

4 Метрика на поверхности. Теория кривизны

13 Первая квадратичная форма

Пусть задана поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Риманова метрика определялась следующим образом: пусть задана кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$. Её длина $\ell = \int_a^b |\vec{v}_t| dt$, $\vec{v}_t = \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right)$ – есть вектор скорости в криволинейных координатах (u, v) . $|\vec{v}_t|^2 = g_{ij}(x^i)'(x^j)'$, здесь $x^1 = u$, $x^2 = v$; $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$. Набор этих функций мы определяли как риманову метрику в криволинейных координатах (u, v) . Этот набор определяет длину кривой и углы между двумя кривыми в точке их пересечения. Чему равны $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$, где $u = x^1$, $v = x^2$? Пусть кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$ записана через координаты (u, v) и лежит на поверхности в пространстве R^3 с координатами (x, y, z) . Длиной кривой $u(t)$, $v(t)$ на поверхности мы назовём длину этой кривой в трёхмерном евклидовом пространстве.

Пусть $x = x(u(t), v(t)) = x(t)$; $y = y(u(t), v(t)) = y(t)$; $z = z(u(t), v(t)) = z(t)$. Найдём длину $\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$.

Так как $x' = x_u u' + x_v v'$; $y' = y_u u' + y_v v'$; $z' = z_u u' + z_v v'$, то

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (x_u u' + x_v v')^2 + (y_u u' + y_v v')^2 + (z_u u' + z_v v')^2 = \\ &= \underbrace{(x_u x_u + y_u y_u + z_u z_u)}_E u'^2 + \underbrace{2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)}_F u'v' + \underbrace{(x_v x_v + y_v y_v + z_v z_v)}_G v'^2 = \\ &= Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2, \text{ где } g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G, \text{ здесь } u = x^1, v = x^2. \end{aligned}$$

Если теперь векторы $\vec{r}_u = x_u \vec{e}_1 + y_u \vec{e}_2 + z_u \vec{e}_3$; $\vec{r}_v = x_v \vec{e}_1 + y_v \vec{e}_2 + z_v \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базисные векторы, то мы можем записать $g_{ij} = \vec{r}_{x^i} \vec{r}_{x^j}$, $x^1 = u$, $x^2 = v$. Функции $g_{ij}(u, v) = (E, F, G)$ определены в координатах на поверхности.

Определение. Выражение $\varphi_1 = g_{ij} dx^i dx^j = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2$ называется первой квадратичной формой или римановой метрикой на поверхности.

Пусть теперь поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда риманова метрика на поверхности $dx^2 + dy^2 + dz^2$ имеет вид: $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$. Предположим, что $F_z \neq 0$, тогда $dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$. Итак, $dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

$$= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{F_x}{F_z} dx + \frac{F_y}{F_z} dy \right)^2 = \left(1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} \right) dx^2 + 2 \frac{F_x F_y}{F_z^2} dx dy + \left(1 + \frac{F_y^2}{F_z^2} \right) dy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{11} = E = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, \quad g_{22} = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}, \quad g_{12} = F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad u = x' = x, v = x^2 = y.$$

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$. Тогда $g_{11} = 1 + f_x^2$; $g_{12} = g_{21} = f_x f_y$; $g_{22} = 1 + f_y^2$.

Имея риманову метрику, мы можем измерить на поверхности длину любой кривой $u = u(t)$ и $v = v(t)$, а также угол между двумя кривыми в точке пересечения (угол между двумя пересекающимися кривыми есть угол между их касательными в точке пересечения) (рис. 33).

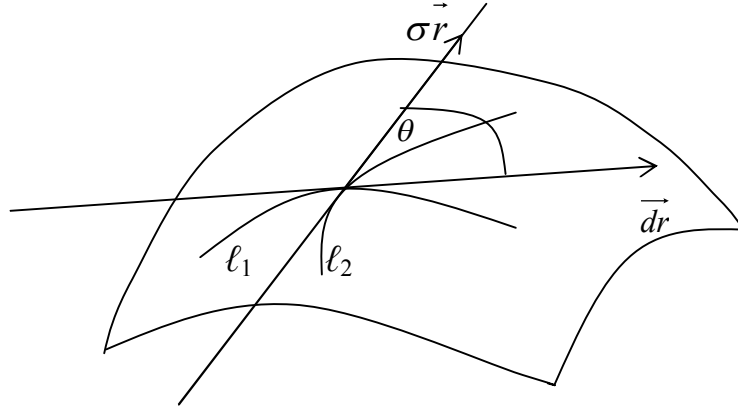


Рисунок 33

Пусть $\vec{dr}, \vec{\sigma r}$ есть касательные векторы данных кривых.

$$\vec{dr} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \quad \vec{\sigma r} = \vec{r}_u \sigma u + \vec{r}_v \sigma v; \quad \cos \theta = \frac{d\vec{r} d\vec{\sigma}}{|\vec{dr}| |\vec{d\sigma}|}; \quad \frac{dr}{d\ell} = \tau;$$

$$d\vec{r}^2 = d\ell^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2 = \phi_1.$$

$$\text{Итак, } |\vec{dr}| = d\ell = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2};$$

$$|\vec{\sigma r}| = \sigma\ell = \sqrt{E\sigma u^2 + 2F\sigma u\sigma v + G\sigma v^2}.$$

Найдём скалярное произведение:

$$d\vec{r} d\vec{\sigma r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \sigma u + \vec{r}_v \sigma v) = \vec{r}_u^2 du \sigma u + \vec{r}_u \vec{r}_v (du \sigma v + \sigma u dv) + \vec{r}_v^2 dv \sigma v =$$

$$= Edu \sigma u + F(du \sigma v + dv \sigma u) + Gdv \sigma v;$$

$$\cos \theta = \frac{Edu \sigma u + F(du \sigma v + dv \sigma u) + Gdv \sigma v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \sqrt{E\sigma u^2 + 2F\sigma u\sigma v + G\sigma v^2}}.$$

Площадь поверхности находится по следующей формуле:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Тема 14 Вторая квадратичная форма

Определение. Проекция вектора кривизны линии на нормаль поверхно-

сти в точке, через которую проходит эта кривая, называется нормальной кривизной этой кривой. Обозначается $k_n = \Pi \rho_n \frac{d^2 \vec{r}}{d\ell^2}$, $R_n = \frac{1}{k_n}$ – радиус

нормальной кривизны. Так как нормаль $\vec{n}$ заранее ориентирована, то проекция на неё может быть как положительной, так и отрицательной. Вычислим нормальную кривизну: $\frac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$; $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} = \vec{r}_{uu}$; $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} = \vec{r}_{vv}$; $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} = \vec{r}_{uv}$.

Найдём $\frac{d^2 \vec{r}}{d\ell^2} = \vec{r}_u u'' + \vec{r}_v v'' + \vec{r}_{uu} u'^2 + 2\vec{r}_{uv} u'v' + \vec{r}_{vv} v'^2$. Вспомним, что $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \Pi \rho_a \vec{b}$.

Итак, $k_n = \vec{r}_\ell \vec{n} = \vec{n} \vec{r}_{uu} u'^2 + 2\vec{n} \vec{r}_{uv} u'v' + \vec{n} \vec{r}_{vv} v'^2 = b_{11} u'^2 + 2b_{12} u'v' + b_{22} v'^2$, где $b_{11} = L = \vec{n}' \vec{r}_{uu}$; $b_{12} = b_{21} = M = \vec{n} \vec{r}_{uv}$; $b_{21} = N = \vec{n}' \vec{r}_{vv}$, $\vec{r}_u \perp \vec{n}$, $\vec{r}_v \perp \vec{n}$.

Выражение $\varphi_2 = \frac{d^2 \vec{r}}{d\ell^2} n dt^2 = b_{ij} dx^i dx^j = L du^2 + 2M dudv + N dv^2$, $u = x^1$,

$v = x^2$ называется второй квадратичной формой. Итак,

$k_n = \frac{L du^2 + 2M dudv + N dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ – нормальная кривизна. Так как

$|\vec{r}_u, \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, то $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$. Тогда

$L = \vec{n} \vec{r}_{uu} = \frac{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}$; $M = \vec{n} \vec{r}_{uv} = \frac{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}$; $N = \vec{n} \vec{r}_{vv} = \frac{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}$.

Зависимость между кривизной и нормальной кривизной можно получить, если ввести угол между нормальным вектором поверхности и вектором главной нормали кривой. Угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{v}$ обозначим через θ . $\vec{v}$ – единичный вектор главной нормали.

$k_n = \frac{1}{R_n}$, $k = \frac{1}{R}$.

Тогда $k_n = \frac{1}{R_n} = \vec{n} \frac{d^2 \vec{r}}{d\ell^2} = \vec{n} k \vec{v} = k \vec{n} \vec{v} = \frac{\cos \theta}{R}$. Следовательно, $R = R_n \cos \theta$.

Таким образом, кривизна зависит от нормальной кривизны и угла $\frac{\pi}{2} - \theta$, который совпадает с углом между касательной плоскостью поверхности и соприкасающейся плоскостью кривой. Если соприкасающаяся плоскость кривой на поверхности в данной её точке задана, то она определяет своим пересечением с касательной плоскостью поверхности и касательную прямую этой кривой. Теперь, зная направления касательной прямой, можно найти нормальную кривизну. И так как угол θ известен, то можно опреде-

лить полную кривизну. Следовательно, все кривые поверхности, имеющие общую точку и общую соприкасающуюся плоскость в этой точке, имеют в ней одинаковые кривизны.

Тема 15 Индикатриса Дюпена

Изучение кривизны всех линий на поверхности сводится к рассмотрению плоских сечений. Кривизна произвольного сечения, как мы видели, связана с кривизной нормального сечения. Таким образом, вопрос о кривизне линий на поверхности сводится к изучению кривизны нормальных сечений. Через данную точку поверхности можно провести бесчисленное множество нормальных сечений. Как же изменяется нормальная кривизна при переходе от одного такого сечения к другому? Возьмём на поверхности некоторую точку M и будем откладывать от неё на касательной к каждому нормальному сечению отрезок равный $\sqrt{R}$, где R – кривизна нормального сечения (рис. 34).

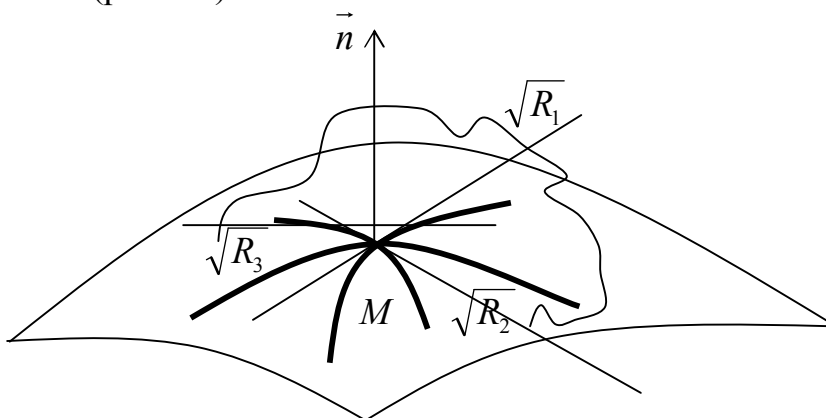


Рисунок 34

Определение. Множество концов этих отрезков есть некоторая плоская кривая, расположенная в касательной плоскости поверхности, которая называется индикатрисой Дюпена, соответствующей данной точке.

Найдём её уравнение. За начало координат, которое расположим в касательной плоскости, примем точку прикосновения M . Масштабные векторы пусть будут $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Пусть $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$ – есть радиус-вектор произвольной точки индикатрисы, то есть $\vec{\xi} = \xi^1 \vec{r}_u + \xi^2 \vec{r}_v$. С другой стороны, вектор $\vec{\xi}$ можно записать в таком виде: $\vec{\xi} = \sqrt{R} \vec{V}$, где $\vec{V}$ – единичный вектор касательной некоторого нормального сечения, а R – радиус его кривизны в точке M . Но $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{r}_u \frac{du}{d\ell} + \vec{r}_v \frac{dv}{d\ell}$, где $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – радиус-вектор точки нормального сечения.

Мы можем приравнять эти выражения:

$\vec{\xi} = \xi^1 \vec{r}_u + \xi^2 \vec{r}_v = \sqrt{R} \vec{V} = \sqrt{R} \left(\vec{r}_u \frac{du}{d\ell} + \vec{r}_v \frac{dv}{d\ell} \right)$. Отсюда следует, что

$$\xi^1 = \sqrt{R} \frac{du}{d\ell}, \quad \xi^2 = \sqrt{R} \frac{dv}{d\ell}. \quad \text{Но} \quad k_n = \frac{1}{R_n} = L \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 + 2M \frac{du}{d\ell} \frac{dv}{d\ell} + N \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^2.$$

Умножим обе части этого равенства на R .

$$\text{Имеем } \frac{R}{R_n} = \left(\sqrt{R} \frac{du}{d\ell} \right)^2 L + 2M \left(\sqrt{R} \frac{du}{d\ell} \right) \left(\sqrt{R} \frac{dv}{d\ell} \right) + N \left(\sqrt{R} \frac{dv}{d\ell} \right)^2.$$

Но $R = R_n \cos \theta$. Это значит, что кривизна нормального сечения и нормальная кривизна поверхности, соответствующая направлению этого сечения, могут отличаться только знаком, так как в этом случае векторы главной нормали и нормали поверхности равны и могут отличаться только направлением, то есть $\theta = 0^0$, либо $\theta = \pi$. Таким образом, $R = \pm R_n$.

Имеем $L(\xi^1)^2 + 2M\xi^1\xi^2 + N(\xi^2)^2 = \pm 1$ – уравнение индикатрисы Дюпена. Знак “+” соответствует случаю вогнутого, а знак “–” случаю выпуклого нормального сечения, так как вектор главной нормали всегда указывает в сторону вогнутости плоской кривой. Упростим это уравнение. Приведём некоторые сведения из алгебры. Рассмотрим на плоскости пару квадратичных форм, одна из которых положительна. И пусть их матрицы имеют вид: $G = (g_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Составим уравнение: $\det(B - \lambda G) = 0$, $(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0$. Корни этого уравнения называются собственными числами пары квадратичных форм.

Составим систему:
$$\begin{cases} (b_{11} - \lambda_i g_{11})\xi_i^1 + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^2 = 0 \\ (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^1 + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\xi_i^2 = 0 \end{cases}$$
, где ξ_i^1 и ξ_i^2 неизвестные. Если λ_1 и λ_2 – собственные числа, то система имеет нетривиальные решения $\vec{c}_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2)$, $\vec{c}_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2)$. Направления векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ называются главными направлениями пары квадратичных форм. Вектор $\vec{c}_1$ соответствует λ_1 , а $\vec{c}_2$ соответствует λ_2 . Известно также, что если собственные числа пары квадратичных форм различны, то главные направления ортогональны.

Определение. Собственные числа этой пары квадратичных форм называются главными кривизнами в данной точке. Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной, а их сумма – средней кривизной поверхности.

Упростим теперь уравнение индикатрисы Дюпена за счёт выбора системы координат. В нашем случае система декартовых координат в касательной плоскости связана с системой криволинейных координат на поверхности. Выберем систему координат на поверхности так, чтобы сделать возможным упрощение. Поместим начало прямоугольных координат про-

странства в данную точку M поверхности и совместим плоскость XOY с её касательной плоскостью, не выбирая пока направления осей OX и OY .

Пусть задана поверхность $z = f(x, y)$. Параметризуем эту поверхность. Пусть $x = u$, $y = v$, тогда поверхность $z = f(u, v)$. Такая система криволинейных координат называется нормальной в точке M . Координатные векторы, соответствующие этой параметризации имеют вид:

$$\vec{r}_u = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \vec{k}, \quad \vec{r}_v = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial v} \vec{k}, \quad \text{так как } \vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(u, v, f(u, v)), \quad \vec{r}_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}),$$

$$\vec{r}_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}), \quad \vec{r}_u = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial u} \vec{k};$$

$$\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial v} \vec{k}.$$

В начале координат, которое совпадает с данной точкой M , эти векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ должны лежать в плоскости XOY , которая касательна поверхности.

Таким образом, для точки O $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 = 0$, а $(\vec{r}_u)_0 = \vec{i}$, $(\vec{r}_v)_0 = \vec{j}$. Т. е.,

декартова система координат здесь превращается в обычную прямоугольную, где $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$. Выберем теперь направление осей OX и OY . Совместим эти оси с главными направлениями индикатрисы Дюпена. Известно, что если координатные оси идут по главным направлениям кривой второго порядка, то в её уравнении отсутствует член с произведением координат, то есть $M_0 = 0$. И уравнение принимает вид: $L_0 x^2 + N_0 y^2 = \pm 1$ – уравнение индикатрисы Дюпена.

Тема 16 Формула Эйлера

Получим формулу Эйлера, которая устанавливает зависимость между нормальной кривизной любого направления и нормальными кривизнами главных направлений индикатрисы. Обозначим через φ угол между главным направлением и направлением произвольного сечения (рис. 35).

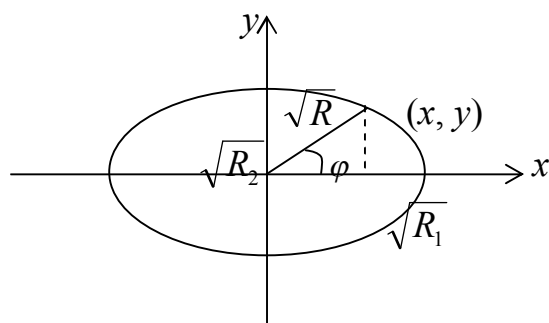


Рисунок 35

Тогда для координат точки индикатрисы имеем, что $x = \sqrt{R} \cos \varphi$, $y = \sqrt{R} \sin \varphi$, где $\sqrt{R}$ – радиус кривизны соответствующей этой точке нормального сечения. Подставив эти значения в уравнение $L_0 x^2 + N_0 y^2 = \pm 1$, получаем $L_0 \cos^2 \varphi + N_0 \sin^2 \varphi = \pm 1 = \pm \frac{1}{R} = \frac{1}{R_n}$. Главными кривизнами $k_1 = \frac{1}{R_1}$ и $k_2 = \frac{1}{R_2}$ поверхности в данной точке называются нормальные кривизны, соответствующие главным направлениям индикатрисы Дюпена. В нашем случае эти направления определяются значениями 0 и $\frac{\pi}{2}$ угла φ . Таким образом, $k_1 = L_0$, $k_2 = N_0$ и уравнение перепишем в виде:
 $k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$ – формула Эйлера.

Вычислим главные кривизны. Пусть на поверхности заданы две системы криволинейных координат. Первая из этих систем является нормальной в данной точке, а вторая произвольная, но такова, что по отношению к этой системе данная точка является неособой. Если координатные векторы нормальной системы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ идут по главным направлениям поверхности в этой точке, то первая квадратичная форма имеет вид: $\varphi_1 = dx^2 + dy^2$, а вторая квадратичная форма – $\varphi_2 = k_1 dx^2 + k_2 dy^2$, где k_1, k_2 – главные кривизны поверхности. Запишем теперь выражения этих квадратичных форм в произвольной системе криволинейных координат и приравняем к данной.

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = k_1 dx^2 + k_1 dy^2 \quad (1)$$

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2)$$

Умножим обе части уравнения (2) на k_1 и почленно вычтем из (1):

$$(L - k_1 E)du^2 + 2(M - k_1 F)dudv + (N - k_1 G)dv^2 = (k_2 - k_1)dy^2$$

При переходе от произвольных координат к нормальным имеем:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = a du + b dv.$$

Итак:

$$(L - k_1 E)du^2 + 2(M - k_1 F)dudv + (N - k_1 G)dv^2 = (k_2 - k_1)dy^2 = \\ = (k_2 - k_1)(a^2 du^2 + 2abdudv + b^2 dv^2), \text{ то есть}$$

$$\begin{cases} L - k_1 E = a^2 (k_2 - k_1) \\ M - k_1 F = ab (k_2 - k_1) \\ N - k_1 G = b^2 (k_2 - k_1) \end{cases}$$

Из этой системы, выражая $k_2 = f(k_1)$, можно получить

$$(L - k_1 E)(N - k_1 G) - (M - k_1 F)^2 = 0.$$

К аналогичному выражению, содержащему k_2 , мы придём, если ис-

ключить подобным образом dy^2 . Таким образом, главные кривизны поверхности в каждой точке являются корнями характеристического уравнения $(L - sE)(N - sG) - (M - sF)^2 = 0$. Раскрыв скобки и произведя соответствующие преобразования, получаем:

$$LN - ENS - LGS + EGs^2 - M^2 + 2MFs - F^2s^2 = 0;$$

$$(EG - F^2)s^2 + (-EN + 2MF - LG)s + LN - M^2 = 0;$$

$$s^2 - \underbrace{\frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}}_{2H}s + \underbrace{\frac{LN - M^2}{EG - F^2}}_K = 0;$$

$$s^2 - 2Hs + K = 0;$$

$K = k_1k_2$ – полная (гауссова) кривизна;

$k_1 + k_2 = 2H$ – средняя кривизна.