

5 Расположение кривой на плоскости и в пространстве

Тема 17 Строение поверхности вблизи данной точки

Выше было показано, что каждой точке поверхности соответствует индикатриса Дюпена, то есть кривая второго порядка. В связи с этим точки поверхности распределяются на три класса и называются эллиптическими, гиперболическими и параболическими в зависимости от того, к какому из трёх типов принадлежит индикатриса Дюпена в этой точке. Чтобы определить, к какому классу принадлежит данная точка поверхности, надо составить выражение $\sigma = LN - M^2$, которое называется дискриминантом. Если $\sigma > 0$, то точка эллиптическая; если $\sigma < 0$, то точка гиперболическая; если $\sigma = 0$, то точка параболическая;

Так как $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\sigma}{EG - F^2}$, $EG - F^2 > 0$, то точка будет эллип-

тическая, гиперболическая, параболическая, если полная или гауссова кривизна положительна, отрицательна или равна нулю соответственно. Если $L = M = N = 0$, то в этом случае все нормальные сечения имеют кривизну, равную нулю, и понятие индикатрисы здесь теряет смысл. Такие точки называются точками утолщения. Таким образом, точка параболическая, если $\sigma = 0$, но точка не является точкой утолщения.

Если индикатриса Дюпена принадлежит к эллиптическому типу, то в нормальной системе координат её уравнение имеет вид: $k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1$, $\sigma = k_1 k_2 > 0$. Итак, радиусы главных кривизн имеют одинаковые знаки. Выберем направление нормального вектора так, чтобы $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Формула Эйлера запишется в виде: $k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$. Эта формула показывает, что в рассматриваемой точке нормальные кривизны всех направлений положительны, то есть все нормальные сечения вогнуты. Итак, вогнутость всех нормальных сечений, проходящих через эллиптическую точку поверхности, направлена в одну сторону. Значит, все точки поверхности, достаточно близкие к эллиптической точке, расположены по одну сторону от касательной плоскости в этой точке.

Обратно, если все точки поверхности, достаточно близкие к данной, лежат по одну сторону от касательной плоскости, а кривизна нормального сечения, в том числе и сечения главных направлений, имеют кривизну одного знака, то есть $\sigma = k_1 k_2 > 0$, то данная точка в этом случае эллиптическая. При надлежащем выборе ориентации все сечения в эллиптической точке вогнуты. Поэтому в правой части уравнения индикатрисы мы берём

+1 и уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 1$, где R_1 и R_2 – положительные чис-

ла. Итак, в эллиптической точке индикатриса является действительным эллипсом.

Определение. Если в некоторой точке поверхности индикатриса имеет форму окружности, то эта точка называется омбилической.

Это возможно при $k_1 = k_2$. Тогда $k_n = k_1(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k_1 \Rightarrow$ все нормальные кривизны равны между собой. В общей системе координат омби-

лическая точка характеризуется равенствами:
$$\begin{cases} L = \lambda E \\ M = \lambda F \\ N = \lambda G \end{cases}$$
, так как только при

этом условии нормальная кривизна не будет зависеть от направления (любая точка сферической поверхности).

Если точка гиперболическая, то в нормальной системе координат дискриминант её индикатрисы Дюпена $\sigma = k_1 k_2 < 0$, то есть главные нормальные кривизны имеют разные знаки. Выберем направление нормального вектора так, чтобы $R_1 = \rho_1 > 0$ и $R_2 = -\rho_2 < 0$. Формула Эйлера

$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2}$, где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Нормальная кривизна в этом случае может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Выясним, когда это возможно: $\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2} > 0$, $tg^2 \varphi < \frac{\rho_1}{\rho_2}$,

$|tg \varphi| < +\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Если $\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2} < 0$, то $|tg \varphi| > +\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Проведём в

касательной плоскости через точку прикосновения две прямые с угловыми коэффициентами $k_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$, $k_2 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Эти прямые совпадают с асимптотами индикатрисы Дюпена (рис. 36).

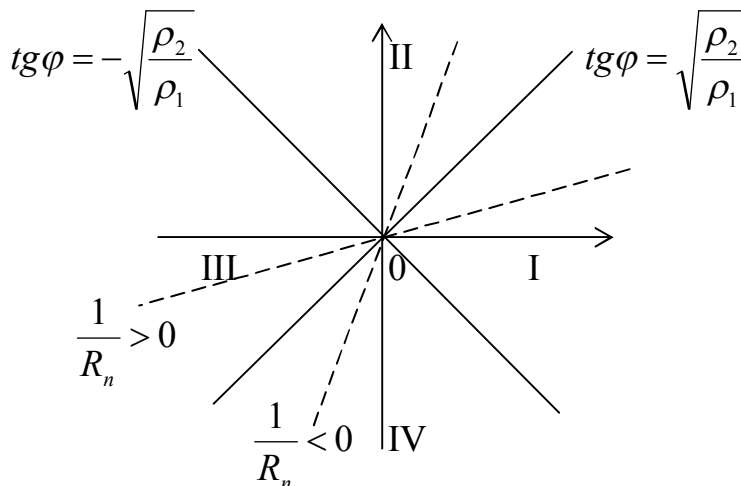


Рисунок 36

Направление прямой, проходящей через точку 0, из I $\rightarrow$ III будет соответствовать положительным, а из II $\rightarrow$ IV – отрицательным значениям нормальной кривизны. Таким образом, все нормальные сечения, проведённые по направлениям прямых, заключённых внутри вертикальных углов I и III, будут вогнуты, а II, IV – выпуклы. Таким образом, обходя по поверхности точку 0 по достаточно замкнутому контуру, мы два раза переходим из его верхней части пространства в его нижнюю часть и два раза совершаем обратный переход, если считать при этом, что пространство разделено на эти части касательной плоскостью в данной точке. Учитывая распределение выпуклых и вогнутых нормальных сечений, можно сказать, что вблизи гиперболической точки поверхности имеет седлообразное строение (рис. 37).

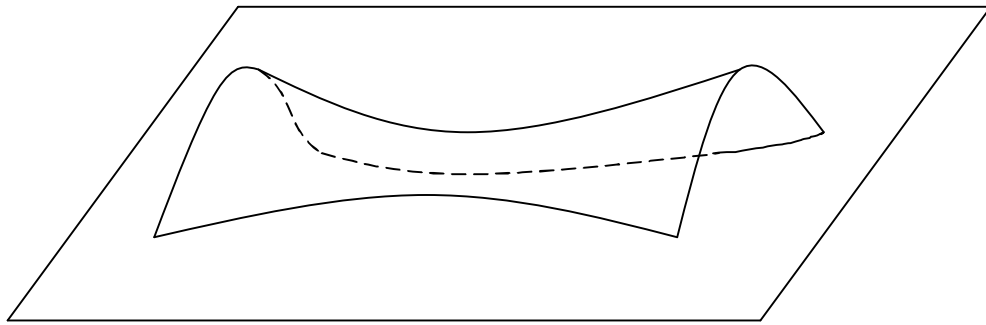


Рисунок 37

Переходя к рассмотрению вида индикатрисы Дюпена в гиперболической точке, обратим внимание на то, что для направления с положительной нормальной кривизной её уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{\rho_1} - \frac{y^2}{\rho_2} = 1$, а для сечений

с отрицательной нормальной кривизной $-\frac{x^2}{\rho_1} - \frac{y^2}{\rho_2} = -1$. Таким образом,

индикатриса в гиперболической точке имеет вид двух сопряжённых гипербол, то есть таких гипербол, которые имеют общие асимптоты, причём действительная ось одной совпадает с мнимой осью другой и наоборот.

Для параболической точки $\sigma = LN - M^2 = 0$, $K = k_1 k_2 = 0$.

Пусть $k_2 = 0$. Выберем направление нормального вектора поверхности так, чтобы $R_1 = \rho_1 > 0$. В таком случае уравнение индикатрисы в нормальной системе координат принимает вид: $\frac{x^2}{\rho_1} = 1$, а формула Эйлера имеет

вид: $\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1}$. Нормальная кривизна обращается в нуль, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и

отлична от нуля во всяком другом направлении.

Уравнение $\frac{x^2}{\rho_1} = 1$ показывает, что индикатриса распадается на пару

параллельных прямых: $x = \sqrt{\rho_1}$, $x = -\sqrt{\rho_1}$. Радиус-вектор любой точки этих прямых имеет конечное значение. Прямая, которая совпадает с осью ОУ, параллельна обеим прямым, поэтому соответствующая её направлению нормальная кривизна равна нулю. Направление оси ОУ является одновременно и главным и асимптотическим направлением индикатрисы. Чтобы выяснить строение поверхности вблизи параболической точки заметим, что все нормальные сечения можно считать вогнутыми, за исключением сечения, касающегося асимптотического направления индикатрисы. Кривизна этого последнего в рассматриваемой точке равна нулю, так что она является точкой спрямления. В простейшем случае это будет точка перегиба, и тогда поверхность вблизи данной точки имеет полуседлообразное строение (рис. 38).

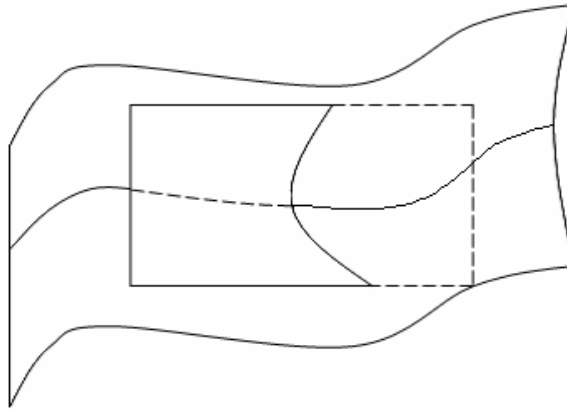


Рисунок 38

Однако и точка спрямления может быть точкой выпуклости или вогнутости. В этих случаях поверхность может иметь различное и достаточно сложное строение.

Тема 18 Взаимное расположение кривой и плоскости

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и плоскость, которая имеет с этой кривой общую точку M_0 с радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$.

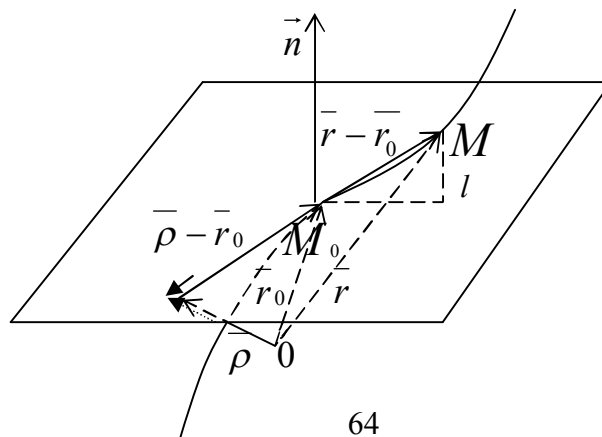


Рисунок 39

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали плоскости, тогда $\vec{n}(\vec{\rho} - \vec{r}_0) = 0$ и, следовательно, $l = \vec{n}(\vec{\rho} - \vec{r}_0)$ есть расстояние от произвольной точки M кривой до плоскости, причём $l > 0$, если точка расположена по ту сторону плоскости, куда направлен вектор $\vec{n}$, и $l < 0$, если он направлен по другую сторону плоскости (рис. 39).

Пусть функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ дифференцируема n раз на отрезке $[t, t + h]$. Тогда

$$x(t + h) = x + x'h + \frac{1}{2!}x''h^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(t_1)h^n;$$

$$y(t + h) = y + y'h + \frac{1}{2!}y''h^2 + \dots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(t_2)h^n;$$

$$z(t + h) = z + z'h + \frac{1}{2!}z''h^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^{(n)}(t_3)h^n,$$

где $t_i \in [t, t + h]$, $t_i \in [t, t + h]$, $i = 1, 2, 3$.

Умножим левые и правые части на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно и сложим:

$$\vec{r}(t + h) = \vec{r}(t) + \vec{r}'(t)h + \frac{1}{2!}\vec{r}''(t)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\vec{r}^{(n-1)}(t)h^{n-1} + \vec{R}_n,$$

где $\vec{R}_n = \frac{1}{n!}(\vec{i}x^{(n)}(t_1) + \vec{j}y^{(n)}(t_2) + \vec{k}z^{(n)}(t_3))h^n$.

Ясно, что $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{i}x^{(n)}(t_1) + \vec{j}y^{(n)}(t_2) + \vec{k}z^{(n)}(t_3)) = \vec{r}^{(n)}(t)$.

Итак, $\vec{R}_n = \left(\frac{\vec{r}^{(n)}(t)}{n!} + \vec{\alpha} \right) h^n$, где $\vec{\alpha} \rightarrow 0$, когда промежуток тоже стремится к нулю. Это формула Тейлора для вектор-функций.

Оценим расстояние l . Разложим функцию $l = f(s)$ в ряд Тейлора. Предположим для простоты, что точка M_0 совпадает с началом отсчета дуг, и $s_0 = 0$.

$$l = \left(\vec{n} \vec{r}_0' \right) s + \frac{1}{2} \left(\vec{n} \vec{r}_0'' \right) s^2 + \frac{1}{6} \left(\vec{n} \vec{r}_0''' \right) s^3 + As^4. \text{ Здесь } \vec{r}' = \vec{\tau}, \vec{r}'' = k\vec{v},$$

$$\vec{r}''' = k'\vec{v} + k(-k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}) = -k^2\vec{\tau} + k'\vec{v} + k\varkappa\vec{\beta}. \text{ Итак,}$$

$$l = \left(\vec{n} \vec{\tau} \right) s + \frac{k}{2} \left(\vec{n} \vec{v} \right) s^2 + \frac{1}{6} \vec{n} (-k^2\vec{\tau} + k'\vec{v} + k\varkappa\vec{\beta}) s^3 + As^4. \text{ Будем называть плос-$$

кость секущей, если она не касается кривой. Для неё $\vec{n} \vec{\tau} \neq 0$. Следовательно, расстояние от точки M кривой до плоскости, секущей кривую в точке M_0 , будет бесконечно малым того же порядка, что и длина M_0M . Для касательной плоскости $\vec{n} \vec{\tau} = 0$. И тогда $l = \frac{k}{2} (\vec{n} \vec{v}) s^2 + \beta s^3$. Касательную плос-

кость будем называть обыкновенной, если она не совпадает с соприкасающейся плоскостью. Для такой плоскости $\vec{n}\vec{\nu} \neq 0$ и, исключая из рассматриваемой точки спрямления ($k = 0$), приходим к выводу: расстояние от точки M кривой до обыкновенной касательной плоскости будет бесконечно малым второго порядка по отношению к длине дуги M_0M , отсчитанной от точки прикосновения M_0 . Для соприкасающейся плоскости $\vec{n}\vec{\tau} = \vec{n}\vec{\nu} = 0$, $\vec{n} = \vec{\beta}$. Таким образом, получаем: $l = \frac{k\alpha}{6}S^3 + AS^4$.

Исключая точки спрямления ($k = 0$) и точки уплощения ($\alpha = 0$), имеем расстояние от точки кривой M до соприкасающейся плоскости будет бесконечно малым третьего порядка по отношению к длине дуги M_0M , отсчитанной от точки прикосновения M_0 .

Это позволяет охарактеризовать взаимное расположение кривой и плоскости. При достаточно малом s знак l совпадает со знаком первого отличного от нуля члена разложения l . Поэтому при переходе S через нуль знак l меняется, если это разложение начинается с члена нечётной степени, и не меняется, если эта степень чётная. Изменение знака s обозначает, что точка M , двигаясь по кривой, переходит с одной точки стороны точки M_0 на ее другую сторону. Если при этом знак l изменяется, то это значит, что точка M переходит с одной стороны плоскости по её другую сторону. Если же знак l не меняется, то точка M возвращается на ту же сторону от плоскости, с которой она подошла к точке M_0 . Итак, может быть три случая, если применить эти рассуждения к разложениям, относящимся к секущей, касательной и соприкасающейся плоскостям (рис. 40).

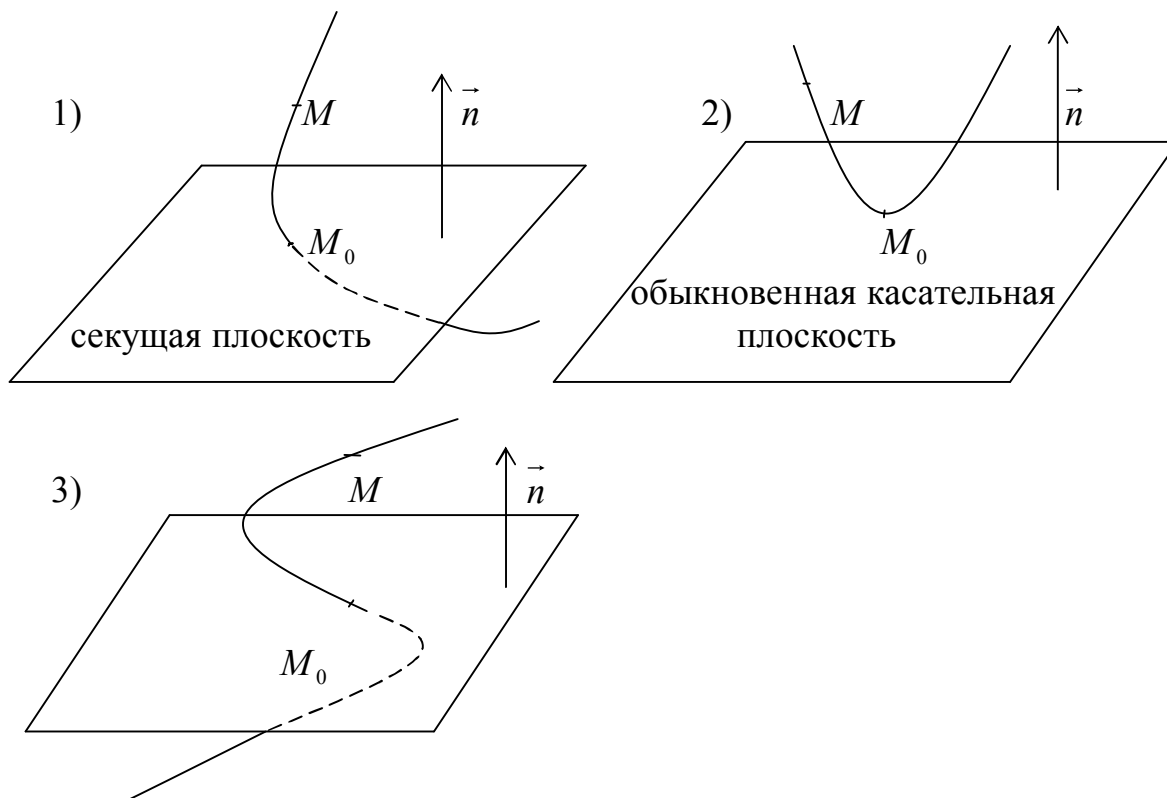


Рисунок 40

Используем формулу Тейлора, чтобы получить разложение координат точки кривой относительно прямоугольных осей, совпадающих с осями сопровождающего трёхгранника. Пусть OX – касательная, OY – главная нормаль, OZ – бинормаль. Тогда x, y, z по величине и по знаку совпадут с расстояниями точки от нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскости соответственно. Подставляем вместо $\vec{n}$ векторы этих плоскостей $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ в выражение для l . Тогда имеем:

$$x = s + \dots; \quad y = \frac{k}{2} s^2 + \dots; \quad z = \frac{k\alpha}{6} s^3 + \dots \quad (*)$$

Рассмотрим проекцию кривой на соприкасающуюся плоскость, чтобы представить зависимость формы кривой от величины кривизны k . Для этого воспользуемся первыми членами разложений (*). Они определяют знаки координат x и y вблизи начала координат, то есть при достаточно малых значениях s . Итак, кривая $x = s, y = \frac{1}{2} k s^2$ будет достаточно точно повторять форму проекций данной кривой вблизи начала координат. Исключая s , получаем уравнение параболы $y = \frac{1}{2} k x^2$. Так как k определена как положительная величина, то ветви параболы отходят от оси OX в ту сторону, в которую указывает вектор главной нормали. А так как координаты точки кривой имеют вблизи данной точки те же знаки, что и знаки координат точек параболы, то вблизи данной точки кривая расположена по ту сторону от спрямляющей плоскости этой точки, в которую направлен вектор главной нормали $\vec{\nu}$: вектор $\vec{\nu}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой.

Рассмотрим теперь проекцию кривой на спрямляющуюся плоскость. Ограничимся рассмотрением главных членов разложения (*), предполагая, что в рассматриваемой точке кручение не равно нулю. Имеем кривую $x = s, z = \frac{1}{6} k \alpha s^3$, которая выражает приближенно рассматриваемую проекцию. Исключая s , получаем: $z = \frac{1}{6} k \alpha x^3$. Это кубическая парабола, касающаяся оси OX в начале координат и имеющая там точку перегиба. Расположение этой кривой зависит от знака при x^3 . Рассмотрим случаи (k всегда больше 0) (рис. 41):

$$\alpha > 0$$

$$\alpha < 0$$



Рисунок 41

Координата z возрастает в первом случае и убывает во втором случае по мере возрастания x . Зная, что знаки координат определяются вблизи данной точки знаками первых членов разложения, можно сделать следующий вывод:

1) вблизи данной точки кривая расположена по разные стороны от соприкасающейся плоскости;

2) если точка движется по кривой в направлении возрастания дуг и проходит через данную точку, то она переходит на ту сторону соприкасающейся плоскости, куда направлен вектор бинормали, если $\alpha > 0$; если $\alpha < 0$, то точка переходит на противоположную сторону соприкасающейся плоскости;

3) кривая тем быстрее отходит от соприкасающейся плоскости, чем больше величина $|\alpha|$.

Всё сказанное выше позволяет судить о расположении кривой вблизи данной точки по отношению к сопровождающему трёхграннику этой точки. Будем считать, что ось OZ направлена снизу вверх. Имеем восемь октантов:

	x		y		z
1	+		+		+
2	–		+		+
3	–		–		+
4	+		–		+
5	+		+		–
6	–		+		–
7	–		–		–
8	+		–		–

Рассмотрим разложение координат точки кривой $k \neq 0$, $\alpha \neq 0$. OX , OY , OZ – совпадают с осями касательной, главной нормалью и бинормалью в данной точке соответственно. Итак, $x = s + \dots$, $y = \frac{1}{2}kS^2 + \dots$, $z = \frac{1}{6}k\alpha S^3 + \dots$.

Первые члены этих разложений определяют знаки координат вблизи данной точки. Если точка движется по кривой в направлении возрастания дуг, то при переходе через начало координат параметр S меняет знак с отрицательных значений на положительные. Рассмотрим случаи:

$$\alpha > 0$$

$$s \quad x \quad y \quad z$$

$$\alpha < 0$$

$$s \quad x \quad y \quad z$$

-	-	+	-	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+	+	-

Итак, мы видим, что если $\alpha > 0$, то кривая переходит из шестого октанта в первый. Если же $\alpha < 0$, то кривая переходит из второго октанта в пятый. Зная, что кривая в начале координат касается ОХ, можно изобразить следующее, наблюдая из первого октанта (рис. 42):

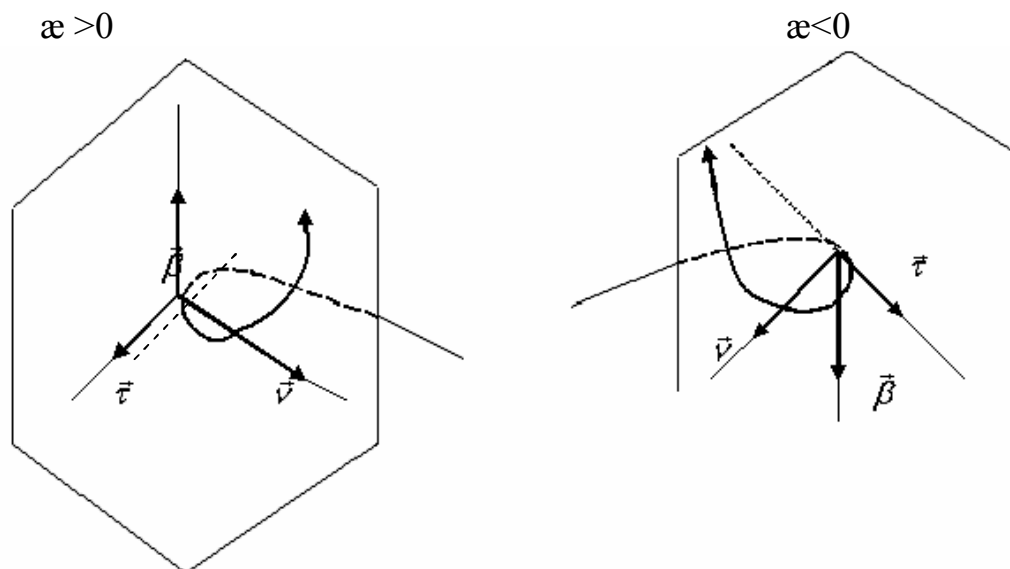


Рисунок 42

Тема 19 Огибающая семейства плоских кривых

Уравнение $F(x, y, a) = 0$, левая часть которого есть непрерывная и дифференцируемая функция трёх переменных, выражает плоскую кривую, при каждом фиксированном a . Придавая a различные числовые значения, можно получить бесконечное множество кривых. Совокупность всех таких кривых образует семейство кривых, зависящих от параметра a .

Очень часто семейство кривых допускает существование кривой, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства. Эту линию будем называть огибающей данного семейства. Точка прикосновения огибающей к кривой семейства называется характеристической точкой кривой семейства. Так как точка огибающей принадлежит некоторой кривой семейства, а эта кривая определяется значениями параметра a , то уравнения $x = x(a)$, $y = y(a)$ можно считать параметрическими уравнениями огибающей. А так как всякая точка огибающей принадлежит одной из кривых семейства, то справедливо равенство: $F(x(a), y(a), a) = 0$.

Отсюда следует, что $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} = 0$.

Пусть теперь уравнение кривой семейства имеет вид: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Тогда условием прикосновения кривой и огибающей будет пропорциональность координат касательных векторов в точке прикосновения.

$$\frac{dx}{da} = \lambda \frac{dx}{dt}; \quad \frac{dy}{da} = \lambda \frac{dy}{dt}. \quad \text{Далее } \lambda \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)}_0 + \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

Но координаты вектора касательной кривой семейства должны удовлетворять для всякой её точки условию $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$. Следовательно,

координаты характеристической точки удовлетворяют равенству $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$.

Итак, координаты точек огибающей будем искать, решая систему:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Решив эти уравнения, мы определим x и y в функции параметра a и найдём кривую, которая называется дискриминантной кривой данного семейства. Огибающая, если она существует, должна входить в состав дискриминантной кривой. При каких условиях решение системы (1) $x = x(a)$, $y = y(a)$ будет огибающей?

$$\text{Имеем: } \begin{cases} F(x(a), y(a), a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{da} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

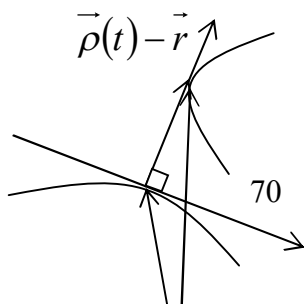
Система (2) говорит о том, что условием прикосновения дискриминантной кривой и кривых семейства является то, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ не равны нулю. В противном случае последнее равенство может

выполняться для касательного вектора $\left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da} \right)$ дискриминантной кривой,

если он и не совпадает по направлению с касательным вектором кривой семейства. Таким образом, ветвь дискриминантной кривой может и не являться огибающей, если в её точках $F_x = F_y = 0$, то есть если эти точки являются особыми точками кривых семейства. Итак, дискриминантная кривая семейства, определяемая системой (2) является огибающей, если она не состоит из особых точек кривых семейства.

Определение. Эволютой плоской кривой называется огибающая её нормалей.

Пусть $r = r(t)$. Тогда имеем (рис. 43):



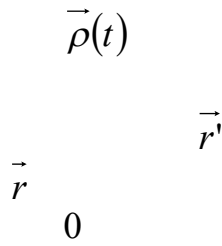


Рисунок 43

Из рисунка 43 видно следующее:

$$\vec{r}'(t)(\vec{\rho}(t) - \vec{r}(t)) = 0 \quad (3)$$

это уравнение при изменении параметра t определяет семейство нормалей плоской кривой. Дифференцируем уравнение (4):

$$\vec{r}''(t)(\vec{\rho}(t) - \vec{r}(t)) - (\vec{r}'(t))^2 = 0. \quad (4)$$

Решая совместно (3) и (4) мы найдём радиус-вектор эволюты. Пусть $\vec{r}(t) = (x, y)$, $\vec{r}'(t) = (x', y')$, $\vec{\rho}(t) = (\varepsilon, \eta)$.

И кривая лежит в плоскости ОХУ. Имеем:

$$\begin{cases} x'(\varepsilon - x) + y'(\eta - y) = 0 \\ x''(\varepsilon - x) + y''(\eta - y) = x'^2 + y'^2 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим, что

$$\varepsilon = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \quad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

Если же кривая $\vec{r}$ задана с помощью натурального параметра, то есть $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(\ell)$, $s = \ell$ – натуральный параметр, то (3) и (4) имеют следующий вид:

$$\vec{r}'(\vec{\rho} - \vec{r}) = 0 \text{ и } \vec{r}''(\vec{\rho} - \vec{r}) = 1, \text{ но } \vec{\tau} = \vec{r}', \vec{r}'' = k\vec{v} \Rightarrow \vec{\tau}(\vec{\rho} - \vec{r}) = 0, k\vec{v}(\vec{\rho} - \vec{r}) = 1.$$

Так как векторы $\vec{\rho} - \vec{r}$, $\vec{\tau}$, $\vec{v}$ лежат в одной плоскости, причём $\vec{\rho} - \vec{r} \perp \vec{\tau}$, то $\vec{\rho} - \vec{r} \parallel \vec{v}$, то есть $\vec{\rho} - \vec{r} = \lambda \vec{v}$. Тогда $k\vec{v}\lambda\vec{v} = 1$, $k\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{k} = R$.

Таким образом, радиус-вектор точки эволюты плоской кривой $\vec{\rho}$ выражается через радиус-вектор $\vec{r}$ точки данной кривой, вектор её главной нормали $\vec{v}$ и радиус её кривизны R так: $\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{v}$. Отсюда, расстояние между соответствующими точками эволюты и данной плоской кривой равно радиусу кривизны этой кривой.

Определение. Ортогональной траекторией однопараметрического семейства линий называется кривая, которая пересекает под прямым углом все линии этого семейства (рис. 44).

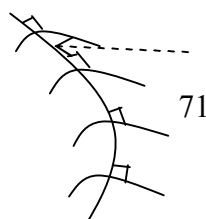


Рисунок 44

Определение. Ортогональная траектория касательных данной кривой называется эвольвентой этой кривой.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s – натуральный параметр, тогда уравнение эвольвенты $\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \vec{\tau}$ (рис. 45).

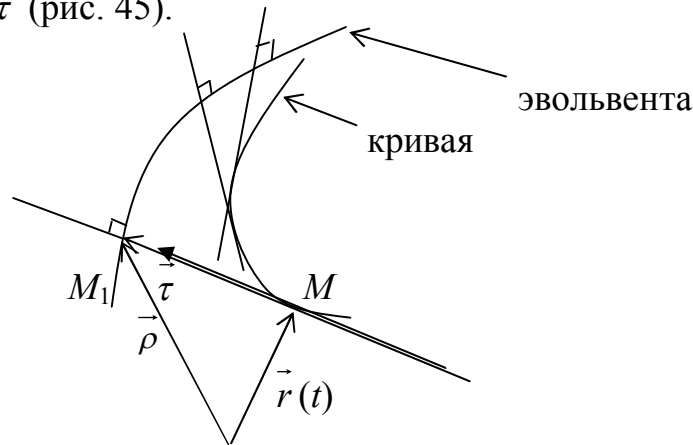


Рисунок 45

Здесь λ расстояние между точкой кривой и соответствующей точкой её эвольвенты. Чтобы найти эвольвенту, найдём зависимость λ от натурального параметра s . Рассмотрим s , как параметр на эвольвенте (а для неё он не будет натуральным), найдём её касательный вектор:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dS} = \vec{\tau} + \frac{d\lambda}{dS} \vec{\tau} + \lambda \vec{\tau}'.$$

Так как эвольвента пересекает касательную данной кривой под прямым углом, то $\frac{d\vec{\rho}}{dS} \vec{r}' = \left(\vec{\tau} + \frac{d\lambda}{dS} \vec{\tau} + \lambda \vec{\tau}' \right) \vec{\tau} = 0, \vec{\tau} \perp \vec{\tau}' \Rightarrow \left(1 + \frac{d\lambda}{dS} \right) = 0, \lambda = s_0 - s.$

Имеем, что $\vec{\rho} = \vec{r} + (s_0 - s) \vec{\tau}$. Итак, всякая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент.

Рассмотрим две из них: $\lambda_1 = s_1 - s, \lambda_2 = s_2 - s$. Расстояние между их соответствующими точками $M_1 M_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = s_2 - s_1$. Таким образом, расстояние между соответственными точками двух эвольвент данной кривой постоянно. Заметим, что если кривая Γ_1 есть эволюта кривой Γ , то Γ есть эвольвента кривой Γ_1 .