности, свойства сходящихся последовательностей.

Литература: [1] с. 81 – 87, [4] с. 87 – 111.

1 Напишите пять первых членов последовательности x_n:

№	x_n	№	x_n	№	x_n	№	x_n
1.1	$\frac{1}{2n+1}$	1.6	$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$	1.11	$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$	1.16	$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$
1.2	$\frac{n+2}{n^3+1}$	1.7	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	1.12	$\frac{5^n+(-3)^n}{n^2}$	1.17	$\frac{\cos n}{n+1}$
1.3	$\frac{n}{2^{n+1}}$	1.8	$(-1)^n \frac{1}{n}$	1.13	$\frac{5^{n+1}+(-3)^n}{2^n}$	1.18	$((-1)^n-1)n$
1.4	$(-1)^n n$	1.9	$\cos n$	1.14	$\sin n$	1.19	$(-1)^n+6n$
1.5	$\frac{n+2}{n+3}$	1.10	$\frac{\ln n}{2^n}$	1.15	$\frac{\sin n}{n^2}$	1.20	$(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$

2 Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются:

2.1	числа $\{8; 14; 20; 26; 32; \ldots\}$	2.11	числа $\{1/2; 1/2; 3/8; 1/4; 5/32; \ldots\}$
2.2	корни уравнения $\cos \pi x = 0$	2.12	корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 1$
2.3	числа $\{1; 3; 1; 3; 1; \ldots\}$	2.13	числа $\{2; 3/2; 4/3; 5/4; 6/5; \ldots\}$
2.4	корни уравнения $\sin \pi x = 0$	2.14	корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 0$
2.5	числа $\{5; 7; 11; 19; 35; \ldots\}$	2.15	числа $\{-0{,}5; 1{,}5; -4{,}5; 13{,}5; \ldots\}$
2.6	корни уравнения $\cos \pi x = 1$	2.16	корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 0$
2.7	числа $\{0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; \ldots\}$	2.17	числа $\{-2; -1/2; -4/3; -3/4; \ldots\}$
2.8	корни уравнения $\sin \pi x = 1$	2.18	корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 1$
2.9	числа $\{1; 2; 6; 24; 120; \ldots\}$	2.19	числа $\{-1/10; 1/100; -1/1000; \ldots\}$
2.10	корни уравнения $\cos \pi x = -1$	2.20	корни уравнения $\sin \pi x = -1$

3 Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

№	x_1	x_{n+1}	№	x_1	x_{n+1}
3.1	1	x_n+2^n	3.11	1/3	$1/(1+x_n)$
3.2	0	$(x_n+1)/(n+1)$	3.12	1	$3\cdot x_n+5\cdot 2^n$
3.3	2	$x_n+3\cdot 2^n$	3.13	2	$x_n/(4+x_n)$
3.4	1	$(n+1)(x_n+1)$	3.14	1	$x_n/(1+x_n)$
3.5	1/2	$1/(2-x_n)$	3.15	3	$(n+1)(x_n+1)$
3.6	1	$3x_n+2^n$	3.16	0	$x_n+7\cdot 2^n$
3.7	3	$x_n/(1+x_n)$	3.17	1	$x_n/(5+x_n)$
3.8	1/2	$2/(3-x_n)$	3.18	2	$4x_n+2^n$
3.9	1	$2\cdot x_n+3\cdot 2^n$	3.19	3	$x_n/(6+x_n)$
3.10	5	$x_n/(5+x_n)$	3.20	1	$x_n+5\cdot 2^n$

4 Выяснить, является ли последовательность a_n ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

№	a_n	№	a_n	№	a_n
4.1	$\frac{1}{n+1}$	4.8	$\frac{\arcsin n}{n}$	4.15	$\frac{\cos n}{n^2}$
4.2	$\frac{(-1)^n}{n^2}$	4.9	$\sin\frac{1}{n^2}$	4.16	$\frac{2^n+(-1)^n}{n}$
4.3	2^n	4.10	3^{-n}	4.17	$\sqrt{n+2}$
4.4	$\frac{2^n}{n!}$	4.11	$\frac{n+(-1)^n}{3n-1}$	4.18	$\frac{\mathrm{arctg}\, n}{n}$
4.5	$\lg(1+n)$	4.12	n^2-2n+4	4.19	$n^2-(-1)^n$
4.6	$\frac{n+(-1)^n}{n}$	4.13	$\frac{(-1)^n}{n!}$	4.20	$(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$
4.7	$(-1)^n n$	4.14	$(-1)^n n+n$	4.21	$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

5 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Указать для $\varepsilon = 2; 0{,}01$ числа N_ε.

№	a_n	a	№	a_n	a
5.1	$\frac{n+1}{n+4}$	1	5.11	$\frac{3n+1}{n+6}$	3
5.2	$\frac{2n-2}{n+4}$	2	5.12	$\frac{3n\sin 3n}{n-6}$	3
5.3	$\frac{n\cos n}{n+3}$	1	5.13	$\frac{n-1}{n+5}$	1
5.4	$\frac{2n+1}{n-4}$	2	5.14	$\frac{4n+1}{2n+1}$	2
5.5	$\frac{n-3}{2n+1}$	$\frac{1}{2}$	5.15	$\frac{n\sin n}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$
5.6	$\frac{\cos n}{n-3}$	0	5.16	$\frac{2n-3}{2n+5}$	1
5.7	$\frac{2n+6}{2n+7}$	1	5.17	$\frac{2n-3}{n+4}$	2
5.8	$\frac{2n-1}{n+4}$	2	5.18	$\frac{2n+1}{n-6}$	2
5.9	$\frac{n-1}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$	5.19	$\frac{3n\cos n!}{3n+5}$	1
5.10	$\frac{n+1}{n+4}$	1	5.20	$\frac{n}{n+1}$	1

6 Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

№	a_n	a	№	a_n	a
6.1	$\frac{3n+1}{n^2+6}$	1	6.11	$\frac{n+1}{n+4}$	3
6.2	$\frac{3n^2}{n-6}$	2	6.12	$\frac{2n-2}{n+4}$	3
6.3	$\frac{n-1}{n^2+5}$	1	6.13	$\frac{n^2}{n^3+3}$	1
6.4	$\frac{n+1}{2n+1}$	2	6.14	$\frac{2n+1}{6n-4}$	2
6.5	$\frac{n^2}{2n+4}$	$\frac{1}{2}$	6.15	$\frac{n-3}{2n^2+1}$	$\frac{1}{2}$
6.6	$\frac{2n-3}{2n+5}$	0	6.16	$\frac{n^2}{n-3}$	1

6.7	$\frac{2n-3}{n+4}$	1	6.17	$\frac{2n+6}{2n+7}$	2
6.8	$\frac{n+1}{n-6}$	2	6.18	$\frac{n-1}{n+4}$	2
6.9	$\frac{3n}{3n+5}$	$\frac{1}{2}$	6.19	$\frac{n-1}{2n+4}$	1
6.10	$\frac{n+3}{2n+4}$	1	6.20	$\frac{2n+1}{3n-1}$	$\frac{1}{2}$

7 Вычислить пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

№	a_n		
	А	Б	В
7.1	$\frac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$	$\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$	$\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$
7.2	$\frac{3n^2-5}{6n^2+n-2}$	$\frac{3+0{,}5^{n+1}}{0{,}3^n+5}$	$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$
7.3	$\frac{n^3+n+2}{n^3+n\ \ -1}$	$\frac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$	$\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$
7.4	$\frac{n^3-4n^2+n-1}{2n^3+n^2-3}$	$\frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$	$\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!-(3n+1)!}$
7.5	$\frac{n^2-2n+4}{n^2-n^2+3}$	$\frac{2+0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n+1}$	$\frac{(2n+2)!-(2n+1)!}{(2n+3)!}$
7.6	$\frac{4n^2-3n+1}{n^2+n-4}$	$\frac{(-1)^n\cdot 3^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}$	$\frac{(5n-1)!+(5n)!}{(5n+2)!}$
7.7	$\frac{n^3+1}{n^3+n-4}$	$\frac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n-7^n}$	$\frac{n!+(n+2)!}{n!(3n^2+5)}$
7.8	$\frac{2n^3-n+3}{n^3+n^2-1}$	$\frac{4+0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n+5}$	$\frac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(6n^2+5n)(2n-1)!}$
7.9	$\frac{2n^2+n+4}{n^2+n\ \ +1}$	$\frac{(-1)^n\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 5^{n+1}}$	$\frac{(4n+3)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+3)!}$
7.10	$\frac{4n^3-2n+3}{2n^3+n^2+5n+1}$	$\frac{2\cdot 4^{n+1}+3^{n+1}}{2\cdot 4^n-3^n}$	$\frac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!}$

7.11	$\dfrac{4n^3-2n+7}{2n^3+n^2-3}$	$\dfrac{4\cdot 0,6^{n+1}}{0,5^n+1}$	$\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+1)!(3n+5)}$
7.12	$\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+n\ \ -3}$	$\dfrac{(-1)^n\cdot 5^{n+1}-3^{n+2}}{3^n-(-1)^n\cdot 5^n}$	$\dfrac{(7n+1)!+(7n+2)!}{(7n+3)!}$
7.13	$\dfrac{5n^2-2n+1}{n^2+4n-8}$	$\dfrac{4^{n+1}+3\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 4^n-7^n}$	$\dfrac{(4n-1)!-(4n+1)!}{(4n)!+(4n+1)!}$
7.14	$\dfrac{3n^2+7n+3}{n^3+5}$	$\dfrac{3+5\cdot 0,7^{n+1}}{0,5^n-7}$	$\dfrac{(3n-1)!-(3n+1)!}{(3n)!(n+2)}$
7.15	$\dfrac{5n^2+n+7}{n^2+2n^2-3}$	$\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 9^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 9^{n+1}}$	$\dfrac{(5n-1)!+(5n+1)!}{(6n^2+n-7)(5n-1)!}$
7.16	$\dfrac{n^3+5n-1}{2n^3+n^2-5}$	$\dfrac{11^{n+1}+9^n}{11^n-9^n}$	$\dfrac{2\cdot(4n)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+1)!}$
7.17	$\dfrac{n^2-3}{n^2+4n-2}$	$\dfrac{0,3^n+0,7^{n+2}}{0,5^n+5}$	$\dfrac{(8n+1)!-(8n+3)!}{(8n+5)!}$
7.18	$\dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$	$\dfrac{100\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-25\cdot 5^{n+1}}$	$\dfrac{3n!+(n+1)!}{n!(n^2+5)}$
7.19	$\dfrac{4n^2+3n-9}{2n^2+n-4}$	$\dfrac{3\cdot 5^{n+1}+8^{n+1}}{5^n-8^n}$	$\dfrac{9n!+(n+1)!}{n!(3n-1)}$
7.20	$\dfrac{8n-5}{2n+3}$	$\dfrac{11+0,9^{n+1}}{0,5^n+5}$	$\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}$

8 Формулируя определение предела последовательности, студент вместо

8.1 «Выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n-a\le\varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 5 является пределом последовательности 1, 1, …, 1… .

8.2 «Найдется такое N_ε, что при $n\ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Найдется такое N_ε , что выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$». Приведите пример не сходящейся последовательности, которая имеет предел при таком определении?

8.3 «Найдется такое N_ε» сказал: «При всех N_ε». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.4 «Для любого $\varepsilon>0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon>0$». Доказать, что при таком определении последовательность 2, 2, 2, … имеет предел 7.

8.5 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого ε». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении?

8.6 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 6 является пределом последовательности 3, 3, …, 3… .

8.7 «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого n». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.8 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении? Если возможно, привести пример.

8.9 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n$ имеет предел 0.

8.10 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.11 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности 4, 4, …, 4… .

8.12 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность 4, 4, 4, … имеет предел 10.

8.13 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.

8.14 «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого $n > N_\varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

8.15 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-2)^n$ имеет предел 0.

8.16 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого $\varepsilon \ge 0$». Какие последовательности не будут иметь предел при таком определении? Привести пример.

8.17 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 8 является пределом последовательности 5, 5, …, 5….

8.18 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n + 1$ имеет предел 0.

8.19 «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 10 является пределом последовательности 7, 7, …, 7….

8.20 «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел 0.

Решение типовых примеров

1.20 Напишите пять первых членов последовательности

$$x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2},$$

Решение. Для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{9}$, $x_4 = -\frac{5}{16}$, $x_5 = \frac{6}{25}$.

2.20 Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются корни уравнения $\sin \pi x = -1$.

Решение. Решая уравнение $\sin \pi x = -1$, получаем

$$\pi x = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $x_n = 1/2 + 2n, n \in \mathbb{N}$.

3.20 Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 5 \cdot 2^n$.

Решение. Подставляя в рекуррентную формулу вместо x_n его выражение через x_{n-1}, затем вместо x_{n-1} его выражение через x_{n-2} и так далее, получим

$$x_{n+1} = x_n + 5\cdot 2^n = (x_{n-1} + 5\cdot 2^{n-1}) + 5\cdot 2^n = x_{n-1} + 5\cdot(2^{n-1} + 2^n) =$$
$$= (x_{n-2} + 5\cdot 2^{n-2}) + 5\cdot(2^{n-1} + 2^n) = x_{n-2} + 5\cdot(2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n) = \ldots$$
$$= 1 + 5\cdot(2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n) = 1 + 5\cdot\frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 1 + 10\cdot(2^n - 1).$$

Таким образом, формула общего члена последовательности имеет вид:

$$x_n = 1 + 10\cdot(2^{n-1} - 1).$$

4.20 Выяснить, является ли последовательность a_n ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$$

Решение. Поскольку $|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}\right| = \frac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность является ограниченной, а, значит, ограниченной сверху и снизу.

Так как $a_3 > a_4$ и $a_4 < a_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

5.20 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$. Указать для $\varepsilon = 2; 0{,}01$ числа N_ε.

Решение. Приведем определение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\,\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\;\; \forall n \ge N_\varepsilon : \left|a_n - a\right| \le \varepsilon.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Найдем номер N_ε.

Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| \le \varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1} \le \varepsilon$. Отсюда $n \ge \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

Если взять $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ (так как при $\varepsilon \ge 1$ получим $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] = 0 \notin \mathbb{N}$), то для всех номеров $n \ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| \le \varepsilon$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 99, 100, …, а при $\varepsilon = 2$ неравенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.20 Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-1} \ne \dfrac{1}{2}$.

Решение. Построим отрицание определения предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne a \;\Leftrightarrow\; \exists\varepsilon > 0\,\forall\, N \in \mathbb{N}\;\; \exists n \ge N : \left|a_n - a\right| > \varepsilon$$

Оценим $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1} - \dfrac{1}{2}\right|$. Будем иметь:

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+3}{2\cdot(3n-1)}\right| = \frac{n+3}{2\cdot(3n-1)} > \frac{n+3}{6n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{6}, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$ имеем $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1} - \dfrac{1}{2}\right| > \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Это означает, что число $1/2$ не является пределом данной последовательности.

7.20 Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-5}{2n+3}$;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^{n}+5}$**;**

В) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}$**.**

Решение.

А) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}=\left[\!\left[\begin{array}{l}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на n}\end{array}\right]\!\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{8-0}{2+0}=\frac{8}{2}=4;$$

Б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^{n}+5}=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(11+0{,}9^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}5^{n}+5)}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}11+\lim\limits_{n\to\infty}0{,}9^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}0{,}5^{n}+\lim\limits_{n\to\infty}5}=\frac{11+0}{0+5}=\frac{11}{5};$$

В) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(n+1)!}{(n+3)!}+\frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right)=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}+\frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)}\right)=\text{ по свойствам пределов }=$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)} = 0\,.$$

8.20 «Для любого $\varepsilon > 0$» – «хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел 0.

Решение. Приведем определение предела последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\,\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_\varepsilon : \left|x_n - a\right| \leq \varepsilon\,.$$

Заметим, что последовательность $(-1)^n - 1$ не сходится, так как при $n = 2k,\, k \in \mathbb{N},$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, а при $n = 2k+1,\, k \in \mathbb{N},$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$.

С другой стороны, согласно определению предела последовательности, данному студентом, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \exists\varepsilon > 0\,\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_\varepsilon : \left|x_n - a\right| \leq \varepsilon\,.$$

Возьмем, например, $\varepsilon = 5$. При $n = 2k,\, k \in \mathbb{N},$ имеем $\left|(-1)^n - 1 - 0\right| = 0 < 5$. При $n = 2k+1,\, k \in \mathbb{N},$ получим $\left|(-1)^n - 1 - 0\right| = 2 < 5$. Тогда для $\varepsilon = 5$ и $N_\varepsilon = 1$ при $\forall n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|x_n - 0\right| \leq \varepsilon$. Следовательно, последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел, равный нулю, при таком определении.