

3 Евклидовы и псевдоевклидовы пространства

Тема 8 Системы координат

Школьная геометрия изучает различные метрические свойства простейших геометрических фигур, то есть в основном находит соотношения между длинами и углами треугольников и многоугольников, а также на базе этого вычисляются площади, поверхности и объёмы некоторых тел. Центральными понятиями, на которых строится геометрия, являются длина отрезка или кривой, угол между двумя пересекающимися линиями.

Целью аналитической геометрии было описание геометрических фигур при помощи уравнений в декартовой системе координат на плоскости или в трёхмерном пространстве. Дифференциальная геометрия изучает то же, но в ней глубоко будут использоваться как средства аналитической геометрии, так и дифференциального исчисления и линейная алгебра.

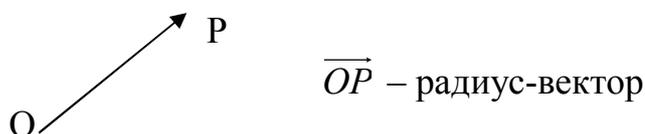
Итак, геометрия разворачивается в некотором пространстве, которое состоит из точек P, Q, R, \dots . В это пространство введём декартовы координаты (x^1, \dots, x^n) , то есть поставим в соответствие каждой точке пространства определённые наборы чисел (x^1, x^2, \dots, x^n) , которые будем называть координатами. Число координат есть размерность пространства. Потребуем также, чтобы разным точкам соответствовали разные наборы чисел. Две точки $P(x^1, \dots, x^n)$ и $Q(y^1, \dots, y^n)$ совпадают тогда и только тогда, когда $x^i = y^i$, для всех $i = 1, \dots, n$. И наоборот, каждому набору чисел (x^1, \dots, x^n) должна соответствовать какая-либо точка изучаемого пространства. Такое пространство называется декартовым.

Пример. Пусть $n = 3$.

1) Пусть каждой точке P соответствуют три её координаты (x^1, x^2, x^3) ;

2) $P(x^1, x^2, x^3), Q(y^1, y^2, y^3), |PQ|^2 = \ell^2 = \sum_{i=1}^3 (y^i - x^i)^2$.

Если условия 1 и 2 выполняются, то пространство называется евклидовым, а декартовы координаты с такими свойствами, называются евклидовыми координатами. С точками евклидова пространства свяжем векторы:



Точка O – начало координат. Вектор, идущий из точки O в изучаемую точку P , называется радиус-вектором этой точки. Декартовы координаты (x^1, \dots, x^n) точки P , называются координатами вектора. Пусть $\xi = (x^1), \eta = (y^1), \xi + \eta = (x^1 + y^1)$. Можно также вектор умножить на число. $\ell_1 = (1, 0, 0), \ell_2 = (0, 1, 0), \ell_3 = (0, 0, 1)$ – единичные векторы. Если $\xi = (x^1, x^2, x^3)$, то $\xi = x^1 \ell_1 + x^2 \ell_2 + x^3 \ell_3$. Для любых n аналогично.

Поэтому евклидово пространство можно рассматривать как линейное

или векторное пространство, в котором расстояние между точками (концами радиус-векторов) $\xi = (x^i)$, $\eta = (y^i)$ измеряется $\ell^2 = \sum_{i=1}^3 (y^i - x^i)^2$.

Определение. Евклидовым скалярным произведением векторов $\xi = (x^i)$, $\eta = (y^i)$, называется число $\xi \eta = \eta \xi = \sum_{i=1}^3 y^i x^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 22). Следовательно,

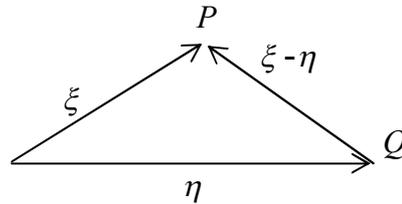


Рисунок 22

$$PQ^2 = (\xi - \eta)^2, \gamma = (z^i), \text{ то } |\gamma| = \sqrt{\gamma\gamma}.$$

Из аналитической геометрии известно, что $\cos \varphi = \frac{\xi\eta}{|\xi||\eta|}$. Таким образом,

длины и углы связаны с понятием скалярного произведения. Это понятие будет взято за первичное, на котором строится геометрия.

Пусть в евклидовом пространстве задана кривая в параметрической форме $x^i = f^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $f^i(t)$ – дифференцируемые функции от параметра t , а $a \leq t \leq b$. Касательным вектором или вектором скорости кривой в момент времени t мы определяли вектор $v(t) = \left(\frac{df^i}{dt} \right)$. Кривая на-

зывается регулярной, если её вектор скорости отличен от нуля в каждой точке этой кривой.

Определение. Длиной линии называется число $\ell = \int_a^b \sqrt{v(t)v(t)} dt = \int_a^b |v(t)| dt$.

Пусть $x^i = f^i(t)$ и $x^i = g^i(t)$ – две линии, которые пересекаются при $t = t_0$.

$v = \left(\frac{df^i}{dt} \right)_{t=t_0}$, $w = \left(\frac{dg^i}{dt} \right)_{t=t_0}$ – касательные векторы в точке $t = t_0$.

Определение. Углом между двумя линиями в точке их пересечения при заданном аргументе $t = t_0$ называется угол между векторами v, w , то есть

$$\cos \varphi = \frac{vw}{|w||v|}.$$

Можно выбрать параметр t так, чтобы $|v| = c$, где c – константа. Тогда $\ell = \int_a^b |v| dt = c(b - a)$. Такой параметр t , что $|v(t)| = 1$, мы называли натураль-

ным параметром – он равен длине линии, которую мы пробегаем.

В евклидовой геометрии будет встречаться лишь положительное скалярное произведение вектора самого на себя.

$$\xi \xi = x^1 x^1 + x^2 x^2 + \dots + x^n x^n,$$

$$x^{1^2} + x^{2^2} + \dots + x^{n^2} > 0.$$

Приведём пример неположительного скалярного произведения векторов четырёхмерного пространства: $(x^1, x^2, x^3, x^0 = ct)$. Это пространство играет важную роль в специальной теории относительности. Пусть

$$\xi = (x^1, x^2, x^3, x^0), \eta = (y^1, y^2, y^3, y^0). \text{ Тогда } \xi \eta = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^0 y^0.$$

Такое пространство называется псевдоевклидовым или пространством Минковского.

В этом пространстве существуют векторы трёх типов:

1) пространственноподобные векторы: $\xi \xi > 0$;

2) времениподобные векторы: $\xi \xi < 0$;

3) световые векторы: $\xi \xi = 0$.

Здесь длины векторов могут оказаться мнимыми или нулевыми.

Определение. Областью без границы называется совокупность точек в трёхмерном пространстве такая, что вместе с любой точкой из этой совокупности ей принадлежат все достаточно близкие к ней точки пространства.

Область с границей получается, если добавить к области без границы её предельные точки (то есть точки, которые можно достичь изнутри области сходящимися к ним последовательностями внутренних точек). Область без границы: $(x^1)^2 + (x^2)^2 < 1$, с границей: $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1$. Всё пространство – область.

Определение. Градиентом функции $f(x^1, \dots, x^n)$ в точке $P(x_0^1, \dots, x_0^n)$ в заданной декартовой системе координат евклидова пространства (или его области) называется вектор

$$\text{grad } f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{x^i=x_0^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \ell_i, \text{ где } \ell_i \text{ – базисные орты.}$$

Если рассматривать градиент как функцию от заданной точки P , то мы получаем векторное поле, то есть когда в каждой точке пространства или его области задан вектор, прикрепленный к этой точке.

Пусть заданы теперь в пространстве функция $f(x^1, \dots, x^n)$ и некоторая кривая $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $a \leq t \leq b$. С какой скоростью изменяется функция $f(x^1(t)), \dots, f(x^n(t)) = \varphi(t)$ при изменении параметра t ?

Найдем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \frac{dx^n}{dt} = (\text{grad } f)v, \text{ где } \text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \ell_i, v = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \ell_i, \ell_i$$

– базисные орты.

Определение. Производной функции $f(x^1, \dots, x^n)$ по направлению вектора $\xi = (y^1, \dots, y^n)$, вычисленной в точке $P = (x_0^i)$, называется скалярное произведение градиента функции f , вычисленного в точке P , на вектор ξ .

$$\text{Обозначается } \left. \frac{df}{d\xi} \right|_P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} y^i, \quad x^i = x_0^i$$

Теорема. Если задана кривая $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, такая, что в точках этой кривой скалярное произведение градиента f и вектора скорости равно нулю, то функция f постоянна вдоль этой кривой.

◀ Доказательство. Если $x^i = x^i(t)$ – кривая, $\varphi(t) = f(x^i(t))$, то $\frac{df}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \text{grad } f \cdot v$, где $v = \left(\frac{dx^i}{dt} \right)$ – вектор скорости кривой. Так как $\text{grad } f \cdot v \equiv 0$, то $\frac{d\varphi}{dt} \equiv 0$, $\varphi(t) = \text{const}$. ▶

Общеизвестны следующие типы координат (рис. 23):

- 1) декартовы координаты (x^1, \dots, x^n) ;
- 2) на плоскости – полярные координаты (r, φ) ; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;
- 3) цилиндрические координаты (r, φ, z) ; $z = z$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то есть полярные координаты в плоскости $0xy$;
- 4) сферическая система координат (r, φ, θ) ; $z = r \cos \theta$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$.

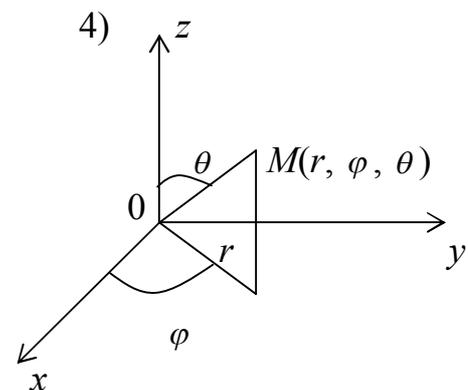
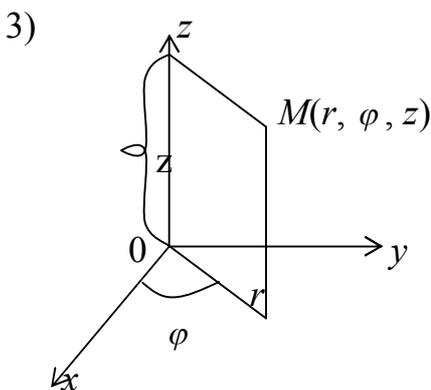
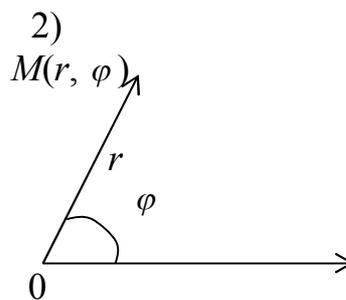
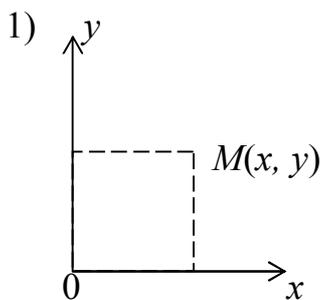


Рисунок 23

Пусть заданы декартовы (первичные) координаты (x^1, \dots, x^n) . Пусть теперь заданы и какие-то другие координаты в той же области (z^1, \dots, z^n) . Это значит, что каждая $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$ или $z^i = z^i(x^1, \dots, x^n)$.

Значит, каждой точке области можно сопоставить как набор первичных координат $(x) = (x^i)$, так и набор новых координат $(z) = (z^j)$. Поэтому декартовы координаты можно выразить через новые и наоборот. Пусть $x^i = \sum_j^n a_j^i z^j$,

$i = 1, \dots, n$ – линейная замена координат в пространстве. А чтобы теперь выразить z через x , необходимо и достаточно, как известно из линейной алгебры, чтобы матрица $A = (a_j^i)$ имела обратную матрицу: $A^{-1} = B = (b_j^i)$. Обратная матрица B определяется так: $B = (b_j^i)$, где $\sum_{j=1}^n b_j^i a_k^j = \delta_k^i$; $\delta_k^i = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$;

$E = (\delta_k^i)$ – единичная матрица.

Условимся делать такую запись: $\sum_j^n a_j^i z^j = a_j^i z^j$, где суммирование будет производиться по двум входящим в эту формулу индексам.

Итак, если точке P соответствовал набор координат (x^1, \dots, x^n) , то в новых координатах этой точке будет соответствовать набор (z^1, \dots, z^n) , причём $x^i = \sum_j^n a_j^i z^j$, $i = 1, \dots, n$, где $a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$.

Рассмотрим произвольные координаты $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i = 1, \dots, n$ и точку $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Предположим, что координаты определяют каждую точку в нашем пространстве, то есть любому набору чисел (x_0^1, \dots, x_0^n) соответствует хотя бы один набор (z_0^1, \dots, z_0^n) такой, что $x_0^i = x^i(z_0^1, \dots, z_0^n)$.

Определение. Точка $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ называется неособой точкой системы координат (z^1, \dots, z^n) при $z^i = z_0^i$, где $i = 1, \dots, n$ и $x_0^i = x^i(z_0^1, \dots, z_0^n)$,

тогда и только тогда, если $A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \Big|_{z^q = z_0^q} \right) = (a_j^i)$. Эта матрица и называется

матрицей Якоби $\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)$, а $J = \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right|$ называется якобианом.

Известно, что если $x = Az$, $x = (x^i)$, $a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$, $z = (z^j)$, где $x^i = \sum_j^n a_j^i z^j$,

$a_j^i = \frac{dx^i}{dz^j}$, $i = 1, \dots, n$, то $z = Bx$, где B есть обратная матрица по отношению к матрице A .

Поставим вопрос: вычислить длину кривой в общих координатах z , где

$x^1 = x^1(z^1, z^2)$, $x^2 = x^2(z^1, z^2)$, (x^1, x^2) – декартовы координаты. Кривая $z^1 = z^1(t)$, $z^2 = z^2(t)$ или $x^1 = x^1(z^1(t), z^2(t))$, $x^2 = x^2(z^1(t), z^2(t))$

$\ell = \int_a^b |v(t)| dt$, где $v(t) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt} \right)$ – вектор скорости.

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2}. \text{ Так как } x^1 = x^1(z^1(t), z^2(t)),$$

$$x^2 = x^2(z^1(t), z^2(t)), \text{ то } \frac{dx^1}{dt} = \frac{\partial x^1}{\partial z^1} \frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^1}{\partial z^2} \frac{dz^2}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{\partial x^2}{\partial z^1} \frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^2}{\partial z^2} \frac{dz^2}{dt},$$

$$\frac{dx^1}{dt} = a_1^1 \frac{dz^1}{dt} + a_2^1 \frac{dz^2}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt} = a_1^2 \frac{dz^1}{dt} + a_2^2 \frac{dz^2}{dt}, \quad v_x^1 = a_1^1 v_z^1 + a_2^1 v_z^2, \quad v_x^2 = a_1^2 v_z^1 + a_2^2 v_z^2.$$

$$|v_x|^2 = (v_x^1)^2 + (v_x^2)^2 = (a_1^1 v_z^1 + a_2^1 v_z^2)^2 + (a_1^2 v_z^1 + a_2^2 v_z^2)^2 = a_1^1 a_1^1 v_z^1 v_z^1 + 2a_1^1 a_2^1 v_z^1 v_z^2 +$$

$$+ a_2^1 a_2^1 v_z^2 v_z^2 + a_1^2 a_1^2 v_z^1 v_z^1 + 2a_1^2 a_2^2 v_z^1 v_z^2 + a_2^2 a_2^2 v_z^2 v_z^2 = (a_1^1 a_1^1 + a_2^1 a_2^1) v_z^1 v_z^1 +$$

$$+ 2(a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2) v_z^1 v_z^2 + (a_1^2 a_1^2 + a_2^2 a_2^2) v_z^2 v_z^2 = \sum_{i,k=1}^2 g_{ik} \cdot v_z^i v_z^k,$$

$$\text{где } g_{ik} = \sum_{j=1}^2 a_i^j a_k^j, \quad i, k = 1, 2.$$

Итак, для любого n можно записать, что

$$|V_x|^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} \frac{dz^i}{dt} \cdot \frac{dz^k}{dt}, \quad \text{где } g_{ik} = g_{ki} = \sum_{j=1}^n a_i^j a_k^j = \sum_{j,q=1}^n \delta_{jq} a_i^j a_k^q.$$

Координаты z^1, \dots, z^n называются евклидовыми, если длина вектора в них

$$\text{выражается формулой } |V_z|^2 = \sum_{j=1}^n (y^j)^2, \quad \text{где } V_z = (y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{dz^1}{dt}, \dots, \frac{dz^n}{dt} \right).$$

Если $x^j = x^j(z)$, $(a^i) = \left(\frac{dx^i}{dz^j} \right) = A$, то необходимо и достаточно для евк-

лидовости координат, чтобы выполнялось условие: $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Выясним, как преобразуются компоненты g_{ij} матрицы G при переходе к новым координатам. Пусть в системе (x) $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^n)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^n)$. В системе (Z) $\xi_1 = (\eta_1^1, \dots, \eta_1^n)$, $\xi_2 = (\eta_2^1, \dots, \eta_2^n)$. Пусть заданы новые координаты (y)

в той же области и $z^j = z^j(y^1, \dots, y^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $B = (B_j^i) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right)$.

Векторы ξ_1, ξ_2 в координатах (y^1, \dots, y^n) имеют тогда компоненты $(\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_1^n)$,

$(\varepsilon_2^1, \dots, \varepsilon_2^n)$, причём $\eta_1^i = \sum_{k=1}^n b_k^i \varepsilon_1^k$, $\eta_2^j = \sum_{\ell=1}^n b_\ell^j \varepsilon_2^\ell$ (*). Пусть матрица, дающая вы-

ражение для скалярного произведения в координатах (y) , равна h_{ij} . Это

значит, что $\xi_1 \xi_2 = \sum_{k,\ell=1}^n h_{k\ell} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^\ell = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j$.

Используя (*), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=1}^n h_{k\ell} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^\ell &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_k^i \varepsilon_1^k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n b_\ell^j \varepsilon_2^\ell \right) = \sum_{k,\ell=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n b_k^i g_{ij} b_\ell^j \right) \varepsilon_1^k \varepsilon_2^\ell \Rightarrow h_{k\ell} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n b_k^i g_{ij} b_\ell^j. \end{aligned}$$

Тема 9 Риманова и псевдориманова метрика

Пусть задано пространство (или область) с декартовыми координатами (x^i) и заданы новые координаты (z^i) , $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, причём новая система не имеет особых точек. Мы показали, что $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^n \delta_{kq} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^q}{\partial z^j}$.

Значит, в координатах (z) имеем для скалярного произведения формулу $\xi_1 \xi_2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi_1^i \xi_2^j$. Риманова метрика в области пространства с произвольными регулярными координатами (z) задаётся набором функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$,

причём если задана кривая $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, то квадратом длины её вектора скорости $v_z = \left(\frac{dz^i}{dt} \right)_{t=t_0}$ в точке $t = t_0$ называется число $\ell^2 = g_{ij} \frac{\partial z^i}{dt} \frac{\partial z^j}{dt}$.

Определение. Будем говорить, что набор функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$ задаёт риманову метрику в координатах (z) , если при любых (z^1, \dots, z^n) форма $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \eta^i \eta^j$ положительна. Если $\det(g_{ij}) \neq 0$, но указанная форма знаконеопределённая, то будем говорить, что набор задаёт псевдориманову метрику.

Определение. Длиной кривой по отношению к римановой или псевдоримановой метрике будем называть число $\ell = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}} dt$.

Если заданы новые координаты (y) в той же области такие, что $z^i = z^i(y)$, $\left| \frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right| \neq 0$, то в новых координатах (y) риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij}(y)$, где $g'_{ij}(y) = g'_{ji}(y)$ и $g_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j} = g_{ij}(y^1, \dots, y^n)$. На

матричном языке $g' = AgA^T$, где $A = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k} \right)$, $g' = (g'_{ij})$, $g = (g_{ij})$.

Определение. Будем говорить, что метрика евклидова, если найдутся новые координаты (x^1, \dots, x^n) , $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $\left| \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right| \neq 0$, такие, что

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^n \delta_{kq} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^q}{\partial z^j}. \text{ В координатах } (x^1, \dots, x^n) \text{ имеем}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{ и координаты } (x) \text{ называются евклидовыми.}$$

Мы всегда требуем, чтобы $|g_{ij}| \neq 0$ или ещё говорят, чтобы метрика g_{ij} была невырожденной. Если матрица $(g_{ij}(z))$ определяет положительную квадратичную форму, то есть длины всех ненулевых векторов положительны, то мы говорим, что g_{ij} задаёт риманову метрику. Если $|g_{ij}| \neq 0$, но форма $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \xi^j$ знакопеременная, то будем говорить, что имеется псевдориманова метрика.

Важен случай при $n = 4$ и форма $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \xi^j$ в каждой точке (z_0^1, \dots, z_0^n) может быть приведена к виду: $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2$. Это такие метрики, на которых построена общая теория относительности.

Определение. Линейное вещественное пространство размерности n называется псевдоевклидовым пространством индекса s , если в этом пространстве задана билинейная форма $\zeta \eta = -\zeta^1 \eta^1 - \dots - \zeta^s \eta^s + \zeta^{s+1} \eta^{s+1} + \dots + \zeta^{s+q} \eta^{s+q}$.

Если $s = 0$, то получаем евклидово пространство R^n . Выше приведенное пространство будем обозначать R_s^n .

Пространство R_1^4 является пространством специальных теорий относительности и называется пространством Минковского.

Длина вектора ξ в псевдоевклидовом пространстве R_s^n определяется следующей формулой: $|\xi|_s = \sqrt{(\xi \xi)_s}$, где

$$(\xi \xi)_s = -\xi^1 \xi^1 - \dots - \xi^s \xi^s + \xi^{s+1} \xi^{s+1} + \dots + \xi^{s+q} \xi^{s+q} = n.$$

Тема 10 Псевдоевклидово пространство

В отличие от пространства R^n в пространстве R_s^n длины векторов могут быть нулевыми и мнимыми. В пространстве R^n совокупность всех точек ξ , таких что $|\xi| = \rho$ образует $(n-1)$ -мерную сферу, S^{n-1} (гиперсфера). В псевдоевклидовом пространстве R_s^n также рассматривается множество точек ξ , удаленных от начала координат на расстояние ρ , где ρ может быть действ-

вительным, мнимым числами или нулём. Это множество точек называется псевдосферой индекса S и обозначается S_s^{n-1} . Будем различать псевдосферы действительного, мнимого и нулевого радиусов. Псевдосфера нулевого радиуса имеет уравнение: $-(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - \dots - (\xi^s)^2 + (\xi^{s+1})^s + \dots + (\xi^{s+q-n})^2 = 0$. Это есть конус второго порядка в пространстве R_s^n с вершиной в начале координат. Все векторы, выходящие из начала координат и лежащие на этом конусе, имеют нулевую длину. Векторы, лежащие вне этого конуса, имеют длину, отличную от нуля.

Псевдосфера S_s^{n-1} нулевого радиуса называется изотропным или световым конусом. Векторы, лежащие внутри конуса, имеют положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$ и, называются времениподобными, а векторы лежащие вне этого конуса имеют отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2 < 0$, и называются пространственноподобными. Векторы, лежащие на изотропном конусе, называются изотропными или световыми, $|\xi| = 0$.

Примеры.

1) Пусть $n = 1, s = 0$. R_0^1 совпадает с обычной вещественной прямой.

2) Пусть $n = 2, s = 1$ и пусть заданы декартовы координаты (x^1, x^2) . Тогда получаем изотропный конус $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 \Rightarrow x^1 = \pm x^2$. Этот конус разбивает пространство R^2 на две области. В одной из них скалярное произведение $(\xi\xi)_1 > 0$, когда $|x^2| > |x^1|$ и $(\xi\xi)_1 < 0$, когда $|x^2| < |x^1|$ (рис. 24).

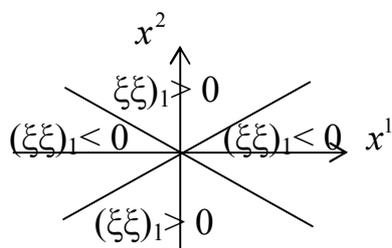


Рисунок 24

Псевдосфера действительного радиуса – это гипербола $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2 (\alpha = \rho)$ и псевдосфера мнимого радиуса – гипербола $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = -\alpha^2 (\rho = \alpha i)$ (рис. 25).

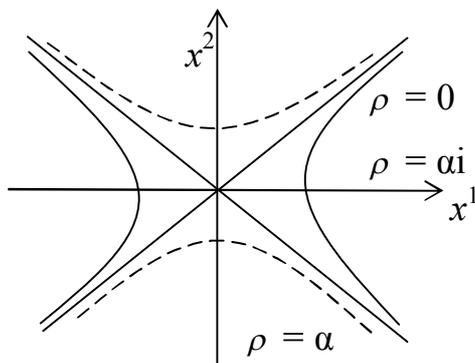


Рисунок 25

3) Пусть $n = 3, s = 1$. Изотропный конус (псевдосфера нулевого радиуса) является обычным конусом второго порядка с осью x^1 :

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$

Он разбивает всё пространство на две области: внутреннюю и внешнюю (рис. 26).

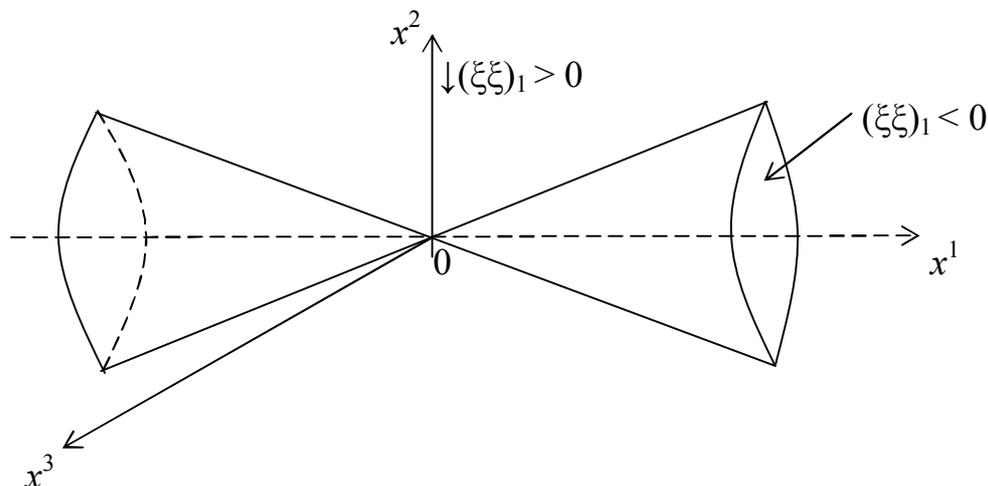


Рисунок 26

Псевдосферы вещественного радиуса – это однополостные гиперboloиды: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \alpha^2 (\alpha = \rho)$, а псевдосферы мнимого радиуса – это двуполостные гиперboloиды: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\alpha^2 (\rho = \alpha i)$ (рис. 27).

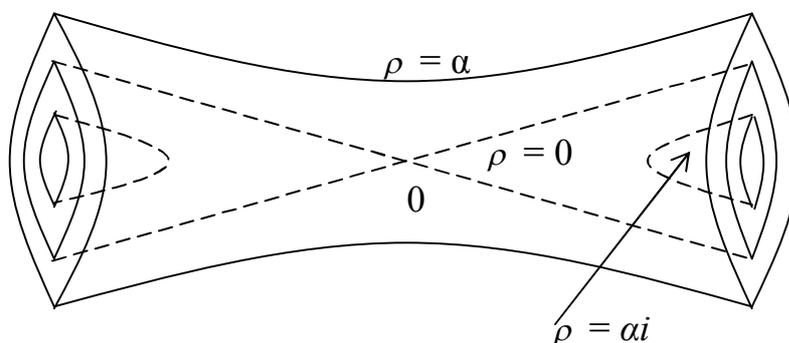


Рисунок 27

Изучим метрические свойства пространства R_1^3 . Это пространство будем моделировать в пространстве R^3 . Через (x, y, z) обозначим декартовы координаты пространства R^3 . Тогда псевдоскалярное произведение имеет вид $(\xi \xi)_1 = -x^2 + y^2 + z^2$.

Гиперсферой или псевдосферой мнимого радиуса $i\rho$ в пространстве R_1^3 является двуполостный гиперboloид $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$. Так как этот гиперboloид вложен в R^3 , то можно сказать, что геометрия пространства R_1^3 индуцирует некоторую геометрию на гиперboloиде или с точки зрения римановой метрики метрика пространства R_1^3 индуцирует некоторую метрику на гиперboloиде.

Рассмотрим гиперboloид $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2, x > 0$ (рис. 28).

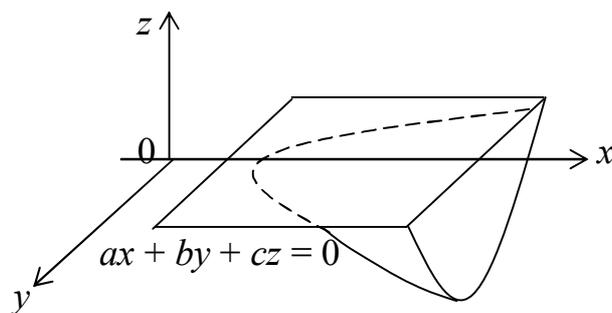


Рисунок 28

Точками индуцированной на гиперboloиде геометрии мы назовём обычные точки гиперboloида, а прямыми индуцированной геометрии назовём всевозможные линии на гиперboloиде, которые получаются при пересечении гиперboloида плоскостями $ax + by + cz = 0$, проходящими через начало координат. Установим соответствие между геометрией на гиперboloиде и геометрией в круге на евклидовой плоскости. Такое преобразование называется стереографической проекцией.

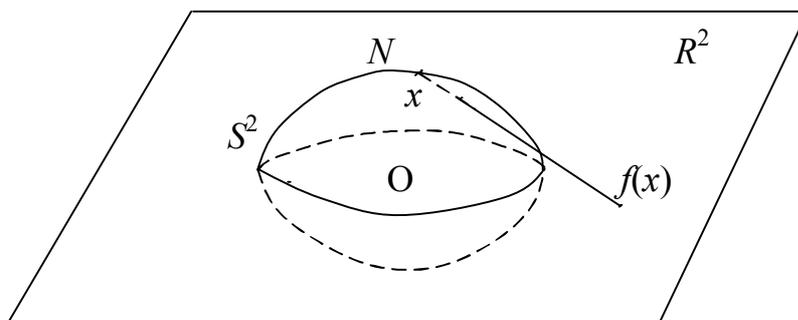


Рисунок 29

Плоскость R^2 проходит через центр O сферы S^2 и стереографическая проекция $f: S^2 \rightarrow R^2$ сопоставляет каждой точке x , не совпадающей с северным полюсом N сферы, точку $f(x)$ – точку пересечения луча Nx с плоскостью R^2 (рис. 29).

При этом северному полюсу соответствует бесконечно удалённая точка расширенной комплексной плоскости. Стереографическая проекция псевдосферы S_1^2 на плоскость R_1^2 определяется подобным же образом. Центром псевдосферы $S_1^2 = \{-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ является начало координат O . Северный полюс есть точка с декартовыми координатами $(\rho, 0, 0)$. Плоскость, на которую осуществляем проекцию, есть плоскость YOZ . Так как мы рассмотрели только одну часть гиперboloида $x > 0$, то образ этой плоскости при проекции f покрывает не всю плоскость $R^2 = YOZ$, а только открытый круг радиуса ρ .

Теорема. Пусть (x, y, z) – координаты точки $x \in S_1^2 (x > 0)$, и пусть (u^1, u^2) – координаты точки $f(x) \in YOZ$, где f – стереографическая проекция.

Тогда

$$x = \rho \left(-1 + \frac{2\rho^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2} \right),$$

$$y = \frac{-2\rho u^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2},$$

$$z = \frac{2\rho u^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2}.$$

◀ Доказательство.

Сечение гиперboloида плоскостью, проходящей через ось OX , имеет следующий вид:

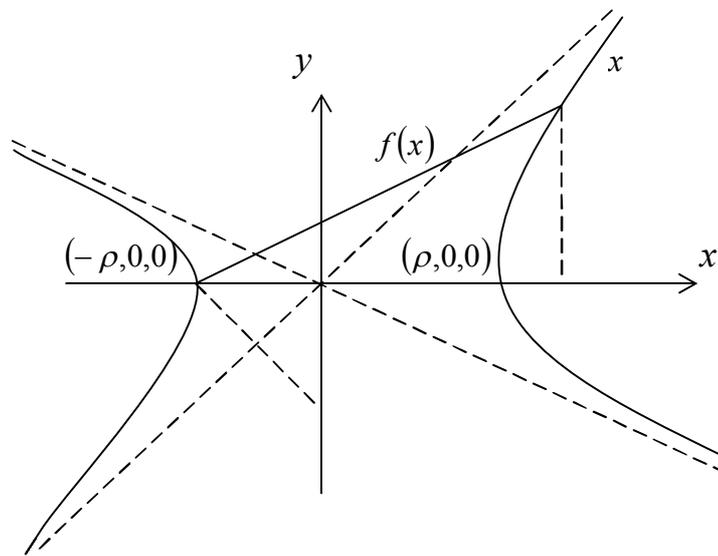


Рисунок 30

Тогда из рисунка 30 видно, что

$$\frac{y}{u^1} = \frac{x + \rho}{\rho}, \quad \frac{z}{u^2} = \frac{x + \rho}{\rho}, \quad y = u^1 \left(1 + \frac{x}{\rho} \right), \quad z = u^2 \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) - \rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Так как $-\rho^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то подставляя y и z в это уравнение, получим, что

$$-\rho^2 = -x^2 + (u^1)^2 \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 + (u^2)^2 \left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 \Rightarrow x = -\rho \left(1 + \frac{2\rho^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2 - \rho^2} \right).$$

Аналогичное доказательство для y и z . ▶

При стереографической проекции $f: S_1^2 \rightarrow (y^2 + z^2 < \rho^2) = D^2$ точки гиперboloида переходят в точки двумерного круга D^2 радиуса ρ . В какие кривые на круге D^2 перейдут прямые геометрии на гиперboloидае, то есть линии пересечения гиперboloида плоскостями $ax + by + cz = 0$?

Теорема. Каждая линия пересечения S_1^2 плоскости $ax + by + cz = 0$ переходит при отображении f в дугу окружности, пересекающую окруж-

ность $y^2 + z^2 = \rho^2$ под прямым углом.

◀ Доказательство. Для доказательства достаточно подставить в уравнение плоскости $ax + by + cz = 0$ выражение x, y, z через $u^1, u^2, u \neq 0$.

$$\text{Тогда } -a - \frac{2a\rho^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 - \rho^2} + \frac{2bu^1}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 + \rho^2} + \frac{2cu^2}{-(u^1)^2 - (u^2)^2 - \rho^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(u^1 - \frac{b}{a}\right)^2 + \left(u^2 - \frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{a^2} - \rho^2 \quad - \text{ окружности с центром в точке}$$

$\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ и $r = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2} - \rho^2}$, пересекающая окружность $y^2 + z^2 = \rho^2$ в точках А

и В под прямым углом $\rho^2 + r^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$. ▶

Итак, геометрия, индуцированная на псевдосфере S_1^2 геометрией псевдоевклидова пространства R_1^3 , совпадает с геометрией, возникающей в круге радиуса ρ на евклидовой плоскости R , если в качестве точек этой геометрии взять обычные точки этого круга, а в качестве прямых этой геометрии взять дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом.

Геометрия, индуцированная на псевдосфере геометрией R_1^3 , называется геометрией Лобачевского, а её модель в круге радиуса ρ на евклидовой плоскости называется моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского. Сам Лобачевский получил свою геометрию без псевдоевклидовых пространств. Если $\rho \rightarrow \infty$, то геометрия Лобачевского превращается в обычную геометрию Евклида.

Можно рассматривать ещё одну геометрию на сфере, в которой “точками” являются обычные точки сферы $\rho^2: (|x| = 1 \hat{a} R^2)$, а “прямыми” являются всевозможные экваторы сферы R^2 (пересечение со всевозможными плоскостями, проходящими через центр сферы). Если в качестве точек взять пары $(x, -x)$, где x пробегает всю ρ^2 , то в этой геометрии будут выполнены все постулаты Евклида, кроме аксиом порядка и пятого постулата.

Подведем некоторые итоги.

Пусть задано пространство (область) с декартовыми координатами (x^1, \dots, x^n) и заданы новые координаты (z^1, \dots, z^n) , $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $x = x(z)$, причём новая система координат не имеет особых точек. $I \neq 0 = \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right|$ – яко-

биан. Если длина кривой $x^i = x^i(t)$ измерялась по формуле $\ell = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt$,

то мы имеем дело с евклидовыми координатами. В новых координатах (z) имеем $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \dots, n$. Длина той же самой кривой в новых координатах

так $\ell = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}} dt$, где $x^i = x^i(z^1(t), \dots, z^n(t))$ и $\sqrt{g_{ij} \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2}$;
 $\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dz^j} \frac{dz^j}{dt}$. Поэтому $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^n \delta_{kq} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^q}{\partial z^j}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Заметим, что $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz^1}{dt}, \dots, \frac{dz^n}{dt} \right)$ – вектор скорости кривой в новых координатах. $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right)$ – тот же самый вектор в старых координатах:

$\frac{dx}{dt} = \eta$, $\frac{dz}{dt} = \varepsilon$. Если имеются две кривые $z^i = f^i(t)$ и $z^i = g^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, пересекающиеся в одной точке $t = t_0$, φ – угол между их векторами скорости, то $\cos \varphi = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{|\varepsilon_1| |\varepsilon_2|}$, где $\varepsilon_1 = \left(\frac{df^i}{dt} \right)_{t=t_0}$, $\varepsilon_2 = \left(\frac{dg^i}{dt} \right)_{t=t_0}$. В координатах (z)

для скалярного произведения имеем формулу: $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = g_{ij} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^j$, $i = 1, \dots, n$.

Риманова метрика в области пространства с регулярными координатами z^1, \dots, z^n задаётся набором функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$, причём, если задана кривая $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, то квадратом длины её вектора скорости $v_z = \left(\frac{dz^i}{dt} \right)_{t=t_0}$ в точке $t = t_0$ называется число $\ell^2 = g_{ij} \frac{\partial z^i}{dt} \frac{\partial z^j}{dt}$.

Набор функций $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$ задаёт риманову метрику (в координатах (z^1, \dots, z^n)), если при любых z^1, \dots, z^n форма $g_{ij} \eta^i \eta^j$ положительна. Если $\det(g_{ij}) \neq 0$, но указанная форма знакопеременная, то говорят, что набор задаёт псевдориманову метрику. Если заданы новые координаты y^1, \dots, y^n , такие что $z^i = z^i(y^1, \dots, y^n)$, $\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \neq 0$, то в новых координатах y^1, \dots, y^n риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij}(y^1, \dots, y^n)$, $g'_{ij} = g'_{ji}$, где

$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j} = g'_{ij}(y^1, \dots, y^n)$. На матричном языке $g' = A \circ g \circ A^T$, где $A = \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k} \right)$, $g' = (g'_{ij})$, $g = (g_{ij})$.

Метрика евклидова, если найдутся новые координаты x^1, \dots, x^n , $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $\left| \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right| \neq 0$, такие, что $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \sum_{k,q=1}^n \delta_{kq} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^q}{\partial z^j}$. В координатах x^1, \dots, x^n имеем $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, и координаты x^1, \dots, x^n назы-

ваются евклидовыми.

Линейное вещественное пространство размерности n называется псевдоевклидовым пространством индекса s , если в этом пространстве задана билинейная форма $(\varepsilon, \eta)_s = -\varepsilon^1 \eta^1 - \dots - \varepsilon^s \eta^s + \varepsilon^{s+1} \eta^{s+1} + \dots + \varepsilon^n \eta^n$. Если $s = 0$, то получаем евклидово пространство. Псевдоевклидово пространство индекса s обозначается S_s^n . Пространство R_1^n является пространством специальных теорий относительности и называется пространством Минковского. Длина вектора ε в псевдоевклидовом пространстве R_s^n определяется следующей формулой: $|\varepsilon|_s = \sqrt{(\varepsilon \varepsilon)_s}$.

Тема 11 Движение псевдоевклидового пространства

Изучим несколько подробнее псевдоевклидово пространство. Рассмотрим движение псевдоевклидовой плоскости R_1^2 . Предположим, что это движение оставляет неподвижным начало координат. И пусть в n -мерном пространстве заданы две области: \sum_x с координатами $(x^1, \dots, x^n) = (x)$ и \sum_z с координатами $(z^1, \dots, z^n) = (z)$. И пусть каждой точке области \sum_z поставлена в соответствие точка области \sum_x , так, что $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$. Если координаты z^1, \dots, z^n можно выразить через x^1, \dots, x^n , то есть $z^j = z^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, 2, \dots, n$, то будем говорить, что задано преобразование области \sum_z в области \sum_x . При этом требуется, чтобы функции $z^j(x)$ и обратные им функции $x^i(z)$ были гладкими. Пусть теперь в области \sum имеется риманова или псевдориманова метрика, которая задаётся в координатах x^1, \dots, x^n симметричной невырожденной матрицей $g_{ij} = g_{ji}(x)$. Если задано преобразование $x^i = x^i(z)$, то в координатах (z) эта же метрика задаётся матрицей

$$g'_{ij} = g'_{ji}(z), \text{ где } g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

Определение. Преобразование $x^i = x^i(z)$ называется движением данной метрики, если $g'_{ij}(z) = g_{ij}(x(z))$.

Так как мы изучаем движение псевдоевклидовой плоскости, то рассматриваемое движение задаётся матрицей

$$A: \begin{cases} x^0 = ay^0 + by^1 \\ x^1 = cy^0 + dy^1 \end{cases}, \quad (1)$$

где (x^0, x^1) – псевдоевклидовы координаты, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Метрика в этих координатах имеет вид: $g_{ij} = (g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{10} = g_{01} = 0)$. Так как преобразование (1) является движением, то

$$G = (g_{ij}) = A^T G A. \quad (2)$$

Учитывая, что $\det A^T = \det A$ и определитель произведения равен произведению определителей, получаем: $(\det A)^2 = 1$, $\det A = \pm 1$. Таким образом, из равенства (2) имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a-b \\ b-d & c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-c^2 & ab-cd \\ ab-cd & b^2-d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1. \text{ Полагаем, что } a \neq 0. \\ ab - cd = 0 \end{cases}$$

Пусть $\beta = \frac{c}{a}$, $b = \frac{c}{a}d$, $\frac{c^2 d^2}{a^2} - d^2 = -1$, $\beta^2 d^2 - d^2 = -1$, $d = \pm \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$,
 $b = \pm \beta \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$. Рассмотрим $a^2 - c^2 = 1$, $c^2 = a^2 - 1$, $\frac{a^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}$,
 $1 - \beta^2 = \frac{1}{a^2}$, $a^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$, $a = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $a^2 - c^2 = 1$, $c^2 = a^2 - 1$,
 $c^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{1-1+\beta^2}{1-\beta^2}$, $c = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Здесь знак a совпадает со знаком c , а знак b – со знаком d .

$$A = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} & \pm \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}} \\ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}} & \pm \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \text{ Если обозначим } \beta = \operatorname{tg} \varphi, \text{ тогда } \operatorname{ch} \varphi = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}},$$

$$\operatorname{sh} \varphi = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}}. \text{ Итак,}$$

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & \pm \operatorname{sh} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi & \pm \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Множество преобразований (1) псевдоевклидовой плоскости с матрицей A вида (3) образует группу, которая называется группой гиперболических поворотов или псевдоортогональной группой и обозначается $O(1, 1)$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}.$$

Определение. Преобразования R_1^2 с матрицами A_0, A_3 называются собственными движениями псевдоевклидовой плоскости, а с матрицами A_1, A_2 называются ортохронными преобразованиями.

Рассмотрим преобразование (1) в случае, когда $A = A_0$, тогда

$x^0 = \frac{y^0 + \beta y^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; $x^1 = \frac{\beta y^0 + \beta y^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Так как $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $y^0 = ct'$, $y^1 = y$, то

$$ct = \frac{ct' + \beta y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow t = \frac{t + \frac{\beta}{c} y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{\beta ct' + y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Найдём выражения y и t' через x и t :

$$t' = t\sqrt{1 - \beta^2} - \frac{\beta}{c} y; \quad x\sqrt{1 - \beta^2} - \beta ct' = y \Rightarrow t' = t\sqrt{1 - \beta^2} - \frac{\beta}{c} (x\sqrt{1 - \beta^2} - \beta ct'),$$

$$t' \left(1 - \frac{\beta}{c} \beta c\right) = \left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \sqrt{1 - \beta^2}, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad \text{Аналогично можно получить,}$$

$$\text{что } y = -\frac{\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Выясним физический смысл параметра β . Пусть в системе координат Y находится в состоянии покоя заданная точка M – начало координат. В этом случае $y = 0$. А это значит, что $x - \beta ct = 0$, $\beta c = \frac{x}{t}$. Но $\frac{x}{t} = v$ есть скорость точки M в системе координат X , равная скорости в системе координат Y относительно X . Значит $\beta = \frac{v}{c}$.

$$\text{Итак, } t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x = \frac{v t' + y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = \frac{-v t + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \text{преобразо-}$$

вания Лоренца.

Приведем некоторые интересные выводы.

1 Замедление времени.

Пусть в системе координат X на неподвижных часах происходит время $\Delta t = t_2 - t_1$. Найдём значения t'_1 и t'_2 , соответствующие соответственно t_1 и t_2 , в одной и той же точке с абсциссой y в системе координат Y . Из фор-

мул преобразования Лоренца имеем, что $t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; $t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$;

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{Отсюда следует, что } \Delta t' < \Delta t. \quad \text{Таким обра-}$$

зом, движущиеся часы идут медленнее неподвижных часов.

2 Сокращение длин.

Пусть в системе координат X находится стержень, длина которого ℓ , где x_1 – координаты начала стержня, x_2 – координаты конца стержня, то есть $\ell = x_2 - x_1$. Если координаты концов этого стержня в системе координат Y измерены в один и тот же момент времени t' , равный, y_1 и y_2 , то, используя формулы преобразования Лоренца, имеем, что

$$x_1 = \frac{v t' + y_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x_2 = \frac{v t' + y_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\ell = x_2 - x_1 = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\ell'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \text{ Таким образом, длина } \ell' \text{ стержня в той сис-}$$

теме отсчёта, относительно которой этот стержень движется, меньше, чем его длина ℓ в той системе отсчёта, относительно которой он находится в состоянии покоя.

Тема 12 Кривые в псевдоевклидовом пространстве

Параметризованной кривой в евклидовом пространстве R^3 называется отображение $r : I \rightarrow R^3$, где $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$.

Пусть задано трёхмерное псевдоевклидово пространство R_1^3 . Векторы ортонормированного репера $\{0; \vec{a}_0; \vec{a}_1; \vec{a}_2\}$ удовлетворяют условию: $\vec{a}_0 \vec{a}_0 = -1$, $\vec{a}_i \vec{a}_j = 0$, $i, j = 0, 1, 2$, $\vec{a}_i \vec{a}_i = 1$, $i = 1, 2$.

Координаты любой точки в этом репере будем обозначать так: $a = (x^0, x^1, x^2)$, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, так как \vec{R}_1^3 – подпространство Минковского. В векторном пространстве \vec{R}_1^3 , связанным с точечным пространством R_1^3 , существуют времениподобные, пространственноподобные и изотропные векторы. В зависимости от того, каким будет в каждой точке кривой вектор касательной, кривые в пространстве R_1^3 также будем называть времениподобными, пространственноподобными и изотропными.

Определение. Отображение $r : I \rightarrow R_1^3 : t \rightarrow (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$ будем называть параметризованной кривой в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 и обозначать $\vec{r}(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$.

Определение. Параметризованная кривая называется времениподобной

n -параметризованной кривой, если $\vec{r}'(t)\vec{r}(t) = -1$. Будем обозначать через σ натуральный параметр, а n -параметризованную кривую будем записывать в виде: $\vec{r}(\sigma) = (x^0(\sigma), x^1(\sigma), x^2(\sigma))$.

Найдём производную: $\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{r}'(\sigma) = \vec{\tau}(\sigma)$, где $\vec{\tau}(\sigma)\vec{r}(\sigma) = -1$. Из этого

равенства получаем, что $(d\vec{r})^2 = -(d\sigma)^2$. С другой стороны $(d\vec{r})^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Итак, $(d\sigma)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$. Так как $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, то $(d\sigma)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2$. Следовательно,

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$, где $V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$. Тогда

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2 \Rightarrow \sigma = c \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ — длина дуги времениподобной кривой,

$\frac{\sigma}{c}$ в теории специальной относительности называется собственным временем частицы.

Определение. Времениподобная кривая $\vec{r}(\sigma)$ называется регулярной, если $\vec{r}'(\sigma) \neq 0$ и бирегулярной, если $\vec{r}'(\sigma) \neq \lambda \vec{r}''(\sigma)$.

Определение. Вектором кривизны времениподобной n -параметризованной кривой в точке σ называется вектор $\vec{k}(\sigma) = \vec{r}''(\sigma)$, а кривизной — величина $k(\sigma) = |\vec{r}''(\sigma)|$.

К каждой точке времениподобной кривой прикрепим правый ортонормированный репер: $\vec{\tau}(\sigma) = \vec{r}'(\sigma)$, $\vec{\nu}(\sigma) = \frac{\vec{r}''(\sigma)}{|\vec{r}''(\sigma)|} = \frac{\vec{k}(\sigma)}{k(\sigma)}$. Третий вектор $\vec{\beta}(\sigma)$

должен быть ортогонален векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, $|\vec{\beta}| = 1$. Чтобы его определить, введём в пространстве R_1^3 векторное произведение двух векторов так, чтобы для векторов ортонормированного базиса выполнялись следующие условия: $[\vec{a}_0, \vec{a}_1] = \vec{a}_2$; $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = -\vec{a}_0$; $[\vec{a}_2, \vec{a}_0] = \vec{a}_1$ (рис. 31).

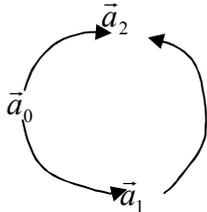


Рисунок 31

Для векторов $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ должны выполняться соотношения (рис. 32):

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{v}], \quad -\vec{\tau} = [\vec{v}, \vec{\beta}], \quad \vec{v} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$$

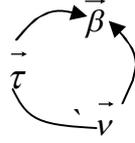


Рисунок 32

Репер $\{\vec{r}(\sigma); \vec{\tau}(\sigma); \vec{v}(\sigma); \vec{\beta}(\sigma)\}$ называется репером Френе кривой $r = r(\sigma)$ в точке σ , где $\vec{\tau}$ – вектор касательной, \vec{v} – главная нормаль, $\vec{\beta}$ – бинормаль. Плоскость, содержащую вектора $\vec{\tau}$ и \vec{v} , будем называть соприкасающейся, плоскость, содержащую вектора \vec{v} и $\vec{\beta}$, – нормальной, а вектора $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$ – спрямляющейся:

$L(\vec{\tau}, \vec{v})$ – соприкасающаяся плоскость,

$L(\vec{v}, \vec{\beta})$ – нормальная плоскость,

$L(\vec{\beta}, \vec{\tau})$ – спрямляющаяся плоскость.

Выведем аналог формул Френе для времениподобной кривой. Так как $\vec{\tau}(\sigma) = \vec{r}'(\sigma)$, то $\vec{\tau}'(\sigma) = \vec{r}''(\sigma) = k\vec{v}$, $\vec{\tau}(\sigma) = k\vec{v}$. Так как репер Френе правый ортонормированный репер, то для него выполнимы равенства: $\vec{\tau}\vec{\tau} = -1$; $\vec{v}\vec{v} = 1$; $\vec{\beta}\vec{\beta} = 1$; $\vec{\tau}\vec{v} = \vec{v}\vec{\beta} = \vec{\tau}\vec{\beta} = 0$. Нужно найти $\vec{\beta}'$. Вектор $\vec{\beta}'$ ортогонален векторам $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$, то есть он коллинеарен вектору \vec{v} : так как $\vec{\beta}\vec{\beta} = 1 \Rightarrow 2\vec{\beta}\vec{\beta}' = 0$, то есть $\vec{\beta} \perp \vec{\beta}'$; $\vec{\tau}\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}'\vec{\beta} + \vec{\tau}\vec{\beta}' = 0$. Значит, что

$$\vec{\tau}' = k\vec{v} \Rightarrow \underbrace{k\vec{v}}_0 \vec{\beta} + \vec{\tau}\vec{\beta}' = 0 \Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{\beta}'.$$

Таким образом, $\vec{\tau}' = k\vec{v}$; $\vec{\beta}' = -\varkappa\vec{v}$. Так как $\vec{v} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$, то $\vec{v}' = [\vec{\beta}', \vec{\tau}] + [\vec{\beta}, \vec{\tau}'] = -\varkappa[\vec{v}, \vec{\tau}] + k[\vec{\beta}, \vec{v}] = k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}$.

Итак,

$$\vec{\tau}' = k\vec{v}$$

$\vec{v}' = k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}$ – формулы Френе времениподобной n-параметризованной

$\vec{\beta}' = -\varkappa\vec{v}$ кривой.

В этих формулах функции $k(\sigma)$ и $\varkappa(\sigma)$ назовём кривизной и кручением. Найдём формулы для их вычисления: $\vec{r}' = \vec{\tau}$; $\vec{r}'' = k\vec{v}$; $\vec{r}''' = k^2\vec{\tau} + k\varkappa\vec{\beta}$. Найдём векторное произведение: $[\vec{r}', \vec{r}''] = [\vec{\tau}, k\vec{v}] = k\vec{\beta} \Rightarrow k = \left| [\vec{r}', \vec{r}''] \right|$, то есть $k(\sigma) = \left| [\vec{r}'(\sigma), \vec{r}''(\sigma)] \right|$.

Найдём теперь произведение

$$[\vec{r}', \vec{r}'] \vec{r}''' = [\vec{\tau}, k\vec{v}] (k^2\vec{\tau} + k\varkappa\vec{\beta}) = k^3 \underbrace{[\vec{\tau}, \vec{v}]}_0 \vec{v} + k^2 \varkappa \underbrace{[\vec{\tau}, \vec{v}]}_1 \vec{\beta} = 0 + k^2 \varkappa \vec{\beta}\vec{\beta} = k^2 \varkappa.$$

Таким образом, $\alpha(\sigma) = \frac{\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)\vec{r}'''(\sigma)}{|\vec{r}'(\sigma), \vec{r}''(\sigma)|^2}$.

Пусть кривая $\vec{r}(\sigma)$ имеет другую эквивалентную параметризацию, отличную от n -параметризации, то есть пусть $\vec{\rho}(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$, где $t = t(\sigma)$ – функция перехода, то есть $\vec{r}(\sigma) = \vec{\rho}(t(\sigma))$. Тогда $\vec{r}'(\sigma) = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = \vec{\rho}'t'$; $\vec{r}''(\sigma) = \vec{\rho}''(t')^2 + \vec{\rho}'t''$; $\vec{r}'''(\sigma) = \vec{\rho}'''(t')^3 + 3\vec{\rho}''t't'' + \vec{\rho}'t'''$.

Подставив полученные формулы в выражения для вычисления кривизны и кручения, получаем: $(\vec{r}'(\sigma))^2 = (\vec{\rho}')^2(t')^2$. $(t')^2 = \frac{1}{(\vec{\rho}')^2}$, то есть

$t' = \frac{1}{\sqrt{-(\vec{\rho}')^2}}$, т. к. $\vec{r}'(\sigma) \cdot \vec{r}'(\sigma) = -1$. Тогда

$$k(\sigma) = \left| \left[\vec{r}'(\sigma), \vec{r}''(\sigma) \right] \right| = \left| \left[\vec{\rho}'t', \vec{\rho}''(t')^2 + \vec{\rho}'t'' \right] \right| = (t')^3 \left| \left[\vec{\rho}', \vec{\rho}'' \right] \right| = \frac{\left| \left[\vec{\rho}', \vec{\rho}'' \right] \right|}{\left(\sqrt{1 - (\vec{\rho}')^2} \right)^3},$$

$$\alpha(\sigma) = \frac{\vec{r}'(\sigma)\vec{r}''(\sigma)\vec{r}'''(\sigma)}{|\vec{r}'(\sigma), \vec{r}''(\sigma)|^2} = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'']\vec{r}'''}{|\vec{r}', \vec{r}''|^2} = \frac{(t')^3 [\vec{\rho}', \vec{\rho}''](\vec{\rho}'''(t')^3 + 3\vec{\rho}''t't'' + \vec{\rho}'t''')}{\left((t')^3 \left| \left[\vec{\rho}', \vec{\rho}'' \right] \right| \right)^2} =$$

$$= \frac{(t')^6 \vec{\rho}'\vec{\rho}''\vec{\rho}'''}{(t')^6 \left| \left[\vec{\rho}', \vec{\rho}'' \right] \right|^2} = \frac{\vec{\rho}'\vec{\rho}''\vec{\rho}'''}{\left| \left[\vec{\rho}', \vec{\rho}'' \right] \right|^2}.$$

Итак,

кривизна: $k(t) = \frac{\left| \left[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \right] \right|}{\left(\sqrt{1 - (\vec{r}'(t))^2} \right)^3},$

кручение: $\alpha(t) = \frac{\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{\left| \left[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \right] \right|^2}.$