УДК 533.9

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ В ПЛАЗМЕННОЙ СТРУЕ

Ю. А. Медведев, В. М. Сорокин,
Б. М. Степанов и Г. В. Федорович

Предложен метод определения характеристик аксиально симметричной функции распределения электронов по скоростям в нерелятивистском потоке плазмы по измерению спектрального распределения рассеянного света.

Определение функции распределения электронов по скоростям методом томсоновского рассеяния света дано в [1, 2]. Однако в этих работах предполагалось, что функция распределения электронов по скоростям изотропна. В отличие от этого, например, в плазменной струе или в плазме, помещенной в магнитное поле, функция распределения существенно анизотропна. Ниже рассмотрен метод, позволяющий получать информацию о функции распределения электронов по скоростям по измерению спектральной интенсивности рассеянного света. Предлагаемый в работе метод позволяет в явном виде выразить термодинамические параметры через спектральные интенсивности рассеянного света любой нерелятивистской аксиально симметричной электронной системы как стационарной, так и не стационарной. Метод основан на том, как будет показано ниже, что при измерении интенсивности рассеянного света под определенным углом на аксиально симметричной электронной системе сдвиг частоты рассеянного света зависит от скорости электронов только вдоль оси симметрии или только от скорости электронов в поперечном направлении. Правило выбора упомянутых углов изложено ниже.

Рассмотрим некогерентное рассеяние света на электронах плазмы. Электроны считаются свободными, т. е. коллективными эффектами пренебрегаем. В этом случае плазма должна быть достаточно разреженной и нагретой. Именно, должно выполняться условие

$$\frac{\lambda_0}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{kT}}\ll 1, \tag{1}$$

где λ_0 — длина волны падающего света, ϑ — угол рассеяния, n — концентрация электронов, T — температура электронов. Пренебрегаем релятивистскими эффектами, т. е. величинами второго порядка малости по v/c, где v — скорость электрона, c — скорость света.

В декартовой системе координат ζ, ξ, η совместим плоскость (ξ, η) с плоскостью рассеяния (рис. 1), а импульс налетающего фотона направим на оси η. Законы сохранения приводят к следующему соотношению:

$$\omega_0\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{n}_0}{c}\right)=\omega\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)+\omega\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}(1-\cos\vartheta), \tag{2}$$

где ω_0, $\mathbf{n}_0$, ω, $\mathbf{n}$ — частота и направление падающего и рассеянного фотона, ε — энергия электрона. Спектр падающего излучения принадлежит видимому свету, поэтому выполняются соотношения $\Delta\omega=\omega_0-$ $-\omega\approx\omega_0 v/c, \hbar\omega_0 \ll \varepsilon$, которые позволяют упростить равенство (2). Именно

$$\omega_0(\mathbf{vn}_0)-\omega(\mathbf{vn})=c\Delta\omega. \tag{3}$$

Равенство (3) неявно определяет величину и направление скорости электрона, который рассеивает фотон на угол ϑ со сдвигом частоты $\Delta\omega$. Условие $\Delta\omega=\mathrm{const}$ и $\vartheta=\mathrm{const}$ выделяет в пространстве скоростей плоскость S (рис. 2). Те электроны, конец вектора скорости которых лежит на этой плоскости, рассеивают свет над определенным углом ϑ с определенным сдвигом частот $\Delta\omega$. Равенство (3) позволяет получить уравнение плоскости S, параллельной оси v_η,

$$v_\eta=\frac{\omega\cos\vartheta}{\omega_0-\omega\cos\vartheta}\vartheta_\xi+\frac{c\Delta\omega}{\omega_0-\omega\cos\vartheta}. \tag{4}$$

Плоскость (4) пересекает ось v_ξ под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\omega\sin\vartheta}{\omega_0-\omega\cos\vartheta}$ в точке $c\Delta\omega/\omega\sin\vartheta$, а ось v_η в точке $c\Delta\omega/(\omega_0-\omega\cos\vartheta)$. При изменении $\Delta\omega$

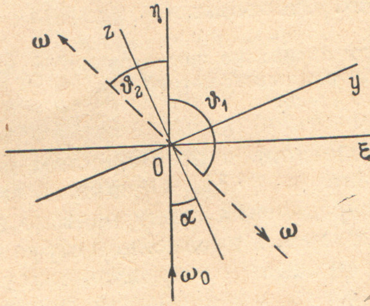

Рис. 1.

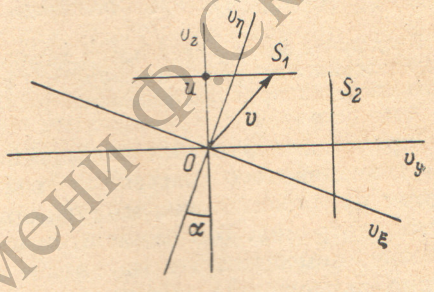

Рис. 2.

плоскость (4) поворачивается вокруг оси, нормальной плоскости (v_η, v_ξ) и проходящей через точку с координатами $v_\eta=c$, $v_\xi=c\,(1-\cos\vartheta)/\sin\vartheta$. Ось вращения плоскости (4) в пространстве скоростей расположена на расстоянии большем c от начала координат. Следовательно, изменению частоты рассеянного света в интервале $\Delta\omega\ll\omega_0$ соответствует вращение плоскости вокруг оси на малый угол. Для малых скоростей (в первом приближении по v/c), т. е. в окрестности начала координат, можно считать, что плоскость (4) смещается параллельно самой себе при изменении частоты $\Delta\omega$.

Зададим скорость электрона точкой в пространстве скоростей. Функция распределения электронов по скоростям $f(\mathbf{v}, t)$ есть плотность этих точек. Условие нормировки функции распределения имеет вид

$$\int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}, t)=\int d\mathbf{v}\int d\mathbf{r} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)=N(t),$$

где $N(t)$ — число электронов. Интенсивность рассеянного света под углом ϑ в интервале частот $\omega\div\omega+d\omega$ пропорциональна количеству точек в пространстве скоростей, заключенных в тонком плоском слое, образованном плоскостью S при смещении ее из положения, соответствующего частоте ω, в положение, соответствующее частоте $\omega+d\omega$. При изменении ω плоский слой перемещается параллельно самому себе в пространстве скоростей. Количество точек в этом слое изменяется при смещении в соответствии с функцией распределения, что приводит к аналогичному изменению интенсивности рассеянного света. Следовательно, измерение спектральной интенсивности рассеянного света дает возможность получать информацию о функции распределения.

При изменении ω изменяется расстояние u от начала координат до плоскости S в пространстве скоростей (рис. 2). Из уравнения (4) следует зависимость u от ϑ и ω

$$u=c\,|\Delta\omega|\,(\omega_0^2+\omega^2-2\omega_0\omega\cos\vartheta)^{1/2}\approx c\,|\Delta\omega|/2\omega_0\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

При измерении спектра рассеянного света под определенным углом ϑ малому изменению частоты $d\omega$ соответствует малое смещение du плоскости S

$$du = \left(\frac{du}{d\omega}\right)_{\vartheta} d\omega = \frac{c\,d\omega}{2\omega_0 \sin \vartheta/2}. \tag{5}$$

Плоскость рассеяния (η, ξ) совпадает с плоскостью (z, y). Угол α выбираем таким, чтобы плоскость S была нормальной к оси v_z. Как следует из уравнения (4), угол α связан с углом рассеяния ϑ соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega \sin \vartheta}{\omega_0 - \omega \cos \vartheta} \approx \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}, \quad \alpha = (\pi - \vartheta)/2.$$

Число фотонов $d^2\mu$, рассеянных под углом ϑ в интервале частот $d\omega$, выражается через число точек в пространстве скоростей, заключенных в объеме, образованном при смещении плоскости S на du

$$d^2\mu = j\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)_{\vartheta} d\Omega\, d\omega \int\limits_{s} dv_x dv_y f(\mathrm{v}, t), \tag{6}$$

где j — падающий поток фотонов, $\partial\sigma/\partial\Omega = (r_0^2/2)\,(1+\cos^2\vartheta)$ — томсоновское сечение рассеяния неполяризованного света, $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона. Интегрирование в (6) ведется по плоскости S. Обозначая измеряемую экспериментально нормированную спектральную интенсивность рассеянного света (величина безразмерная) через $\Phi(\omega, \vartheta, t)$

$$\Phi(\omega, \vartheta, t) = \frac{d^2\mu}{d\Omega\, d\omega} \Bigg/ \frac{j}{c}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)_{\vartheta} = \frac{4\omega_0 \sin\frac{\vartheta}{2}}{j r_0^2 (1+\cos^2\vartheta)} \frac{d^2\mu}{d\Omega\, d\mu}, \tag{7}$$

выражение (6) запишем в виде

$$\Phi(\omega, \nu, t) = c \int\limits_{S} dv_x dv_y f(v_x, v_y, u, t). \tag{8}$$

Рассмотрим случай изотропной функции распределения, т. е. $f(v_x, v_y, u, t) = f(v_x^2 + v_y^2 + u^2, t)$. В цилиндрической системе координат ($v_\rho^2 = v_x^2 + v_y^2$, $\operatorname{tg} \varphi = v_y/v_x$) подстановка такой функции распределения в (8) позволяет получить

$$\Phi = c \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dv_\rho v_\rho f(v_\rho^2 + u^2, t) = 2\pi c \int\limits_u^{\infty} dv v f(v, t).$$

Из этого уравнения следует

$$f(u, t) = -\frac{1}{2\pi c u} \frac{\partial \Phi(u, t)}{du}; \quad u = \frac{c\,|\Delta\omega|}{2\omega_0 \sin\frac{\vartheta}{2}}. \tag{9}$$

Из равенства (9) можно заключить, что в случае изотропной функции распределения при измерении рассеянного света в любом направлении функция Φ зависит от комбинации частоты и угла рассеяния $u = \frac{c\,|\Delta\omega|}{2\omega_0 \sin \vartheta/2}$, а не от каждой из этих величин в отдельности. Очевидно, можно утверждать и обратное, т. е. если из эксперимента получена автомодельность функции $\Phi\left(\frac{c\,|\Delta\omega|}{2\omega_0 \sin \vartheta/2}, t\right)$, то функция распределения изотропна. Это свойство может служить критерием изотропности функции распределения электронов по скоростям.

Рассмотрим аксиально симметричную функцию распределения $f(v_\rho, v_z, t)$. Ось симметрии совпадает с осью z. В этом случае необходимо измерить две спектральные интенсивности: Φ_1 под углом рассеяния $\vartheta_1 = \pi - 2\alpha$ и Φ_2 под углом рассеяния $\vartheta_2 = 2\alpha$ (рис. 2). Функция Φ_1 получается из выражения (8) при интегрировании по плоскости S_1

$$\Phi_1(v_z,\ t) = 2\pi c \int_0^\infty dv_\rho v_\rho f(v_\rho,\ v_z,\ t);\quad v_z = \frac{c\,|\Delta\omega|}{2\omega_0 \sin \vartheta_1/2}. \tag{10}$$

Интегрирование в пространстве скоростей по плоскости S_2 (рис. 2) позволяет связать спектральную интенсивность Φ_2, измеренную под углом рассеяния ϑ_2, с функцией распределения. Из уравнения (8) получим

$$\Phi_2(v_y,\ t) = 2c \int_{v_y}^\infty \frac{v\,dv}{\sqrt{v^2 - v_y^2}} \int_{-\infty}^\infty dv_z f(v,\ v_z,\ t),\quad v_y = \frac{c\,|\Delta\omega|}{2\omega_0 \sin \vartheta_2/2}. \tag{11}$$

Рассмотрим явный вид функций Φ_1 и Φ_2 на примере изотропного максвелловского распределения. Функция распределения в этом случае дается выражением

$$f(v_\rho^2 + v_z^2) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}(v_\rho^2 + v_z^2)\right\}.$$

Подстановка этой функции распределения в (10) и (11) позволяет получить

$$\Phi_1 = c\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{mc^2(\Delta\omega)^2}{8kT\omega_0^2 \sin^2 \frac{\vartheta_1}{2}}\right\}. \tag{12}$$

Для функции Φ_2, как и следовало ожидать, получено выражение, аналогичное (12), в котором угол рассеяния ϑ_1 заменен на ϑ_2. Форма линии (12) представляет собой распределение Пуассона с полушириной $\Delta = 2\omega_0 \sin\frac{\vartheta_1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{mc^2} \ln 2}$. Такая форма линии была получена в работах [3, 4] в экспериментах по рассеянию лазерного луча на электронах плазмы.

Равенство (11) по отношению к проинтегрированной по v_z функции распределения представляет собой интегральное уравнение Абеля. Его решение имеет вид

$$\int_{-\infty}^\infty dv_z f(v_\rho,\ v_z,\ t) = -\frac{1}{\pi c} \int_{v_\rho}^\infty \frac{dv_y}{\sqrt{v_y^2 - v_\rho^2}} \frac{d\Phi_2(v_y,\ t)}{dv_y}. \tag{13}$$

Выпишем проинтегрированную по v_ρ функцию распределения, определяемую выражением (10),

$$\int_0^\infty dv_\rho v_\rho f(v_\rho,\ v_z,\ t) = \frac{1}{2\pi c} \Phi_1(v_z,\ t). \tag{14}$$

Интегрирование равенства (13) по $v_\rho dv_\rho$ и (14) по dv_z с учетом условия нормировки функции распределения позволяет получить нормировочные соотношения для функций Φ_1 и Φ_2

$$\int_{-\infty}^\infty dv_z \Phi_1(v_z,\ t) = cN(t);\quad \int_0^\infty dv_y \Phi_2(v_y,\ t) = \frac{1}{2} cN(t). \tag{15}$$

Эти равенства определяют полное число электронов в рассеивающем объеме.

Равенства (13), (14) позволяют выразить некоторые важные параметры аксиально симметричной электронной системы через измеряемые функции

Φ_1, и Φ_2. Так, например, средняя скорость электронов рассеивающего объема определяется через функцию распределения [5]

$$\langle \mathbf{v}(t)\rangle = \frac{1}{N(t)} \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v},\ t)\,\mathbf{v}.$$

Воспользовавшись равенствами (13)—(15) для продольной и поперечной компонент средней скорости, получим

$$\langle v_z(t)\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z v_z \Phi_1(v_z,\ t)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \Phi_1(v_z,\ t)}, \quad \langle v_\rho(t)\rangle = \frac{\pi \int\limits_{0}^{\infty} dv_y v_y \Phi_2(v_y,\ t)}{2\int\limits_{0}^{\infty} dv_y \Phi_2(v_y,\ t)}.$$

В случае, если существует гидродинамическое течение плазмы вдоль оси z со скоростью переноса $v_0(t)$, то скорость теплового движения частиц относительно упорядоченного течения равна $\mathbf{w}(\mathbf{v},\ t) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0(t)$. Температура определена как мера средней кинетической энергии теплового движения газа, приходящейся на одну частицу. Именно

$$\frac{3}{2} kT(t) = \frac{1}{2} m \langle \mathbf{w}(t)^2\rangle = \frac{2\pi}{N(t)} \int\limits_0^{\infty} dv_\rho v_\rho \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_\rho,\ v_z,\ t)\, \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0(t))^2 =$$

$$= \left\{ \frac{m}{2} \frac{2\int\limits_0^{\infty} dv_y v_y^2 \Phi_2(v_y,\ t)}{\int\limits_0^{\infty} dv_y \Phi_2(v_y,\ t)} + \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z\,[v_z^2 - 2v_z v_0(t)]\,\Phi_1(v_z,\ t)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \Phi_1(v_z,\ t)} + v_0^2(t) \right\}.$$

Плотность потока i-компоненты импульса вдоль оси k [относительно течения $\mathbf{v}_0(t)$] имеет вид: $P_{ik}(t) = mN(t)\langle w_i(t)\ w_k(t)\rangle$. Например, поперечное давление электронов определяется $P_{\rho\rho}$-компонентой потока импульса

$$P_{\rho\rho}(t) = 2\pi m \int\limits_0^{\infty} dv_\rho v_\rho^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_\rho,\ v_z,\ t) = \frac{4m}{c} \int\limits_0^{\infty} dv_y v_y^3 \Phi_2(v_y,\ t).$$

Полученные выше выражения термодинамических параметров электронной плазмы через измеряемые функции Φ_1 и Φ_2 остаются справедливыми и в случае, когда отсутствует гидродинамическое течение вдоль оси z, а асимметрия функции распределения обусловлена другими причинами (например, магнитным полем). В этом случае надо положить $v_0 = 0$.

В частном случае статистической независимости распределения по компонентам скоростей функция распределения факторизуется, т. е. ее можно представить в виде $f(v_\rho,\ v_z,\ t) = f_1(v_\rho,\ t)\ f_2(v_z,\ t)$. Такое представление функции распределения позволяет из равенств (13), (14) и условия нормировки явно выразить ее через измеряемые функции Φ_1 и Φ_2

$$f(v_\rho,\ v_z,\ t) = -\frac{\Phi_1(v_z,\ t)}{\pi c \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \Phi_1(v_z,\ t)} \int\limits_{v_\rho}^{\infty} \frac{dv_y}{\sqrt{v_y^2 - v_\rho^2}} \frac{d\Phi_2(v_y,\ t)}{dv_y}. \qquad (16)$$

Выражение (16) позволяет экспериментально определять макроскопические параметры аксиально симметричной электронной плазмы, являющиеся средними значениями функций компонент скоростей произвольного вида, которые невозможно определить через Φ_1 и Φ_2 с помощью соотношений (13), (14).

Литература

[1] В. А. Журавлев, Г. Д. Петров. Опт. и спектр., *33*, 36, 1972.
[2] В. А. Журавлев, Г. Д. Петров, Э. Ф. Юрчук. ЖЭТФ, *66*, 1622, 1974.
[3] H. J. Kunze, E. Fünfer et al. Phys. Lett., *11*, 42, 1964.
[4] W. Davies, S. A. Ramsden. Phys. Lett., *8*, 179, 1964.
[5] В. П. Силин. Введение в кинетическую теорию газов. «Наука», М., 1971.

Поступило в Редакцию 12 мая 1977 г.