

6 Понятие тензора

Тема 20 Тензоры первого и второго ранга

Многие величины задаются в виде числовых функций от точки в пространстве. В трёхмерном пространстве для полной характеристики точки необходимо знать значение не менее трёх числовых функций, именуемых координатами точки (x^1, x^2, x^3) . Каждая из этих координат есть функция точки, а совокупность (x^1, x^2, x^3) полностью определяет эту точку. Тем не менее, понятие числовой функции точки или совокупности таких функций недостаточно для изучения многих задач. Многие геометрические и физические величины могут быть описаны в виде набора числовых функций после того, как в пространстве уже задан какой-то набор координат (x^1, x^2, x^3) . Числовая запись этих величин может измениться, если мы зададим другие координаты, например (z^1, z^2, z^3) , где $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим вектор скорости при движении вдоль некоторой кривой $z^j = z^j(t)$, $j = 1, 2, 3$; $x^i = x^i(t) = x^i(z^1(t), z^2(t), z^3(t))$. В координатах (z) компоненты вектора скорости будут $(\eta^1, \eta^2, \eta^3) = \left(\frac{dz^1}{dt}, \frac{dz^2}{dt}, \frac{dz^3}{dt} \right)_{t=t_0}$. В координатах (x) этот же вектор имеет другие координаты $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right)_{t=t_0}$, где

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= \frac{\partial x^1}{\partial z^1} \frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^1}{\partial z^2} \frac{dz^2}{dt} + \frac{\partial x^1}{\partial z^3} \frac{dz^3}{dt} \\ \frac{dx^2}{dt} &= \frac{\partial x^2}{\partial z^1} \frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^2}{\partial z^2} \frac{dz^2}{dt} + \frac{\partial x^2}{\partial z^3} \frac{dz^3}{dt} \Rightarrow \frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{dz^j}{dt}; \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{dx^3}{dt} &= \frac{\partial x^3}{\partial z^1} \frac{dz^1}{dt} + \frac{\partial x^3}{\partial z^2} \frac{dz^2}{dt} + \frac{\partial x^3}{\partial z^3} \frac{dz^3}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial z^1} \eta^1 + \frac{\partial x^1}{\partial z^2} \eta^2 + \frac{\partial x^1}{\partial z^3} \eta^3 \\ \xi^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial z^1} \eta^1 + \frac{\partial x^2}{\partial z^2} \eta^2 + \frac{\partial x^2}{\partial z^3} \eta^3 \Rightarrow \xi^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \eta^j; \quad i = 1, 2, 3, \quad x^i = x^i(z). \\ \xi^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial z^1} \eta^1 + \frac{\partial x^3}{\partial z^2} \eta^2 + \frac{\partial x^3}{\partial z^3} \eta^3 \end{aligned}$$

Тензоры – это важнейший класс из величин, числовая запись которых меняется при изменении координат. Вектор – простейший пример тензора. Скалярная величина – тривиальный пример тензора, так как его числовая

запись при изменении координат не изменяется.

Рассмотрим другие примеры тензоров.

1 Градиент числовой функции.

Если задана числовая функция $f(x^1, x^2, x^3)$, то

$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) = \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Как выглядит градиент этой функции в координатах (z^1, z^2, z^3) , где каждая $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$; $i = 1, 2, 3$?

Итак, $\text{grad } f(x^1(z), x^2(z), x^3(z)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \frac{\partial f}{\partial z^2}, \frac{\partial f}{\partial z^3} \right) = \eta_1, \eta_2, \eta_3$, где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^1} &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial z^1} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial z^1} \\ \frac{\partial f}{\partial z^2} &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z^i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^i}, i=1, 2, 3. \\ \frac{\partial f}{\partial z^3} &= \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial z^3} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial z^3} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial z^3} \end{aligned}$$

Таким образом, $\eta_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j$, $i = 1, 2, 3$. Итак, градиент функции,

как видим, иначе преобразуется при заменах координат, чем вектор скорости.

Сравним формулы преобразования числовой записи для вектора скорости кривой и градиента функции:

$$\xi^i = \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \text{ — вектор скорости} \quad (1)$$

$$\eta_i = \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \text{ — градиент} \quad (2)$$

Пусть матрица $A = (a_j^i)$, $a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$, $A^T = (b_k^j)$, где $b_k^j = a_k^j$, $(z) \rightarrow (x)$, $\xi = A\eta$ (1'), а вектор $\eta = A^T \xi$ (2'). Если матрица A^T имеет обратную матрицу, то из (2') имеем $(A^T)^{-1} \eta = \xi$ (2''). Итак, получим, что $\xi (A^T)^{-1} \eta \left(\xi_i = \eta_j \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \right)$. В каком случае законы преобразования (1) и (2) при переходе $(x) \rightarrow (z)$ совпадут? Из (1') и (2') $\Rightarrow (x) \rightarrow (z)$, $\xi = A\eta$ (вектор скорости), $\xi = (A^T)^{-1} \eta$ (градиент функции). Следовательно, для совпадения нужно иметь $A = (A^T)^{-1}$, $AA^T = E$. Такие матрицы A , для которых $A^T = A^{-1}$, называются ортогональными. Итак, градиент функции иначе преобразуется при заменах координат, чем вектор скорости. Это другой вид тензора, который называют ковектором в отличие от вектора скорости.

2 Риманова метрика.

Метрические понятия (длины и углы) задаются с помощью набора

функций $(g_{ij}(x))$, если заданы координаты (x^1, x^2, x^3) . Для длины кривой имеем $l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))(\dot{x}^i)(\dot{x}^j)} dt$, где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и квадратичная форма $\sum g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ положительно определена. Это квадратичная форма, определённая на векторах типа векторов скорости в каждой данной точке $(x) = (x^1, x^2, x^3)$ и зависящая от точки. Наборы (g_{ij}) назывались римановой метрикой. При заменах координат $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$, $i = 1, 2, 3$, $l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t))(\dot{z}^i)(\dot{z}^j)} dt$, где $\dot{x}^i(t) = \dot{x}^i(z^1(t), z^2(t), z^3(t))$, причём $\dot{g}_{ij}(z) = g_{kl}(x(z)) \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}$. Таким образом, это ещё один тип тензора.

Риманова метрика (g_{ij}) в данных координатах x^1, x^2, x^3 была нужна для того, чтобы определить понятие длины вектора в данной точке (x) : если вектор $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в точке (x^1, x^2, x^3) , то $|\xi|^2 = g_{ij}(x) \xi^i \xi^j$.

Определим инвариантное понятие квадрата длины ковектора, который преобразуется по закону $\eta_i = \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}$. Для этого введём компоненты $(g^{ij}(x))$, положив при этом, что $|\xi|^2 = g^{ij}(x) \xi_i \xi_j$ в заданной точке (x) , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. При замене координат $x^i = x^i(z)$, $i = 1, 2, 3$ получим закон преобразования $\eta_i = \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}$ и $g^{ij}(z) = g^{kl} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}$. В этом случае длина не будет зависеть от выбора системы координат $|\eta|^2 = |\xi|^2 = g^{ij} \eta_i \eta_j = g^{ij} \xi_i \xi_j$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – запись ковектора в координатах x^1, x^2, x^3 в точке (x) , $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ – запись того же ковектора в той же точке, но в координатах (z^1, z^2, z^3) . Закон преобразования $g^{ij}(z) = g^{kl} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}$ даёт ещё один тип тензора второго ранга.

3 Линейные операторы на векторах.

Пусть в каждой точке пространства с координатами (x^1, x^2, x^3) задана матрица $A = (a_j^i(x))$, которая определяет линейное преобразование векторов в каждой точке $x = (x^1, x^2, x^3)$. Это линейное преобразование имеет вид: $\eta = A\xi$, где $\eta^i = a_j^i(x) \xi^j$; $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ – вектор в точке x . Эта же самая матрица определяет линейное преобразование ковекторов по формуле $\eta = A\xi$, где $\eta_j = a_j^i(x) \xi_i$. При замене координат $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$ из формул $\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \eta^j$, $\eta^i = a_j^i(x) \xi^j$ можно получить, что элементы матрицы A преоб-

разуются по закону $A \sim 'A$; $'A = ('a_j^i)$: $'a_j^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} a_l^k \frac{\partial x^l}{\partial z^j}$, где $x^i = x^i(z)$, $z^j = z^j(x)$, $z^i(x(z)) = z^i$. При этом $\frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Подведём итоги.

1) Скалярная величина – тензор нулевого ранга. Он не преобразуется при замене координат.

2) Вектор (типа скорости) $\xi = (\xi^i)_x \rightarrow ' \xi = (\xi^j)_z$; $' \xi^j = \xi^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i}$.

3) Ковектор (типа градиента функции) $\xi = (\xi_i)_x \rightarrow ' \xi = (\xi_i)_z$; $' \xi_j = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$.

2) и 3) – есть тензоры первого ранга.

4) Скалярное произведение векторов

$$(g_{ij}) \rightarrow ('g_{ij}): 'g_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}, (x) \rightarrow (z).$$

5) Скалярное произведение ковекторов

$$(g^{ij}) \rightarrow ('g^{ij}): 'g^{ij} = g^{kl} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}.$$

6) Линейные операторы на векторах (ковекторах)

$$A = (a_j^i) \rightarrow 'A = 'a_j^i: 'a_j^i = g_l^k \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \frac{\partial z^i}{\partial x^k}; x^i = x^i(z^1, z^2, z^3), z^i = z^i(x^1, x^2, x^3),$$

$$z^i(x^1(z), x^2(z), x^3(z)) = z^i; \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = a_j^i.$$

Примеры 4), 5), 6) – есть тензоры второго ранга.

Тема 21 Общее определение тензора

Определение. Тензором (тензорным полем) типа (p, q) ранга $p + q$ называется объект, который задаётся набором чисел $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ в произвольной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$, числовая запись которого зависит от системы координат по следующему закону: если $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $z^j = z^j(x^1, \dots, x^n)$, $z(x(z)) = z$, то имеет место следующая формула:

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{(k)(l)} 'T_{l_1 l_2 \dots l_q}^{k_1 k_2 \dots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}}, \quad (1)$$

где $'O_{l_1 l_2 \dots l_q}^{k_1 k_2 \dots k_p}$ – числовая запись тензора в координатах (z) , а $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ – числовая запись тензора в координатах (x) . Индексы $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q$ меняются от 1 до n .

Таким образом, вектор скорости – это тензор типа (1, 0), ковектор – это тензор типа (0, 1), квадратичная форма на векторах – это тензор типа (0, 2), а квадратичная форма на ковекторах – это тензор типа (2, 0); линейный оператор на векторах и ковекторах – это тензор типа (1, 1).

Теорема. Компоненты $'T_{l_1 l_2 \dots l_q}^{k_1 k_2 \dots k_p}$ можно выразить через компоненты $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ по следующей формуле:

$$'T_{l_1 l_2 \dots l_q}^{k_1 k_2 \dots k_p} = \sum_{(i),(j)} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}}.$$

◀ Доказательство:

Известно, что $\sum_j \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial x^k} = \delta_k^i$ и $\sum_j \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} = \delta_q^k$, так как преобразования $x = x(z)$ и $z = z(x)$ обратны друг к другу. Рассмотрим (1) как линейное уравнение с правыми частями $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ и неизвестными $'T_{l_1 l_2 \dots l_q}^{k_1 k_2 \dots k_p}$. Решая это уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}} &= \sum_{i,j} \left(\sum_{r,s} 'T_s^r \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{r_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{r_p}} \frac{\partial z^{S_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial z^{S_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \cdot \\ &\left(\frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}} \right) = \sum_{i,j,r,s} 'T_s^r \frac{\partial x^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^S}{\partial x^j} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^\ell} = \sum_{r,s} 'T_s^r \delta_\ell^s \delta_r^k \equiv \\ &\equiv 'T_\ell^k, \quad i = (i_1, \dots, i_p), \quad j = (j_1, \dots, j_q), \quad \ell = (\ell_1, \dots, \ell_q), \quad S = (S_1, \dots, S_q), \\ &k = (k_1, \dots, k_p), \quad r = (r_1, \dots, r_p). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

В любой точке пространства тензоры образуют линейное пространство: если $T = \left(T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)$ и $S = \left(S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)$ – тензоры типа (p, q) , то их линейная комбинация $\alpha T + \beta S = u = \left(\alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \beta S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)$ тоже есть тензор типа (p, q) в этой же самой точке. Отметим, что тензор есть объект, прикрепленный к точке, и не существует правила сложения тензоров, прикрепленных к разным точкам.

Если базисные координатные векторы в n -мерном пространстве с системой координат $x^1, \dots, x^n$ обозначить через $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базисные векторы, а базисные ковекторы обозначить через $e^1, e^2, \dots, e^n$, то любой тензор можно записать в следующем виде:

вектор $\xi = \sum_i \xi^i e_i$, ковектор $\xi = \sum_j \xi_j e^j$, квадратичная форма для векторов

$(g) = \sum_{i,j} g_{ij} e_i e_j$, квадратичная форма для ковекторов $(g) = \sum_{i,j} g^{ij} e^i e^j$, линейный оператор $A = \sum_{i,j} a_j^i e^j e_i$.

Любой тензор $T = \left(T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)$ можно записать в виде:

$$T = \sum_{(i),(j)} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_q}.$$

Порядок индексов в этой записи существенный. Итак, базис в линейном пространстве тензоров типа (p, q) в данной точке этого пространства (x) имеет вид

$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_q}$, где $i, j = 1, 2, \dots, n$. Базис состоит из $p + q$ элементов.

Пример 1. Тензор напряжения.

Сила давления в каждой точке $x = (x^1, x^2, x^3)$, действующая на малую площадку площади ΔS , ортогональную единичному вектору n , находится по формуле $P(n)\Delta S$, где P – линейный оператор $(P_j^i) = P$. Тензор P_j^i – называется тензором напряжения. Пусть $n = \sum_{j=1}^3 n^j e_j$. Тогда $P(n) = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 n^j P_j^i \right) e_i$.

Пример 2. Тензор деформации.

Если сплошная среда в координатах (x^1, x^2, x^3) подвергалась смещению $x^i \rightarrow x^i + u^i$, то будем говорить, что среда подвергалась деформации. Первоначальное расстояние между близкими точками среды – $(\Delta \ell)^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i - 'x^i)^2$. Найдём расстояние между этими точками после деформации:

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{\ell})^2 &= \sum_{i=1}^3 \left((x^i + u^i(x)) - ('x^i + u^i('x)) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 (x^i + u^i(x))^2 - 2(x^i + u^i(x))('x^i + u^i('x)) + ('x^i + u^i('x))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 ((x^i)^2 + 2x^i u^i(x) + (u^i(x))^2 - 2x^i ('x^i) - 2u^i(x)u^i('x) - 2x^i u^i('x) - 2('x^i)u^i(x) + ('x^i)^2) + \\ &+ 2('x^i)u^i('x) + (u^i('x))^2) = \sum_{i=1}^3 ((x^i - 'x^i)^2 + 2u^i(x)(x^i - 'x^i) + (u^i(x) - u^i('x))^2 - \\ &- 2u^i('x)(x^i - 'x^i)) = \sum_{i=1}^3 ((x^i - 'x^i)^2 + (u^i(x) - u^i('x))^2 + 2(x^i - 'x^i)(u^i(x) - u^i('x))) = \\ &= (\Delta \ell)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^3 (\Delta u^i)^2, \quad \text{где} \quad \Delta u^i = u^i(x) - u^i('x) \approx \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \Delta x^j. \end{aligned}$$

При $\Delta x^i \rightarrow 0$ $(d\bar{\ell})^2 = (d\ell)^2 + 2\sum_{i,j} dx^i dx^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \sum_{k,\ell} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^j}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell$. А так как $\sum_{i,j} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^i dx^j = \sum_{i,j} \frac{\partial u^j}{\partial x^i} dx^i dx^j$, то $\sum_{i,j} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) dx^i dx^j = 2\sum_{i,j} dx^i dx^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$.

Определение. Разность $(d\bar{\ell})^2 - (d\ell)^2 = \sum_{i,j} \eta_{ij} dx^i dx^j + \sum_{k,\ell} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^j}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell$ называется тензором деформации среды, где $\eta_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}$. Если u^i – малые смещения, то получаем тензор малой деформации $(\eta_{i,j}) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)$.

Пусть в системе координат (x) задан тензор $T = \left(T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right)$ типа (p, q) . И пусть задана другая система координат $(x') = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, где $(x') = x'(x)$. Компоненты этого тензора в новой системе координат будут $T = \left(T_{j_1' j_2' \dots j_q'}^{i_1' i_2' \dots i_p'} \right)$. Закон преобразования компонент тензора будет:

$$T_{j_1' j_2' \dots j_q'}^{i_1' i_2' \dots i_p'} = \sum_{(i),(j)} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}} \quad \text{или}$$

$$T_{j_1' j_2' \dots j_q'}^{i_1' i_2' \dots i_p'} = \sum_{(i),(j)} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}}.$$

1) Перестановка индексов.

Компоненты тензора, например T_{ik} , можно рассматривать как элементы

матрицы $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$. Если в тензоре T_{ik} поменять местами индексы, то

получится новый тензор T_{ki} , матрица которого $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$.

Итак, простейшая операция (перестановка индексов) приводит к построению нового тензора. Пусть σ – перестановка чисел $1, 2, \dots, q$:

$\sigma = \begin{pmatrix} 12\dots q \\ \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(q) \end{pmatrix}$. Перестановка σ действует на наборах $(j_1, \dots, j_q)$ по

правилу $\sigma(j_1, \dots, j_q) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(q)})$. Будем говорить, что тензор $\tilde{T}_{j_1' j_2' \dots j_q'}^{i_1' i_2' \dots i_p'}$ по-

лучается из тензора $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ перестановкой нижних индексов, если

$\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{\delta(j_1 \dots j_q)}^{i_1 \dots i_p}$. Перестановка верхних индексов определяется аналогично. Нельзя переставлять между собой верхние и нижние индексы.

2) Сложение тензоров.

Мы отмечали, что если $T = \left(T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right)$ и $S = \left(S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right)$, то

$$U = T + S = \left(T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} + S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right).$$

Пусть A_{ik} и B_{ik} – тензоры второго ранга. Составим $A_{ik} + B_{ik} = C_{ik}$. Числа C_{ik} образуют тензор второго ранга:

$$A_{i'k'} = A_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}; \quad B_{i'k'} = B_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}};$$

$$\underbrace{A_{i'k'} + B_{i'k'}}_{C_{i'k'}} = \underbrace{(A_{ik} + B_{ik})}_{C_{ik}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = C_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = C_{i'k'}, \text{ – тензор второго ранга.}$$

Определение. Суммой тензоров типа (p, q) называется тензор типа (p, q) , компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых.

Аналогично сумме тензоров определяется и их разность. Таким образом, складывать и отнимать тензоры можно только одного и того же ранга.

3) Умножение тензоров.

Пусть дан тензор $A = (A_{ik})$ и тензор $B = (B_{ik})$. Составим в каждой координатной системе всевозможные произведения: $A_{ik} B_{ik} = C_{ik\ell m} A_{ik} B_{ik} = C_{ik\ell m}$. Так как A и B тензоры, то $A_{i'k'} = A_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$ и $B_{\ell'm'} = B_{\ell m} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}$. Перемножив, получаем:

$$\underbrace{A_{i'k'} B_{\ell'm'}}_{C_{i'k'\ell'm'}} = \underbrace{(A_{ik} B_{\ell m})}_{C_{ik\ell m}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}, \text{ то есть } C_{i'k'\ell'm'} = C_{ik\ell m} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

В результате этой операции мы получили тензор четвёртого ранга.

Произведением тензоров $T = \left(T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)$ типа (p, q) и $P = \left(P_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} \right)$ типа (k, ℓ) , называется тензор $S = TP$ типа $(p+k, q+\ell)$ с компонентами $S_{j_1 j_2 \dots j_{q+\ell}}^{i_1 i_2 \dots i_{p+k}} = T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot T_{j_{q+1} \dots j_{q+\ell}}^{i_{p+1} \dots i_{p+k}}$. Таким образом, можно перемножить тензоры любого ранга и типа. Здесь порядок сомножителей существенен.

Пример. Пусть задан вектор (ξ^i) и задан ковектор (η_j) . Если мы перемножим $(\xi^i \eta_j) = T_j^i$, то получим тензор второго ранга.

4) Свёртывание тензоров (свёртка).

Определение. Для тензора $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ типа (p, q) его свёрткой по индексам (i_k, j_l) будем называть тензор $\tilde{T}_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}}$ типа $(p-1, q-1)$, который определяется следующей формулой:

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = T_{j_1 \dots j_{\ell-1} i j_{\ell+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} i i_{k+1} \dots i_p}.$$
 По дважды входящему сверху и снизу индексу i мы производим суммирование от 1 до n .

Пример. Пусть задан тензор T_j^i типа $(1, 1)$. Произведём его свёртку, тогда $T_i^i \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^i} = T_i^i$ – след линейного оператора T_j^i . Умножим вектор (ξ^i) на линейный оператор A_ℓ^k . Получаем $A_\ell^k \xi^i = (T_\ell^{k\ell})$ – тензор типа $(2, 1)$.

Теорема. В результате перечисленных выше операций 1) – 4), получаем тензор, причём результаты их применений не зависят от выбора системы координат.

◀ Доказательство:

1) Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \dots k \dots \ell \dots q \\ 1 \dots \ell \dots k \dots q \end{pmatrix}$. Тогда $\tilde{T}_{j_1 \dots j_k \dots j_\ell \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_\ell \dots j_k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Перейдём к штрихованной системе координат:

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_\ell \dots j_k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial x^{j_k'}} \dots \frac{\partial x^{j_\ell}}{\partial x^{j_\ell'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}}.$$

Сменим обозначения: j_k^i обозначим через j_l^i , а j_l^i обозначим через j_k^i . Это не изменит всего выражения, так как по этим индексам мы производим суммирование:

$$\begin{aligned} T_{j_1 \dots j_\ell \dots j_k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial x^{j_k'}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{j_l'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}} = \\ = \tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial x^{j_k'}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{j_l'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ – компоненты тензор типа (p, q) .

2) Для тензора, свёрнутого по индексам i_k' и j_ℓ' , (i_k и j_ℓ означает, что эти индексы пропущены) будем иметь:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{j_1 \dots j_\ell \dots j_p}^{i_1 \dots i_k \dots i_p} &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1' \dots i_p'} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}}. \\
&\quad \wedge \quad \wedge \\
T_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'} \delta_{i_k'}^{j_\ell'} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{j_k}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j_\ell}}{\partial x^{j_\ell}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q}}. \\
&\quad \wedge \quad \wedge \\
\tilde{T}_{j_1' \dots j_e' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_k' \dots i_p'} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{j_k}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j_e}}{\partial x^{j_e}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j_q}}. \\
\text{Здесь } \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_k}} \frac{\partial x^{j_e}}{\partial x^{i_1}} &= \delta_{i_k}^{j_e}.
\end{aligned}$$

Доказательство тензорности произведения следует из определения. ►

5) Поднятие и опускание индексов

В присутствии метрики g_{ij} можно определить операцию опускания индексов. Если $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ – тензор типа (p, q) , то можно определить тензор

$$T_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} \text{ типа } (p-1, q+1), \text{ полагая, что } T_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{i_1 k} T_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p}.$$

Определение. Переход от тензора $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ к тензору $T_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p}$ называется опусканием индекса i_1 с помощью метрики g_{ij} .

Если (ξ^i) – вектор, то после опускания индекса мы получим ковектор (ξ_i) : $\xi_i = g_{ij} \xi^j$.

Для поднятия нижних индексов при наличии метрики g_{ij} необходимо рассмотреть обратную матрицу g^{ij} , то есть если $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$. По определению $T_{j_2 \dots j_q}^{j_1 i_1 \dots i_k} = g^{j_1 k} T_{j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k}$. Это операция поднятия индексов.

Теорема. Если индекс опустить, а потом его поднять, то получим исходный тензор.

◄Доказательство. Имеем тензор $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Опустим индекс i_1 . Получим

$$g_{i_1 k} T_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p}. \text{ Поднимем теперь индекс } i_1:$$

$$g^{i_1 e} g_{\ell k} T_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p} = \sigma_k^{i_1} T_{j_1 \dots j_q}^{k i_2 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \quad \blacktriangleright$$

Тема 22 Тензоры типа $(0, k)$

Рассмотрим тензор типа $(0, 1)$ – это ковектор (пример – градиент функции $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$). Если взять дифференциал от функции f , то $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Пусть задана замена координат $x^i = (x^1, \dots, x^n)$. Тогда

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \quad df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'}.$$

Мы видим, что выражение df инвариантно относительно замены координат. Точно также, если каждому ковектору T_i мы поставим в соответствие выражение $T_i dx^i$ (дифференциальную форму), то это выражение будет инвариантно относительно замены координат. Что такое символ dx^i ?

Базисные ковекторные поля e^i преобразуются по закону: $e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'}$, $T_i e^i = T_{i'} e^{i'}$. Базисные ковекторы e^i преобразуются по тому же закону, что и dx^i :

$$e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'}; \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \quad e^i \leftrightarrow dx^i, \quad e^{i'} \leftrightarrow dx^{i'}$$

Таким образом, можно сказать, что символы dx^i есть базисные ковекторы e^i . Дифференциальная форма $T_i dx^i$ соответствует разложению $T_i e^i$ ковектора по базису.

Рассмотрим тензор типа $(0, 2)$.

Базис в пространстве таких тензоров составляет всевозможные произведения $e^i e^j$. Разложение любого тензора T_{ij} по этому базису имеет вид: $T_{ij} e^i e^j$.

Известно, что любой тензор типа $(0, 2)$ распадается на сумму симметрического ($T_{ij} = T_{ji}$) и кососимметрического ($T_{ij} = -T_{ji}$):

$$T_{ij} = \underbrace{T_{ij}}^{SYM} + \underbrace{T_{ij}}^{ALT}. \quad \text{Это следует из того, что } T_{ij}^{SYM} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji});$$

$$T_{ij}^{ALT} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

В дифференциальной форме базис в пространстве симметрических тензоров будет записываться в виде $dx^i dx^j = dx^j dx^i$, а в пространстве кососимметрических тензоров $dx^i \wedge dx^j = dx^j \wedge dx^i$.

Пример. Риманова метрика g_{ij} есть пример симметрического тензора типа $(0, 2)$. Его разложение по базису $dx^i dx^j$ имеет вид: $g_{ij} dx^i dx^j$.

Определение. Кососимметрическим тензором типа $(0, k)$ называется такой тензор $T_{i_1 i_2 \dots i_k}$, что $T_{\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)} = \text{sgn}(\sigma) T_{i_1 i_2 \dots i_k}$, где $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1$ – знак перестановки σ .

Базис в пространстве таких тензоров состоит из элементов

$$dz^{i_1} \wedge dz^{i_2} \wedge \dots \wedge dz^{i_k} \text{ где } i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ и } i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ и}$$

$$dz^{i_1} \wedge dz^{i_2} \wedge \dots \wedge dz^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) e^{\sigma(i_1)} e^{i_2} \dots e^{i_k}.$$

Для кососимметрического тензора $T_{i_1 i_2 \dots i_k}$ получаем дифференциальную форму: $T_{i_1 i_2 \dots i_k} e^{i_1} \dots e^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Определим теперь внешнее произведение двух кососимметрических тензоров типа $(0, p)$ и $(0, q)$ (дифференциальных форм ранга p и q соответственно). Пусть

$$W_1 = \sum_{i_1 < \dots < i_p} T_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \text{ и}$$

$$W_2 = \sum_{j_1 < \dots < j_q} S_{j_1 j_2 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

Определим форму W ранга $(p + q)$ следующим образом:

$$W = W_1 \wedge W_2 = \sum_{k_1 < \dots < k_{p+q}} R_{k_1 k_2 \dots k_{p+q}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+q}},$$

$$\text{где } R_{k_1 k_2 \dots k_{p+q}} = \sum \frac{\text{sgn}(\sigma)}{p! q!} T_{\sigma(k_1 \dots k_p)} \cdot S_{k_{p+1} \dots k_{p+q}}.$$

Величины $R_{k_1 k_2 \dots k_{p+q}}$ образуют тензор, который получается из тензоров $T_{i_1 i_2 \dots i_k}$ и $S_{j_1 j_2 \dots j_q}$ комбинацией операций тензоров произведения и перестановки индексов.

Какие существуют дифференциальные операции над тензорами, которые не зависят от системы координат? Пусть заданы функция $f(x, \alpha)$ и тензорное поле $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k}(x, \alpha)$, где $x = (x^1, x^2, x^3)$ – точки пространства,

а α – некоторый параметр, не связанный с пространством. Тогда можно

взять частную производную по параметру α : $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k}(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ в каждой заданной точке.

Эта операция не связана с геометрией пространства. Другой дифференциальной операцией, не связанной с римановой метрикой, является операция взятия градиента.

Если задана функция f , то $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)$. Это ковектор.

Введём многомерное обобщение градиента на кососимметрические тензоры.

Определение. Пусть $T_{i_1 \dots i_k}$ – кососимметрический тензор по всем индексам в n -мерном пространстве с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Его градиентом $(dT)_{j_1 \dots j_k j_{k+1}} = (\nabla T)_{j_1 \dots j_k j_{k+1}}$ называется кососимметрический тензор типа

$$(0, k+1) \text{ с компонентами } (dT)_{j_1 \dots j_k j_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q \dots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} (-1)^q.$$

Здесь значок $\overset{\wedge}{j_q}$ означает, что индекс j_q пропущен.

Примеры. 1) Пусть $k+1 = 1$. В этом случае $T = f(x)$ – функция. По определению имеем: $(dT)_i = \frac{\partial T}{\partial x^i}$ – обычный градиент функции.

2) Пусть $T = (T_i)$ – ковектор. Тогда

$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} = -(dT)_{ji}$. Этот тензор $(dT)_{ij}$ называется ротором ковекторного поля и обозначается $rot T$. Это есть кососимметрический тензор типа $(0, 2)$.

Если $n = 3$, пространство и координаты (x^1, x^2, x^3) евклидовы, то тензору $(dT)_{ij}$ ставится в соответствие вектор $rot T = (\eta^k)$, где

$$\eta^1 = \frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2} = (dT)_{23}, \quad \eta^2 = \frac{\partial T_3}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^3} = (dT)_{31} = -(dT)_{13},$$

$$\eta^3 = \frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1} = (dT)_{12}.$$

3) Пусть $n = 3$ и задан кососимметрический тензор $T_{ij} = -T_{ji}$. Кососимметрический тензор третьего ранга dT здесь имеет вид:

$$(dT)_{123} = -\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1}.$$

Если координаты евклидовы (x^1, x^2, x^3) и $\eta^1 = -T_{23}$, $\eta^2 = T_{13}$, $\eta^3 = -T_{12}$, то в соответствии с указанным правилом сопоставления вектора кососимметрическому тензору, имеем $(dT)_{123} = \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i}$.

Определение. Операция, сопоставляющая в евклидовых координатах векторному полю $\eta = (\eta^i)$ число $\frac{\partial \eta^i}{\partial x^i} = div \eta$ называется дивергенцией.

Теорема 1. Градиент $d\Gamma$ кососимметрического тензора ранга κ типа $(0, \kappa)$ является кососимметрическим тензором ранга $\kappa + 1$ типа $(0, \kappa + 1)$.

◀Доказательство.

Пусть задана замена $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i = 1, \dots, n$. По определению $(d\Gamma)_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}} = \sum_q (-1)^q \frac{\partial \Gamma_{i_1 \dots i_q \dots i_{\kappa+1}}}{\partial x^{i_q}}$. Пусть $\Gamma_{i_1 \dots i_\kappa}$ – компоненты тензора в координатах (x) и $\Gamma_{i'_1 \dots i'_\kappa}$ – компоненты в координатах (δ') . По определению

$$\Gamma_{i'_1 \dots i'_\kappa} = \Gamma_{i_1 \dots i_\kappa} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_\kappa}}{\partial x^{i'_\kappa}}. \quad (1)$$

По определению градиента тензора имеем

$$\begin{aligned} (d\Gamma)_{i'_1, \dots, i'_{\kappa+1}} &= \sum_q (-1)^q \frac{\partial \Gamma_{i'_1 \dots i'_q \dots i'_{\kappa+1}}}{\partial x^{i'_q}} \\ (d\Gamma)_{i_1, \dots, i_{\kappa+1}} &= \sum_p (-1)^p \frac{\partial \Gamma_{i_1 \dots i_p \dots i_{\kappa+1}}}{\partial x^{i_p}} \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив формулы (2) в (1), после преобразования убеждаемся, что $(d\Gamma)_{(i')}$ выражается через $(d\Gamma)_{(i)}$ по тензорному закону. Покажем это для $\kappa = 1$, $\kappa + 1 = 2$. Пусть Γ_j – ковектор, тогда $(d\Gamma)_{ij} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i}$, $\Gamma_{i'} = \Gamma_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$,

$$(d\Gamma)_{k'\ell'} = \frac{\partial \Gamma_{k'}}{\partial x^{\ell'}} - \frac{\partial \Gamma_{\ell'}}{\partial x^{k'}}.$$

Имеем, что:

$$\begin{aligned} (d\Gamma)_{k'\ell'} &= \frac{\partial \Gamma_{k'}}{\partial x^{\ell'}} - \frac{\partial \Gamma_{\ell'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\ell'}} \left(\Gamma_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \left(\Gamma_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \right) = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \Gamma_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{\ell'} \partial x^{k'}} - \\ &- \frac{\partial \Gamma_\ell}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} - \Gamma_\ell \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x^{k'} \partial x^{\ell'}} = \left(\frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\ell'}} \right) \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^{k'}} - \left(\frac{\partial \Gamma_\ell}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{k'}} \right) \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^{\ell'}} = \left(\frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^{\ell'}} - \frac{\partial \Gamma_\ell}{\partial x^{k'}} \right) \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} = \\ &= (d\Gamma)_{k\ell} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приведём другое определение градиента кососимметрического тензора.

Тензору $\Gamma_{i_1 \dots i_\kappa}$ соответствует форма $W = \sum_{i_1 < \dots < i_\kappa} \Gamma_{i_1 \dots i_\kappa} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$. Определим форму dW степени $\kappa + 1$ следующим образом:

$$dW = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1 < \dots < i_\kappa}} \frac{\partial \Gamma_{i_1 \dots i_\kappa}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}.$$

Если $W = f$, мы имеем $dW = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ – дифференциал функции.

Теорема 2. Имеет место следующее тождество:

$$dW = \sum_{j_1 < \dots < j_{k+1}} (dT)_{j_1 \dots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}}$$

◀ Доказательство.

Из определения dT имеем, что

$$\sum_{j_1 < \dots < j_{k+1}} (dT)_{j_1 \dots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}} = \sum_{j_1 < \dots < j_{k+1}} \sum_q (-1)^q \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q \dots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}}.$$

Отметим, что

$$dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}} = (-1)^q dx^{j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}}.$$

Переобозначим индексы суммирования: в q -ом слагаемом положим, что $i_0 = j_q$, $i_1 = j_1$, ..., $i_k = j_{k+1}$. В этом случае выполняется неравенство $i_1 < \dots < i_k$, и индекс i_0 пробегает все значения от 1 до n . ▶

Теорема 3. Дважды взятая операция градиента кососимметрического тензора даёт нуль: $d(dT) = 0$, $d(dW) = 0$

◀ Доказательство.

$$\text{Пусть } W = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad dW = \sum_{\substack{p \\ i_1 < \dots < i_k}} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$d(dW) = \sum_{\substack{p, q \\ i_1 < \dots < i_k}} \frac{\partial^2 T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^q \partial x^p} dx^q \wedge dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \text{ Выражение } \frac{\partial^2 T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^q \partial x^p} \text{ симмет-}$$

рично по индексам p и q , а выражение $dx^p \wedge dx^q$ кососимметрично, то есть $dx^p \wedge dx^q = -dx^q \wedge dx^p$. Поэтому их свертка даёт тождественный нуль. ▶

Теорема 4. Пусть W_1 и W_2 дифференциальные формы степени p и q соответственно. Тогда $d(W_1 \wedge W_2) = dW_1 \wedge W_2 + (-1)^p W_1 \wedge dW_2$.

◀ Доказательство: Доказательство проведём для случая, когда формы W_1 и W_2 одночлены. $W_1 = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, $W_2 = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$. Тогда $W_1 \wedge W_2 = fg dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
d(W_1 \wedge W_2) &= \frac{\partial f}{\partial x^k} g dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} + \\
&+ \frac{\partial g}{\partial x^k} f dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) \wedge \\
&\wedge \left(g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \right) + (-1)^p \left(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \right) = \\
&= dW_1 \wedge W_2 + (-1)^p W_1 \wedge dW_2, \text{ так как} \\
dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} &= (-1)^p dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Тема 23 Ковариантное дифференцирование

Операция взятия градиента кососимметрического тензора приводит к кососимметрическому тензору ранга на единицу большего:

$$(d\Gamma)_{i_1 \dots i_{k+1}} = \sum_{g=1}^{k+1} (-1)^g \frac{\partial \Gamma_{i_1 \dots i_g \dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_g}}.$$

Отмечалось, что $d\Gamma$ снова являлась тензором. Операция d единственная, не связанная ни с какой геометрией дифференциальная операция над тензорами в том смысле, что все остальные операции сводились к данной чисто алгебраическими операциями (перестановкой индексов, сложением, произведением, свёрткой). Обозначим результат операции

$\frac{\partial \Gamma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} = \Gamma_{j_1 \dots j_q; k}^{i_1 \dots i_p}$. В пространстве с декартовыми координатами $(x^1, \dots, x^n)$ он не является тензором типа $(p, q+1)$ в общем случае.

Теорема 1. Если в пространстве заданы координаты и тензорное поле

$T = \Gamma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, то поле $\Gamma_{j_1 \dots j_q; k}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \Gamma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k}$ преобразуется как тензор типа $(p, q+1)$ при всех линейных заменах координат $x^i = a_j^i z^j$, где $a_j^i = \text{const}$, $z^i = b_j^i x^j$, где $b_j^i a_k^j = \sigma_k^i = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$.

◀Доказательство. Для линейных преобразований $\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = a_j^i = \text{const}$ и

$\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j \partial z^k} = 0$, $\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = b_j^i = \text{const}$, $a_j^i b_k^j = \delta_k^i$. Из определения тензора имеем, что $\tilde{T}_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p} = \Gamma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}} = T_{(j)}^{(i)} b_{(i)}^{(k)} a_{(\ell)}^{(j)}$. Так как $a_j^i = \text{const}$,

$b_k^j = \text{const}$, то, дифференцируя последнюю формулу, имеем:

$$\tilde{T}_{(\ell);r}^{(k)} = \frac{\partial \tilde{T}_{(\ell)}^{(k)}}{\partial z^r} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial z^r} b_{(i)}^{(k)} a_{(\ell)}^{(j)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial z^r} b_{(i)}^{(k)} a_{(\ell)}^{(j)} = T_{(j);s}^{(i)} \cdot a_r^s \cdot a_{(\ell)}^{(j)} \cdot b_{(i)}^{(k)} \quad \text{– закон преобразования тензора.} \quad \blacktriangleright$$

Сделаем предположения: 1) операция взятия градиента существенно связана с евклидовой геометрией, 2) она применяется по формуле

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} \quad \text{только в евклидовой геометрии, 3) результат этой операции есть тензор.}$$

По каким формулам эта операция должна применяться в других системах координат, связанных с евклидовыми нелинейной заменой? Для этого мы должны вычислить результат применения этой операции к тензорному полю T в евклидовых координатах $(x^1, \dots, x^n)$, затем преобразовать этот результат в другую систему координат $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$. Итак, по определению $T_{(j);s}^{(i)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^s}$ считается тензором. Тогда $\tilde{T}_{(l);r}^{(k)} = T_{(j);s}^{(i)} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(\ell)}} \frac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^s}{\partial z^r}$, где

$$\frac{\partial x^{(i)}}{\partial z^{(\ell)}} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}}. \quad \text{То же для } (k) \text{ и } (i). \quad \text{Какой же операцией в системе координат } (z) \text{ компоненты } \tilde{T}_{(l);q}^{(k)} \text{ получаются из компонент } T_{(i)}^{(k)}?$$

Рассмотрим для простоты векторные поля (T^i) и ковекторные поля (T_j) :

$$\tilde{T}_{;q}^k = T_{;s}^{(i)} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial z^q}; \quad \tilde{T}_{\ell;r} = T_{j;s} \frac{\partial x^j}{\partial z^\ell} \frac{\partial x^s}{\partial z^r}. \quad \text{Так как } T_{;s}^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^s}, \text{ но из предыдущих формул вытекает, что}$$

$$\tilde{T}_{;q}^k = \frac{\partial T^i}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial z^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} = \frac{\partial T^i}{\partial z^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^i}. \quad \text{Но } \tilde{T}^k = T^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i}. \quad \text{Поэтому}$$

$$\tilde{T}_{;q}^k = \frac{\partial T^i}{\partial z^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial z^q} \left(\tilde{T}^k \right) - T^i \frac{\partial}{\partial z^q} \left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i} \right). \quad \text{Так как } T^i = \tilde{T}^s \frac{\partial x^i}{\partial z^s}, \text{ то получаем}$$

$$\tilde{T}_{;q}^k = \frac{\partial \tilde{T}^k}{\partial z^q} - \tilde{T}^s \frac{\partial x^i}{\partial z^s} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial z^q}. \quad \text{Введём обозначения: } \Gamma_{sq}^k = -\frac{\partial x^i}{\partial z^s} \frac{\partial x^m}{\partial z^q} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m}.$$

$$\text{Тогда, } \tilde{T}_{;q}^k = \frac{\partial \tilde{T}^k}{\partial z^q} + \Gamma_{sq}^k \tilde{T}^s. \quad \text{Итак, получили теорему.}$$

Теорема 2. Если градиент векторного поля (T^i) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовых координатах (x)

вычисляется по формулам $T_{;k}^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат

(z) градиент вычисляется следующим образом: $\tilde{T}_{;r}^k = \frac{\partial \tilde{T}^k}{\partial z^r} + \Gamma_{sr}^k \tilde{T}^s$, где

$$\Gamma_{sr}^k = -\frac{\partial x^i}{\partial z^s} \frac{\partial x^m}{\partial z^r} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m}.$$

Аналогичную теорему можно доказать и для ковекторного поля: если градиент ковекторного поля (T_i) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по обычной формуле

$T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат (z) он вы-

числяется по формуле: $\tilde{T}_{k;r} = \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z^r} - \tilde{T}_s \Gamma_{kr}^s$.

Как видно, это разные формулы. Однако наборы Γ_{qk}^i здесь общие. Можно получить и общую теорему: Если градиент $T_{(j);k}^{(i)}$ тензорного поля $T_{(j)}^{(i)}$ типа (p, q) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в

евклидовой системе координат вычисляется по формуле: $T_{(j);k}^{(i)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат $x = x(z)$ он вычисляется по формуле:

$$\tilde{T}_{(\ell);r}^{(k)} = \frac{\partial \tilde{T}_{(\ell)}^{(k)}}{\partial x^r} + \sum_{s=1}^p \tilde{T}_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots (k_s \rightarrow i) \dots k_p} \Gamma_{ir}^{k_s} - \sum_{s=1}^q \tilde{T}_{\ell_1 \dots (\ell_s \rightarrow i) \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p} \Gamma_{\ell_s r}^i.$$

(запись $k_1 \dots (k_s \rightarrow i) \dots k_p$ означает, что в наборе $k_1 \dots k_p$ следует вместо k_s взять i).

Например, для тензора второго ранга имеем:

$$\tilde{T}_{j;k}^i = \frac{\partial \tilde{T}_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k} + \tilde{T}_j^p \Gamma_{pk}^i - \tilde{T}_p^i \Gamma_{jk}^p, \quad \tilde{T}_{ij;k} = \frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial x^k} - \tilde{T}_{pj} \Gamma_{ik}^p - \tilde{T}_{ip} \Gamma_{jk}^p,$$

$$\tilde{T}_{;k}^{ij} = \frac{\partial \tilde{T}^{ij}}{\partial x^k} + \tilde{T}^{pj} \Gamma_{pk}^i + \tilde{T}^{ip} \Gamma_{pk}^j.$$

Выясним, каким образом набор $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(z)$ меняется при замене координат.

Пусть заданы евклидовы координаты $(x^1, \dots, x^n)$, $x^i = x^i(z(z'))$. Тогда

$\Gamma_{pq}^k = -\frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^p \partial z^q} \frac{\partial z^k}{\partial x^m}$. В системе координат (z') имеем:

$$\Gamma_{p'q'}^{k'} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} \frac{\partial^2 z^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^m}.$$

Из этих формул имеем:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} &= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} = -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} = \\
&= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} + \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}}, \text{ так как} \\
\frac{\partial^2 (z^k(x(z'))) }{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} &= \frac{\partial}{\partial z^{p'}} \left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial z^{q'}} \right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}} \frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}. \text{ Поэтому} \\
\Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} &= \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \text{ и} \\
\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \left(\Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \right) &= \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^j} = \Gamma_{p'q'}^{k'}. \\
\text{Итак, } \Gamma_{p'q'}^{k'} &= \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \left(\Gamma_{pq}^k \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \right). \tag{1}
\end{aligned}$$

Определение. Будем говорить, что задана операция ковариантного дифференцирования (взятия градиента) тензоров любого типа, если в любой системе координат $(z^1, \dots, z^n)$ задан набор функций $\Gamma_{pq}^k(z)$, который при замене координат $z = z(z')$ преобразуется по формуле (1). Величины $\Gamma_{pq}^k(z)$ называются символами Кристоффеля.

Операция ковариантного дифференцирования называется также дифференциально-геометрической связностью. Связность называется евклидовой, если существуют такие координаты $(x^1, \dots, x^n)$, что $\Gamma_{ij}^k = 0$, то есть

$T_{(j);k}^i = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k}$ в этих координатах. Такие координаты называются также евклидовыми. Операцию ковариантного дифференцирования обозначим символом ∇ : $\nabla_k T_{(j)}^{(i)} = T_{(j);k}^{(i)}$.

Пусть в каждой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ заданы величины $\Gamma_{kj}^i(x)$. Зададим ковариантную производную векторных и ковекторных полей. Покажем, что закон преобразования (1) при заменах координат $x = x(x')$ для величин Γ_{kj}^i определяется исходя из требования, что результат операции ковариантного дифференцирования есть тензор.

Теорема 3. При замене координат $x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n)$ величины Γ_{kj}^i преобразуются по формуле: $\Gamma_{k'j'}^{i'} = \Gamma_{kj}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}.$

◀Доказательство. Так как $T^i_{;j} = \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k$ есть тензор $\left(T^i = T^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, то

$$\begin{aligned} T^{i'}_{;j} &= \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^j} + \Gamma^{i'}_{k'j'} T^{k'} = \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k\right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left(T^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) + \Gamma^i_{kj} T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} + \\ &+ \Gamma^i_{kj} T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \left(\Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}\right) T^{k'}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Следствие 1. Символ Γ^i_{kj} преобразуются как тензор только при линейных или аффинных преобразованиях координат $x^i = x^i(x^{i'}, \dots, x^{n'})$, где $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \equiv 0 \quad \forall i, k', j'$.

Следствие 2. Альтернированное выражение $T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{[kj]}$ образует тензор, который называется тензором кручения.

◀Доказательство. Из формулы в условии теоремы видно, что при перестановке индексов k' и j' слагаемое $\frac{\partial x^{i'} \partial^2 x^i}{\partial x^i \partial x^{k'} \partial x^{j'}}$ не изменится. Поэтому закон преобразования для $T^{i'}_{k'j'}$ не будет содержать этого слагаемого, то есть будет тензорным. $\blacktriangleright$

Определение. Связность Γ^i_{kj} называется симметричной, если тензор кручения $T^i_{kj} = \Gamma^i_{[kj]}$ тождественно равен нулю, то есть $\tilde{A}^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$.

Ковариантное дифференцирование тензоров любого ранга однозначно определяется следующими требованиями:

- 1) ковариантное дифференцирование есть линейная операция;
- 2) ковариантная производная тензора нулевого ранга, есть обычная производная $\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k}$;

3) ковариантная производная векторного и ковекторного полей определяется формулами: $T^i_{;j} = \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k$; $T_{i;j} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} T_k$.

- 4) ковариантная производная произведения:

$$\nabla_k (T^{(i)}_{(p)} S^{(j)}_{(q)}) = (\nabla_k T^{(i)}_{(p)}) S^{(j)}_{(q)} + T^{(i)}_{(p)} (\nabla_k S^{(j)}_{(q)})$$

Теорема 4. При выполнении перечисленных выше условий 1–4 ковариантная производная тензоров второго ранга задаётся следующими формулами:

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{\ell k}^i T^{\ell j} + \Gamma_{\ell k}^j T^{i \ell}, \quad \nabla_k T_j^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{\ell k}^i T_j^\ell - \Gamma_{jk}^\ell T_{i \ell}^i,$$

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\ell T_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell T_{i \ell}.$$

Для тензоров $T_{(j)}^{(i)}$ типа (p, q) ковариантная производная вычисляется по формуле:

$$\nabla_k T_{(i)}^{(j)} = \frac{\partial T_{(j)}^{(i)}}{\partial x^k} - T_{j_2 \dots j_q}^{(i)} \Gamma_{j_1 k}^{j_1} - \dots - T_{j_2 \dots j_q}^{(i)} \Gamma_{j_q k}^{j_q} + T_{(j)}^{i_2 \dots i_p} \Gamma_{ik}^{i_1} + \dots + T_{(j)}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{ik}^{i_p}.$$

◀Доказательство. Проведём для тензоров T_{ij} типа $(0, 2)$. Пусть e_i – базисные векторные поля, e^i – базисные ковекторные поля. Поэтому имеем: $\nabla_k e_i = \Gamma_{ik}^j e_j$, $\nabla_k e^i = -\Gamma_{jk}^i e^j$. Любой тензор $T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q}$. Тензор типа $(0, 2)$: $T = T_{ij} e^i e^j$. Тогда

$$\nabla_k (T) = \nabla_k (T_{ij}) e^i e^j + T_{ij} (\nabla_k e^i) e^j + T_{ij} e^i (\nabla_k e^j) =$$

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} e^i e^j - T_{ij} \Gamma_{\ell k}^i e^\ell e^j - T_{ij} e^i \Gamma_{\ell k}^j e^\ell = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\ell T_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell T_{i \ell} \right) e^i e^j.$$

Значит, компоненты тензора $\nabla_k T$ имеют вид: $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\ell T_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell T_{i \ell}$, а это и есть $T_{ij;k}$ по определению. ►

Пусть задан вектор $\xi = (\xi^k)$ в некоторой точке P . Производная тензора $T_{(j)}^{(i)}$ по направлению определяется формулой: $\nabla_\xi T_{(j)}^{(i)} = \xi^k \nabla_k T_{(j)}^{(i)}$. Это есть тензор того же типа в точке P . Пусть теперь в пространстве заданы координаты $(x^1, \dots, x^n)$, ковариантное дифференцирование Γ_{kj}^i и произвольная кривая $x^i = x^i(t)$ на некотором отрезке $a \leq t \leq b$.

Определение. Будем говорить, что векторное (тензорное) поле T ковариантно постоянно или параллельно вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ на отрезке $a \leq t \leq b$, если ковариантная производная этого поля T в точках кривой по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю:

$$\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T \equiv 0, \quad \xi^k \equiv \frac{dx^k}{dt}.$$

Пример. Если мы двигаемся вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ и если производная функции f по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю, то

функция не меняется вдоль кривой: $\xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) \equiv 0$, где $\xi^k \equiv \frac{dx^k}{dt}$, то $f(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \text{const}$. Для векторных полей мы имеем:

$$\nabla_{\xi} T^i = \xi^k \nabla_k T^i = \xi^k \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i T^j \right) = 0.$$

Понятие параллельности зависит от кривой. Исключение представляет лишь евклидова геометрия: в евклидовых координатах $(x^1, \dots, x^n)$ определяются параллельные векторные поля, имеющие постоянные компоненты в этих координатах. Эти поля параллельны вдоль любой кривой. Так как результат ковариантного дифференцирования не зависит от выбора координат, то те же поля будут параллельны в любой системе координат (z) , хотя у них в новой системе координат компоненты будут зависеть от точки. Итак, понятие параллельности векторов в разных точках зависит как от способа ковариантного дифференцирования, так и от пути, соединяющего эти две точки.

Определение. Параллельным переносом вектора T_p^i из точки $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ в точку $Q = (x_1^1, \dots, x_1^n)$ вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ведущей из P в Q , называется векторное поле T^i , которое задано во всех точках кривой и параллельно вдоль этой кривой: $\frac{dx^k}{dt} \nabla_k T^i \equiv 0$, $0 \leq t \leq 1$.

При $t = 0$ векторное поле T^i в точке P должно совпадать с исходным вектором T_p^i . При $t = 1$ векторное поле T^i в точке Q есть вектор T_q^i , называемый результатом переноса вектора T_p^i вдоль заданной кривой $x^i = x^i(t)$ из P в Q . В координатах $(x^1, \dots, x^n)$ получаем:

$\frac{dx^k}{dt} \nabla_k T^i = \frac{dT^i}{dx^k} \frac{dx^k}{dt} + T^j \Gamma_{jk}^i \frac{dx^k}{dt} = \frac{dT^i}{dt} + \left(\frac{dx^k}{dt} \Gamma_{jk}^i \right) T^j = 0$. Это есть уравнение параллельного переноса.

Из теории дифференциальных уравнений можно сделать вывод, что вдоль любой фиксированной гладкой кривой результат параллельного переноса существует, однозначно определяется начальным вектором T_p^i и линейно зависит от начального вектора T_p^i .

Если связность евклидова, то есть для них $\Gamma_{kj}^i \equiv 0$ в евклидовых координатах, то уравнение параллельного переноса имеет вид: $\frac{dT^i}{dt} = 0$. Значит, в евклидовой геометрии и евклидовых координатах параллельными вдоль

любой кривой являются векторы, прикрепленные к разным точкам и имеющие одинаковые компоненты. В любых координатах результат параллельного переноса вектора вдоль кривой не зависит от кривой, если геометрия евклидова.

Рассмотрим линии, являющиеся аналогом прямых для случая произвольной связности. Это геодезические линии.

Определение. Линия $x^i = x^i(t)$ называется геодезической, если её вектор скорости $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль неё самой, то есть $\nabla_k(T) = 0$. В координатах имеем, что

$$0 = \nabla_T(T)^j = \frac{dx^i}{dt} \nabla_i \left(\frac{dx^j}{dt} \right) = \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{dx^j}{dt} \right) + \Gamma_{ki}^j \frac{dx^k}{dt} \right) = \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{ki}^j \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^i}{dt}. \quad (2)$$

Если $\Gamma_{ki}^j = 0$, то решениями этого уравнения есть обыкновенные прямые линии, как и должно быть в евклидовой геометрии. Для произвольной связности уравнение (2) есть система дифференциальных уравнений второго порядка. В окрестности точки $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ существует единственное решение этого уравнения с начальными условиями $x^j|_{t=0} = x_0^j, \frac{dx^j}{dt}|_{t=0} = (x_0^j)'$,

$j = 1, \dots, n$, для любых x_0^j и $(x_0^j)'$ по теореме существования и единственности. Поэтому в некоторой окрестности любой точки P и для любого вектора T_p^i в этой точке существует единственная геодезическая линия связности (Γ_{jk}^i) , которая начинается в точке P с начальным вектором скорости T_p^i .

Приведем еще одно определение геодезической линии (рис. 46).

Определение. Линия на поверхности называется геодезической, если её главная нормаль во всех точках линии совпадает с нормалью к поверхности.

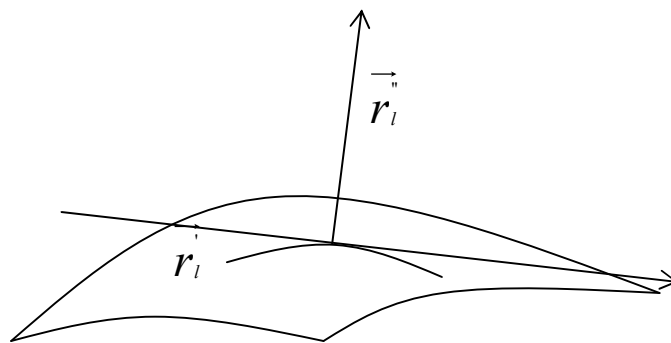


Рисунок 46

Прямая линия считается геодезической, так как любая нормаль к пря-

мой может быть принята за главную. На сфере геодезическими линиями являются окружности больших кругов, т. к. главная нормаль такой окружности в каждой её точке проходит через центр сферы и совпадает с нормалью к сфере. Выведем формулу для нахождения геодезической линии.

Пусть задана поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, а геодезическая линия на поверхности задана уравнениями $u = u(l)$ и $v = v(l)$. Будем считать, что поверхность отнесена к ортогональной системе координат, то есть

$$E = \vec{r}_u^2, \quad F = \vec{r}_u \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v^2. \quad (3)$$

Вектор $\frac{d^2 \vec{r}}{dl^2}$ направлен по главной нормали к линии, а так как линия геодезическая, то он перпендикулярен касательной плоскости поверхности.

$$\text{Таким образом, } \frac{d^2 \vec{r}}{dl^2} \vec{r}_u = 0; \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dl^2} \vec{r}_v = 0.$$

$$\text{Вектор } \frac{d \vec{r}}{dl} = \vec{r}_u \frac{du}{dl} + \vec{r}_v \frac{dv}{dl};$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dl^2} = \vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2 u}{dl^2} + \vec{r}_v \frac{d^2 v}{dl^2}.$$

Умножим последнее равенство сначала на $\vec{r}_u$, а потом на $\vec{r}_v$ поочерёдно.

$$\vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 \vec{r}_u + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} \vec{r}_u + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 \vec{r}_u + \vec{r}_u \frac{d^2 u}{dl^2} \vec{r}_u = 0$$

$$\vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 \vec{r}_v + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} \vec{r}_v + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 \vec{r}_v + \vec{r}_v \frac{d^2 v}{dl^2} \vec{r}_v = 0.$$

Дифференцируем по u и v равенства (3):

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2\vec{r}_{uu} \vec{r}_u; \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2\vec{r}_{uv} \vec{r}_u; \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \vec{r}_{uu} \vec{r}_v + \vec{r}_{uv} \vec{r}_v = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \vec{r}_{uv} \vec{r}_v + \vec{r}_{vv} \vec{r}_u = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\vec{r}_{uv} \vec{r}_v; \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 2\vec{r}_{vv} \vec{r}_v.$$

Из последних равенств имеем, что:

$$\vec{r}_{uu} \vec{r}_u = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}; \quad \vec{r}_{uv} \vec{r}_u = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}; \quad \vec{r}_{vv} \vec{r}_u = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad \vec{r}_{uu} \vec{r}_v = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}; \quad \vec{r}_{uv} \vec{r}_v = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u};$$

$$\vec{r}_{vv} \vec{r}_v = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}$$

Следовательно,

$$\frac{d^2 u}{dl^2} = -\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} + \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 v}{dl^2} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 \quad (5)$$

При интегрировании (4) и (5) следует учесть, что

$$dl^2 = Edu^2 + Gdv^2 \quad \text{или} \quad E \left(\frac{du}{dl} \right)^2 + G \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 = 1 \quad (6)$$

Уравнения (4), (5), (6) позволяют выразить вдоль геодезической координаты u, v как функции от параметра l . Более простым уравнением является следующее дифференциальное уравнение, непосредственно связывающее u и v :

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dl}}{\frac{du}{dl}}, \quad \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{d}{dl} \left(\frac{\frac{dv}{dl}}{\frac{du}{dl}} \right), \quad \frac{du}{dl} = \frac{\frac{du}{dl} \frac{d^2 v}{dl^2} - \frac{dv}{dl} \frac{d^2 u}{dl^2}}{\left(\frac{du}{dl} \right)^3}. \quad \text{С помощью этих ра-}$$

венств находим из 4) и 5)

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} + \left(\frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{dv}{du} + \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{du} \right)^3.$$

Согласно теории дифференциальных уравнений последнее равенство определяет однозначно v как функцию от u , если при некотором $u = u_0$ будут заданы значения $v = v_0$ и $\frac{dv}{du} = v_0$. Так как $\frac{dv}{du}$ задаёт направление геодезической, то через каждую точку поверхности в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая линия.

Мы встретились с двумя определениями евклидовых координат:

1) координаты евклидовы, если метрика g_{ij} в них имеет евклидов вид

$$g_{ij} = \delta_{ij};$$

2) координаты евклидовы, если компоненты Γ_{ij}^k связности в этих координатах нулевые: $\Gamma_{ij}^k \equiv 0, i, j, k = 1, \dots, n$.

Понятие связности и понятие римановой метрики не связаны между собой. Однако существует способ сопоставить метрике связность.

Определение. Связность Γ_{ij}^k называется согласованной с метрикой g_{ij} , если ковариантная производная метрического тензора тождественно равна 0: $\nabla_k g_{ij} = 0, k, i, j = 1, \dots, n$.