7 Многомерные геометрические объекты

Тема 24 Понятие многообразия. Тензорные поля на многообразии

Определение. Дифференцируемым n-мерным многообразием называется произвольное множество точек, в котором введена следующая структура:

1) множество M представлено в виде объединения конечного или счетного числа областей U_q n-мерного евклидова пространства, $M = \bigcup\limits_q U_q$;

2) в каждой области U_q заданы координаты x_q^α, $\alpha = 1,...,n$, которые называются локальными координатами. Области U_q при этом называют координатными окрестностями или картами. Пересечение $U_q \cap U_p$ каждой пары этих областей в множестве M, если оно не пусто, само является областью евклидова пространства, в которой действуют две системы локальных координат x_p^α и x_q^α. Требуется, чтобы каждая из этих систем локальных координат выражалась через другую дифференцируемым образом:

$$\begin{aligned} x_p^\alpha &= x_p^\alpha (x_q^{'},...x_q^n), \quad \alpha = 1,...,n \\ x_q^\alpha &= x_q^\alpha (x_p^{'},...x_p^n), \quad \alpha = 1,...,n \end{aligned}. \tag{1}$$

Якобиан $\det\left(\dfrac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ будет отличен от нуля. Функции (1) называются функциями перехода от координат x_q^α к координатам x_p^α и обратно. Общий класс гладкости функций перехода для всех пересекающихся пар (p, q) называется классом гладкости самого многообразия M, заданного с помощью «атласа» $\{U_q\}$.

Простейшим примером многообразия является евклидово пространство или любая его область.

Важный класс многообразий составляют ориентируемые многообразия.

Определение. Многообразие M называется ориентированным, если якобианы функций перехода $I_{pq} = \det\left(\dfrac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ положительны для всех пересекающихся пар областей. (Например, евклидово пространство R^n с координатами $(x',...,x^n)$ по определению ориентировано).

Определение. Говорят, что (x) и (y) определяют одну и ту же ориентацию в R^n, если $I > 0$, и противоположную, если $I < 0$ (Т. о., евклидово пространство R^n обладает двумя ориентациями).

Пусть заданы два многообразия: $M = \bigcup\limits_p U_p$ (координаты x_p^α) и $N = \bigcup\limits_q U_q$ (координаты y_q^β).

<u>Определение.</u> Отображение $f: M \to N$ называется <u>гладким класса гладкости</u> *k*, если функции $y_q^\beta(x_p^{'},...x_p^n)$ для всех пар (*q*, *p*), когда они определены в областях, где они определены, являются гладкими класса гладкости *k*. В случае если *N* есть действительная прямая, *N* = *R*, отображение $M \to R$ называется числовой функцией *f(x)*, *x* – точка многообразия *M*.

<u>Определение.</u> Два многообразия *M* и *N* называются <u>гладко эквивалентными (диффеоморфными)</u>. если найдется взаимно однозначное и гладкое в обе стороны отображение какого-то класса гладкости $k \geq 1$: $f: M \to N$, $f^{-1}: N \to M$.

Пусть на многообразии *M* задана кривая $x = x(\tau)$, $a \leq \tau \leq bx$, *x* – точка многообразия. Пока кривая находится в области U_p действия локальной системы координат x_p^α, можно записать кривую в виде:

$$x_p^\alpha = x_p^\alpha(\tau), \quad \alpha = 1,...,n.$$

В этих координатах $x' = ((x_p^1)',...,(x_p^n)'$.

В области действия двух координатных систем $U_p \cap U_q$ имеем две записи $x_p^\alpha(\tau)$ и $x_q^\beta(\tau)$, причем $x_p^\alpha(x_q^1(\tau),...x_q^n(\tau)) = x_p^\alpha(\tau)$.

Для скорости получаем формулу:

$$\left(x_p^\alpha\right)' = \sum_\beta \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\left(x_q^\beta\right)'.$$

На основе ее введем:

<u>Определение</u>. <u>Касательным вектором к многообразию *M*</u> в произвольной точке *x* называется вектор, записываемый в системе локальных координат (x_p^α) набором чисел ξ_q^α; записи одного и того же вектора в разных системах локальных координат содержащих эту точку, связаны формулой:

$$\xi_p^\alpha = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)\xi_q^\beta .$$

Касательные векторы к *n*-мерному многообразию *M* в данной точке *x* образуют *n*-мерное линейное пространство $T_x = T_x M$ <u>(касательное пространство)</u>. В частности, вектор скорости любой гладкой кривой является касательным вектором.

Гладкое отображение *f* многообразия *M* в многообразие *N* определяет индуцированное линейное отображение $f_x: T_x \to T_{f(x)}$, при этом вектор скорости кривой $x = x(t)$ на многообразии M переходит по определению в вектор скорости кривой $f(x(t))$ на многообразии N.

<u>Определение. Римановой (псевдоримановой) метрикой на многообразии M</u> называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат. В каждой области U_p действия локальных координат (x_p^α) метрика задается симметрической матрицей
$g_{\alpha\beta}^{(p)}(x_p^1,\dots x_p^n)$ $|\xi|^2 = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\xi_p^\beta$ для любого вектора ξ в точке x.

<u>Определение. Тензор типа (k, l) на многообразий</u> задается в каждой системе локальных координат (x_p^α) набором функций ${}^{(p)}T_{j_1\dots j_l}^{i_1\dots i_k}(x)$. В других локальных координатах (x_q^β), содержащих точку x, этот же тензор задается величинами ${}^{(q)}T_{t_1\dots t_l}^{S_1\dots S_k}(x)$, причем справедлива формула

$${}^{(q)}T_{t_1\dots t_l}^{S_1\dots S_k} = \frac{\partial x_q^{S_1}}{\partial x_p^{i_1}}\dots\frac{\partial x_q^{S_k}}{\partial x_p^{i_k}}\cdot\frac{\partial x_p^{j_1}}{\partial x_q^{t_1}}\dots\frac{\partial x_p^{j_l}}{\partial x_q^{t_l}}T_{j_1\dots t_l}^{i_1\dots i_k}.$$

Все свойства, полученные для тензоров в области n-мерного пространства, переносятся на тензоры на многообразии.

Метрика $g_{\alpha\beta}$ на многообразии – пример тензора типа (0, 2).

Основные понятия и формулы

Геометрия разворачивается в некотором пространстве, которое состоит из точек *P, Q,…*. В этом пространстве можно обычным способом ввести декартовы координаты. Введение декартовых координат в пространство означает, что каждой точке пространства поставлен в соответствие набор действительных чисел $x^1, x^2, \ldots, x^n$, называемых ее координатами, причем выполняются следующие свойства: 1) разным точкам пространства соответствуют разные наборы координат; 2) каждому набору $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где x^i – любые действительные числа, должна соответствовать какая-то точка изучаемого пространства.

Пространство, в котором введены декартовы координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ так, что выполняются перечисленные выше свойства, называется <u>n-мерным декартовым пространством</u> и обозначается через R^n. Число n называется числом измерений или размерностью пространства.

Пусть декартовы координаты в n-мерном пространстве таковы, что если точке P соответствуют ее координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а точке Q – $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, то квадрат длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки P и Q, равен $l^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2$. Тогда пространство называется <u>евклидовым</u>, а декартовы координаты с такими свойствами называются <u>евклидовыми координатами</u>.

С точками евклидова пространства удобно связывать векторы. Вектор, ведущий из начала координат O в изучаемую точку P, называется <u>радиус-вектором</u> этой точки. Декартовы координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ точки P называются координатами вектора. Если заданы два вектора $\vec{\xi} = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\vec{\eta} = (y^1, \ldots, y^n)$, то их <u>евклидовым скалярным произведением</u> называется число

$$\vec{\xi} \cdot \vec{\eta} = (\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}^i \mathrm{y}^i \,. \qquad (1)$$

Оно обладает свойствами:

1) $(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (\vec{\eta}, \vec{\xi})$;

2) $(\lambda_1 \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \vec{\xi}_2, \vec{\eta}) = \lambda_1 (\vec{\xi}_1, \vec{\eta}) + \lambda_2 (\vec{\xi}_2, \vec{\eta})$, где λ_1, λ_2 – любые действительные числа;

3) $(\vec{\xi}, \vec{\xi}) > 0$, если $\vec{\xi} \neq 0$.

Декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых скалярное произведение имеет вид (1), называются <u>евклидовыми координатами</u>.

Пусть U – некоторая область в n-мерном евклидовом пространстве E^n с декартовыми координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а E_1^n – еще одно n-мерное евклидово пространство с декартовыми координатами $y^1, y^2, \ldots, y^n$. <u>Регулярной криволинейной системой координат</u> в области U евклидова пространства

E^n называется система гладких (т. е. бесконечно дифференцируемых) функций $y^1(x^1, x^2, ..., x^n)$, …, $y^n(x^1, x^2, ..., x^n)$, задающая взаимно однозначное отображение f области U на некоторую область V евклидова пространства E_1^n, причем якобиан

$$I(f) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

этого отображения отличен от нуля во всех точках области U. Таким образом, с каждой точкой P области U сопоставляется набор чисел $y^1(P),\dots, y^n(P)$, называемых <u>криволинейными координатами</u>.

Пусть теперь в области U заданы две криволинейные системы координат $y^1(P),\dots, y^n(P)$ и $z^1(P),\dots, z^n(P)$. Это означает, что заданы два взаимно однозначных и взаимно дифференцируемых отображения f и g, что $f: U \to V \subset E_1^n(y^1,\dots,y^n); g: U \to W \subset E_2^n(z^1,\dots,z^n)$. Так как отображения f и g взаимно однозначны, то можно рассмотреть соответствие, сопоставляющее координатам $(y^1(P), \dots, y^n(P))$ точки P ее координаты $(z^1(P),\dots, z^n(P))$. Это соответствие определяет отображение $F: V \to W; F: y^i(P) \to z^i(P)$, $1 \le i \le n$. Очевидно $F = gf^{-1}$. Отображение F называется <u>заменой координат в области U</u> или <u>отображением перехода</u> от координат $(y) = (y^1(P),\dots, y^n(P))$ к координатам $(z) = (z^1(P),\dots, z^n(P))$.

Пусть E^n – евклидово пространство со скалярным произведением (,). <u>Кривой γ в пространстве E^n</u>, заданной в параметрическом виде, называется гладкое отображение $\gamma: [a,b] \to E^n$ отрезка $[a,b]$ в E^n. Если $x^1, x^2, \dots, x^n$ – декартовы координаты в E^n, то кривая γ задается набором n гладких функций $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$, где параметр t пробегает отрезок $[a,b]$. <u>Касательным вектором</u> или <u>вектором скорости кривой</u> в точке t называется вектор $\vec{V}(t) = \left(\dfrac{dx^1}{dt},\dots,\dfrac{dx^n}{dt}\right)$. <u>Длиной кривой</u> γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число $\ell = \int\limits_a^b \sqrt{(\vec{v}(t),\vec{v}(t))}dt = \int\limits_a^b |\vec{v}(t)|dt.$ Если есть линия $x^i = f^i(t)$, $i = 1,\dots,n$, и другая линия $x^i = g^i(t)$, $i = 1,\dots,n$, пересекающиеся при $t = t_0$ (т. е. $f^i(t_0) = g^i(t_0)$, $i = 1,\dots,n$), то <u>углом между этими линиями</u> в точке их пересечения при $t = t_0$ называется такой угол $\varphi(0 \le \varphi < \pi)$, что имеет место равенство $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{v},\vec{w})}{|\vec{v}||\vec{w}|}$, где $\vec{V} = \left(\dfrac{df^1}{dt},\dots,\dfrac{df^n}{dt}\right)_{t=t_0}$, $\overrightarrow{W} = \left(\dfrac{dg^1}{dt},\dots,dt\right)_{t=t_0}$.

На любой гладкой кривой (такой кривой, что вектор скорости $\vec{V}$ не обращается в нуль), можно выбрать параметр ℓ (размерность длины) так, чтобы вектор скорости был единичным: $\left|\vec{V}\right| = 1$. Такой параметр ℓ называется натуральным. Для него $\int_a^b \left|\vec{v}\right| dt = b - a$, т. е. он равен длине отрезка кривой, который мы пробежали.

Пусть в области U задана произвольная криволинейная система координат $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ и пусть $\lambda(t)$ – некоторая гладкая кривая. Тогда переменные $y^1, y^2, \ldots, y^n$ являются гладкими функциями декартовых координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в области U, причем $\det\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ в любой точке области. По теореме обратной функции переменные $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в области U можно однозначно выразить в виде гладких функций от $y^1, y^2, \ldots, y^n$: $x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Если $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, то $\dfrac{dx^{\mathrm{i}}(t)}{dt} = \dfrac{dx^i(y^1(t), \ldots, y^n(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial y^{\mathrm{k}}} \dfrac{dy^{\mathrm{k}}}{dt}, 1 \leq i \leq n$.

Значит,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{m,p=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{dy^m}{dt} \frac{dy^p}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p=1}^n g_{mp}(y^1, \ldots, y^n) \frac{dy^m}{dt} \frac{dy^p}{dt}} dt,$$

где $g_{mp}(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial x^i}{\partial y^m} \dfrac{\partial x^i}{\partial y^p}$.

Таким образом, длина кривой в криволинейных координатах $y^1, y^2, \ldots, y^n$ определяется с помощью симметрической матрицы $G=(g_{mp})$, где g_{mp} – гладкие функции переменных $y^1, y^2, \ldots, y^n$. Если F – отображение перехода от криволинейных координат (y) к декартовым (x) в области U, то $G = C\,C^t$, где $C = dF = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^i}\right)$ – матрица Якоби отображения F.

Пусть $(z^1, \ldots, z^n)$ – еще одна система криволинейных координат в области U, а $\hat{O}$ – отображение перехода от системы (y) к системе (z). Отображение $\hat{O}$ записывается в виде $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $1 \leq i \leq n$ и его дифференциал $d\hat{O}$ есть матрица Якоби $C = \left(\dfrac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$. Обозначим через $G(y)$ матрицу коэффициентов g_{mp} в системе координат (y), а через $G(z)$ – эту же матрицу в системе координат (z). Тогда $G(y) = CG(z)C^t$. Таким образом, при заменах координат матрица $G(z)$ преобразуется как матрица квадратичной формы. В частности, если исходные координаты (y) были декартовы, то $G(y)$ представляет собой единичную матрицу и, значит, в любой криволинейной системе координат *(z)* имеем $G(z) = C\,E\,C^t = C\,C^t$, где $C = \left(\dfrac{\partial y^i}{\partial z^j}\right)$.

Говорят, что в области U n-мерного пространства задана римановa метрика, если в каждой регулярной системе координат $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ определен выбор гладких функций $g_{ij}(y)$, удовлетворяющий следующим условиям: а) $g_{ij}(y)=g_{ji}(y)$, т. е. матрица $G(y)=(g_{ij}(y))$ симметрична; б) матрица $G(y)$ невырожденна и положительно определена; в) при замене координат $F:(y)\to(z)$ матрица $G(y)$ преобразуется как матрица квадратичной формы: $G(z) = (dF)\,G(y)\,(dF)^t$, т. е. в новых координатах определяется набор функций $g'_{ij} = g'_{ji}(z^1,\ldots,z^n)$, $i, j = 1,\ldots,n$, причем $g'_{ij} = \dfrac{\partial y^k}{\partial z^i}\, g_{k\ell}\, \dfrac{\partial y^\ell}{\partial z^i}$.

Если в области U задана риманова метрика $G(y)= (g_{ij})$ и в системе координат $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ задана некоторая гладкая кривая $\gamma(t) = (y^1(t),\ldots,y^n(t))$, то ее длиной от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число $\ell = \int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{\mathrm{ij}}(y)\dfrac{dy^{\mathrm{i}}}{dt}\,\dfrac{dy^{\mathrm{j}}}{dt}}dt$.

Пусть в области U заданы две кривые $\gamma_1(t) = (f^1(t),\ldots,f^n(t))$ и $\gamma_2(t) = (g^1(t),\ldots,g^n(t))$, которые пересекаются в некоторой точке при значении параметра $t = t_0$. Углом между кривыми $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ в точке $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ в данной римановой метрике называется такое число φ, что

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y)\,\dfrac{df^{\,i}}{dt}\,\dfrac{dg^{\,i}}{dt}}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y)\,\dfrac{df^{\,i}}{dt}\,\dfrac{df^{\,j}}{dt}}\;\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y)\,\dfrac{dg^{\,i}}{dt}\,\dfrac{dg^{\,j}}{dt}}}\,.$$

Часто вместо полной длины дуги записывают явную формулу для дифференциала дуги dS. Тогда, если метрическая матрица G имеет вид $G = (g_{ij})$, то в координатах *(y)* имеем, что $dS^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,dy^i dy^j$ и величину dS^2 также называют метрикой.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi^1,\ldots,\xi^n)$ и $\vec{\eta} = (\eta^1,\ldots,\eta^n)$ – два вектора в точке $P = (z_0^1,\ldots,z_0^{\mathrm{n}})$. Тогда их скалярным произведением называется число $(\vec{\xi},\vec{\eta})$, равное $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(z_0^1,\ldots,z_0^n)\xi^{\mathrm{i}}\eta^{\mathrm{j}} = g_{ij}\xi^i\eta^j$. Будем говорить, что метрика $g_{ij}=g_{ji}(z)$ евклидова, если найдутся координаты $(x^i,\ldots,x^n)$, $x^i = x^i(z)$, такие, что $\det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0$, $g'_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial x^k}{\partial z^i}\,\dfrac{\partial x^k}{\partial z^j}$. Тогда в координатах *(x)* $g_{ij} = \delta_{ij}\begin{cases} 1, \text{åñëè}\; i = j \\ 0, \text{åñëè}\; i \neq j \end{cases}$.

Координаты *(x)* называются евклидовыми.

Говорят, что в области U n-мерного пространства задана псевдориманова (индефинитная) метрика, если в каждой регулярной системе координат $(y^1, y^2,...,y^n)$ определен набор гладких функций $g_{ij}(y)$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $g_{ij}(y)= g_{ji}(y)$; 2) матрица $G(y)$ невырождена; 3) при замене координат $F:(y)\to(z)$ матрица $G(y)$ преобразуется по правилу $G(z)=(dF)G(y)(dF)^t$. Псевдориманова метрика g_{ij} типа (p, q), где $p + q = n$, если p – положительный, q – отрицательный индексы инерции квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$. Если g_{ij} – псевдориманова метрика типа (p, q) и $g_{ij}=g_{ij}(z_0^1,...,z_0^n)$, то квадратичную форму $g_{ij}\xi^i\xi^j$ заменой $\xi^i=\lambda_k^i\varepsilon^k$ можно привести к виду $(\varepsilon^1)^2+(\varepsilon^2)^2+...+(\varepsilon^p)^2-(\varepsilon^{p+1})^2-...-(\varepsilon^{p+q})^2$, где $p+q=n$.

В псевдоевклидовой метрике длина кривой определяется так же, как и в случае римановой метрики.

Метрика $g_{ij}=g_{ij}(z)$ псевдоевклидова, если найдутся новые координаты $x^1,...,x^n, x^i=x^i(z), \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)\neq 0$, такие, что

$$g_{ij}=\frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j}+...+\frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j}-\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j}-...-\frac{\partial x^{p+q}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+q}}{\partial z^j},$$

где $p+q=n$. В этих новых координатах $g_{ij}=0$ при $i\neq j$, $g_{ii}=1$ при $i\le p$, $g'_{ii}=-1$ при $i\ge p+1$. Координаты $(x^1,...,x^n)$ называются псевдоевклидовыми координатами типа (p, q), где $p + q = n$. В пространстве R^n можно ввести псевдоевклидову метрику типа (p, q), определив псевдоскалярное произведение векторов $\vec{\xi}=(\xi^1,...,\xi^n)$ и $\vec{\eta}=(\vec{\eta}^1,...,\vec{\eta}^n)$ формулой $\left\langle\vec{\xi},\vec{\eta}\right\rangle_{p,q}=\xi^1\eta^1+...+\xi^p\eta^p-\xi^{p+1}\eta^{p+1}-...-\xi^{p+q}\eta^{p+q}$, где $p + q = n$. При этом псевдоевклидовыми будут обычные координаты $(x^1,...,x^n)$, и пространство R^n с этой метрикой называется псевдоевклидовым пространством и обозначается $R^n_{p,q}$. Пространство $R^n_{1,3}$ – пространство Минковского (пространство специальной теории относительности).

Длина вектора $\vec{\xi}$ в псевдоевклидовом пространстве $R^n_{p,q}$ определяется по формуле $\left|\vec{\xi}\right|_{p,q}=\sqrt{\left\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\right\rangle_{p,q}}$. Поэтому множества всех векторов, выходящих из любой точки, разбиваются на три непересекающихся подмножества:

1) времениподобные векторы, для которых $\left\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\right\rangle_{p,q}<0$;

2) изотропные или световые векторы, для которых $\left\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\right\rangle_{p,q}=0$;

3) пространственноподобные векторы, для которых $\left\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\right\rangle_{p,q}>0$.

Совокупность всех векторов $\vec{\xi}$ пространства R^n такая, что $\left|\vec{\xi}-\vec{a}\right|=\rho$ образует $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1} с центром в конце вектора $\vec{a}$ (с центром в $\vec{a}$). В псевдоевклидовом пространстве $R^n_{p,q}$ также можно рассмотреть множество векторов $\vec{\xi}$ таких, что $\left|\vec{\xi}-\vec{a}\right|_{p,q}=\rho$. Но теперь ρ может быть вещественным, мнимым числом или нулем. Множество таких векторов (или, что то же самое, точек) называется псевдосферой типа *(p, q)* радиуса ρ с центром в $\vec{a}$ и обозначается $S^{n-1}_{p,q}$. Псевдосфера нулевого радиуса с центром в начале координат описывается уравнением $(x^1)^2+\ldots+(x^p)^2-(x^{p+1})^2-\ldots-(x^{p+q})^2=0$ и является конусом второго порядка в $R^n_{p,q}$ с вершиной в начале координат. Все векторы, выходящие из начала координат и лежащие на этом конусе, есть изотропные векторы; векторы, лежащие внутри конуса, времениподобные; векторы, лежащие вне конуса, пространственноподобные. Псевдосфера $S^{n-1}_{p,q}$ нулевого радиуса называется изотропным или световым конусом.

Пусть в *n*-мерном пространстве заданы две области: область U с координатами $x^1,\ldots,x^n$ и область *V* с координатами $y^1,\ldots,y^n$. Пусть $f:U\to V$ – взаимно однозначное, взаимно-дифференцируемое отображение области U на V. Это означает, что координаты $y^1,\ldots,y^n$ выражаются через $x^1,\ldots,x^n$ с помощью гладких функций $y^i=y^i(x^i,\ldots,x^n)$, *i* = 1, …, *n*, причем $\det\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ нигде не обращается в нуль (т. е. координаты $x^1,\ldots,x^n$ можно выразить обратно через $y^1,\ldots,y^n: y^j=y^j(x^i,\ldots,x^n)$, *i* = 1, …, *n*). Если $U=V$, то отображение f называется преобразованием области U. Таким образом, преобразование области U сводится к введению в ней новых координат, причем новые координаты можно всюду в области выразить через старые и наоборот. Множество всех преобразований области U образует группу.

Пусть в области U имеется некоторая метрика, задаваемая в координатах $x^1,\ldots,x^n$ невырожденной симметрической матрицей $g_{ij}=g_{ij}(x^1,\ldots,x^n)$. Если задано преобразование $x^i=x^i(y^1,\ldots,y^n)$, то в координатах $y^1,\ldots,y^n$ эта же метрика задается матрицей $g'_{ij}=g'_{ij}(y^1,\ldots,y^n)$, где, как говорилось выше, $g'_{ij}=\sum\limits_{k,\ell=1}^{n}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}g_{k\ell}\dfrac{\partial x^\ell}{\partial y^j}$. Преобразование $x^i=x^i(y^1,\ldots,y^n)$ области U называется движением данной метрики, если $g'_{ij}(y^1,\ldots,y^n)=g_{ij}(x^1(y),\ldots,x^n(y))$. Другими словами, преобразование $x^i=x^i(y^1,\ldots,y^n)$ является движением, если $g_{ij}=\sum\limits_{k,\ell=1}^{n}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}g_{k\ell}\dfrac{\partial x^\ell}{\partial y^j}$.

Если G – матрица метрики, f – преобразование области U, то это можно записать в матричном виде $G(y) = C\,G(x)C^t$, где $C = df^{-1}$.

Множество всех движений данной метрики образует группу, которая называется движением данной метрики.

Пусть задано пространство $R^n_{1,3}$. В специальной теории относительности постулируется, что пространство событий является пространством Минковского (пространством $R^n_{1,3}$) с координатами ct, x, y, z, где c – скорость света в вакууме. Процесс жизни точечной частицы отождествляется с линией (мировой линией) в пространстве событий – множестве наборов $\{(t, x, y, z)\}$. А под событием понимается элементарный физический процесс, характеризующийся набором чисел (t, x, y, z), где t – момент времени, когда произошло событие, (x, y, z) – координаты места события. Пусть одно и то же событие произошло относительно одной инерциальной системы в момент времени t в точке с координатами (x, y, z), а относительно другой инерциальной системы – в момент времени t' в точке с координатами (x', y', z'). Формулы перехода от одной инерциальной системы к другой носят название преобразования Лоренца:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{C^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}};\ \ x' = \frac{-Vt + x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}};\ \ y' = y;\ \ z' = z,\ \text{где}\ V = \frac{x}{t}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{C^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}};\ \ x = \frac{Vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}};\ \ y = y';\ z = z'.$$

Непрерывной кривой в трехмерном евклидовом пространстве R^3 называется непрерывное отображение $\vec{r} : [a, b] \to R^3$ некоторого отрезка $[a, b]$, $a < b$, вещественной оси в пространство R^3. Здесь имеется в виду, что в R^3 задана декартова система координат (x^1, x^2, x^3) и точки из R^3 характеризуются их радиус-векторами относительно начала координат. Непрерывность отображения $\vec{r}(t)$ равносильна непрерывности числовых функций $x^i : t \to x^i(t),\ i = 1, 2, 3$, где $\vec{r}(t) = (x^1(t), x^2(\mathrm{t}), x^3(t))$ в базисе (x^1, x^2, x^3). Точка $\vec{r}(a)$ есть начало кривой $\vec{r}(t)$, а $\vec{r}(b)$ – конец ее. Будем говорить, что кривая $\vec{r}(t)$ проходит через точку $\vec{r}_0$, если существует значение t_0 параметра t такое, что $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$.

Отображение $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ называется гладкой кривой в R^3, если ее координатные функции $x^1(t), x^2(\mathrm{t}), x^3(t)$ являются гладкими на $[a,b]$ функциями. (Числовая функция $t\to x(t)$, заданная на отрезке, гладкая, если на некотором открытом интервале, содержащем отрезок$[a,b]$, существует гладкая функция, совпадающая на $[a,b]$ с функцией $x(t)$).

Для любой гладкой кривой $\vec{r}(t)$ и любого $t\in[a,b]$ существует $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{r}\,'(t)$, который называется вектором скорости или касательным вектором $\vec{r}(t)$ в точке *t*. Постоянный вектор $\vec{r}_0$ называется пределом переменного вектора $\vec{r}(t)$ при стремлении аргумента *t* к постоянному числу t_0, если $\lim\limits_{\Delta t\to t_0} = \left|\vec{r}(t)-\vec{r}_0\right| = 0$. Вектор $\vec{r}(t)$ непрерывен при $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Гладкая кривая $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ называется регулярной, если $\vec{r}\,'(t)\neq 0$ для всех $t\in[a,b]$. Кривая $\vec{r}$ называется бирегулярной, если для всякой внутренней точки *t* отрезка $[a,b]$ векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ линейно независимы. Если каждому значению $t\in[a,b]$ соответствует одна точка на кривой и каждой точке на кривой – единственное значение параметра $t\in[a,b]$, то кривая называется простой.

Две кривые $\vec{r}_1:[a,b]\to R^3$ и $\vec{r}_2:[a,b]\to R^3$ называются эквивалентными, если существует такая функция $\varphi(t)$, что $\varphi'(t)>0$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\vec{r}_1(t)=\vec{r}_2(\varphi(t))$ для всех $t\in[a,b]$. Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ осуществляет замену параметра *t*. Класс эквивалентных кривых называется параметризованной кривой. Параметризация ℓ кривой $\vec{r}(\ell)$ называется натуральной, если $\left|\vec{r}\,'(\ell)\right|=1$. Всякая регулярная кривая допускает натуральную параметризацию. Пусть $\vec{r}(t)$ – некоторая регулярная кривая, $\vec{r}_0$ – некоторая ее точка, соответствующая значению параметра t_0. Касательной прямой к кривой $\vec{r}(t)$ в точке $\vec{r}_0$ называется прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ и имеющая своим направляющим вектором вектор $\vec{r}\,'(t_0)$. Всякая прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно касательной в этой точке, называется нормалью этой кривой. Через всякую точку пространственной кривой проходит бесконечное множество нормалей, которые все расположены в одной плоскости, называемой нормальной плоскостью кривой. Нормаль кривой, имеющая своим направляющим вектором вектор $\vec{r}\,''(t)$, где *t* – натуральный параметр, называется главной нормалью кривой. Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется ее касательной плоскостью.

Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль кривой, называется <u>соприкасающейся плоскостью</u>. Так как $\vec{r}_t' = \vec{r}_\ell' \ell_t'$ и $\vec{r}_t'' = \vec{r}_\ell''(\ell')^2 + \vec{r}_\ell' \ell_t''$, то при любой параметризации кривой векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,''(t)$ расположены в соприкасающейся плоскости. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется <u>бинормалью</u>. Плоскость, содержащая бинормаль и касательную данной кривой, называется <u>спрямляющей плоскостью</u>.

Приведем сводку формул для вышеназванных прямых и плоскостей. Пусть $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – данная регулярная кривая, $\rho(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ – произвольная точка соответствующей прямой или плоскости, тогда:

1) уравнение <u>касательной</u> к кривой:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) + \lambda \vec{r}\,'(t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} X = x(t) + \lambda x'(t), \\ Y = y(t) + \lambda y'(t), \\ Z = z(t) + \lambda z'(t); \end{cases}$$

2) уравнение <u>нормальной плоскости</u>:

$$(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}\,' = 0 \qquad \text{или} \qquad (X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0;$$

3) уравнение <u>бинормали</u>:

$$\vec{c} = \vec{r} + \lambda[\vec{r}\,', \vec{r}\,''] \qquad \text{или} \qquad \frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

4) уравнение <u>соприкасающейся плоскости</u>:

$$(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}\,'\vec{r}\,'' = 0 \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0;$$

5) уравнение <u>главной нормали</u>:

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \left[[\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,' \right] \quad \text{или} \quad \begin{cases} X = x + \lambda \left(z' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right), \\ Y = y + \lambda \left(x' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \right), \\ Z = z + \lambda \left(y' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \right); \end{cases}$$

6) уравнение <u>спрямляющей плоскости</u>:

$$(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}\,'[\vec{r}\,', \vec{r}\,''] = 0 \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Касательная, главная нормаль и бинормаль</u> определяют в каждой точке

кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется сопровождающим трехгранником кривой. Гранями сопровождающего трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости: соприкасающаяся плоскость, содержащая касательную и главную нормаль; нормальная, содержащая главную нормаль и бинормаль; спрямляющая, содержащая бинормаль и касательную. Единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали, направленные по осям сопровождающего трехгранника в положительном направлении, выражаются соответственно (рис. 47).

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|},\qquad \vec{\upsilon}=\frac{\left[\left[\vec{r}',\vec{r}''\right],\vec{r}'\right]}{\left|\left[\left[\vec{r}',\vec{r}''\right],\vec{r}'\right]\right|},\qquad \vec{\beta}=\frac{\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]}{\left|\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]\right|}.$$

Рисунок 47 – Сопровождающий трехгранник кривой

Векторы сопровождающего трехгранника меняются при движении точки по кривой. Это изменение для кривой, заданной в натуральном параметре ℓ, описывают следующие формулы Френе:

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{r}}{d\ell}=k(\ell)\vec{\upsilon},\\[2mm] \dfrac{d\vec{\upsilon}}{d\ell}=-k(\ell)\vec{\tau}+\aleph(\ell)\vec{\beta},\\[2mm] \dfrac{d\vec{\beta}}{d\ell}=-\aleph(\ell)\vec{\upsilon}.\end{cases}$$

Функции $k(\ell)$, $\aleph(\ell)$ называются соответственно кривизной и кручением. Из формул Френе следует, что кривизна кривой в данной ее точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги; а модуль кручения равен пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги. Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в произвольном параметре t имеют вид:

$$k=\frac{\left|\,\left[\vec r\,',\vec r\,''\right]\,\right|}{\left|\vec r\,'\right|^3}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z'' & x' \\ z''' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y'' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}},$$

$$\aleph=\frac{\vec r\,'\vec r\,''\vec r\,'''}{\left|\,\left[\vec r\,',\vec r\,''\right]\,\right|^2}=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

Если кривая отнесена к натуральному параметру, то $k=k(\ell)$, $\aleph=\aleph(\ell)$ называются натуральными уравнениями кривой. Пусть заданы две кривые. Если на этих кривых можно ввести натуральные параметры так, чтобы в точках, отвечающих одинаковым значениям этих параметров, совпадали их кривизны и кручения, то говорят, что их натуральные уравнения совпадают. Кривые, имеющие одинаковые натуральные уравнения, могут отличаться только положением в пространстве. Будем говорить, что две кривые отличаются положением в пространстве R^3, если существует некоторое движение пространства R^3, переводящее одну кривую в другую.

В трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса (1, 2) $R^3_{1,2}=R^3_1$ векторы ортонормированного репера $\{0,\vec a_0,\ \vec a_1,\vec a_2\}$ удовлетворяют условиям:

$$\vec a_0\vec a_0=-1;\quad \vec a_1\vec a_1=1;\quad \vec a_2\vec a_2=1,\quad \vec a_0\vec a_1=1,\quad \vec a_0\vec a_2=0,\quad \vec a_1\vec a_2=0.$$

Координаты любой точки в этом репере будем обозначать $\vec a=(x^0,x^1,x^2)$. Отображение $\vec r:[a,b]\to R^3_1: t\to(x^0(t),x^1(t),x^2(t))$, где $t\in[a,b]$, $a<b$ называется параметризованной кривой в R^3_1 и обозначается $\vec r(t)=(x^0(t),x^1(t),x^2(t))$. Параметризованная кривая называется времениподобной параметризованной с помощью натурального параметра δ, если выполняется условие $\vec r\,'(\delta)\,\vec r\,'(\delta)=-1$, где $\vec r(\delta)=(x^0(\delta),x^1(\delta),x^2(\delta))$. Пусть $\dfrac{d\vec r(\delta)}{d\delta}=\vec r\,'(\delta)=\tau(\delta)$, где $\vec\tau(\delta)\,\vec\tau(\delta)=-1$. Тогда $(d\vec r)^2=-(d\delta)^2$ и $(d\delta)^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2$, так как $\vec r^{\,2}=-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2$. Но $x^0=ct$, $x^1=x,\quad x^2=y$. Значит, $(d\delta)^2=c^2(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2$, $\left(\dfrac{d\delta}{dt}\right)^2=c^2-v^2$, где $v^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$. Поэтому $\delta=c\displaystyle\int_a^b\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$. Параметр δ, вычисляемый по этой формуле, называется длиной дуги времениподобной кривой. Времениподобная кривая $\vec r(\delta)$ называется регулярной, если $\vec r\,'(\delta)\neq 0$, и бирегулярной, если $\vec r\,'(\delta)\neq\vec r\,''(\delta)$.

К каждой точке времениподобной кривой присоединим правый ортонормированный репер $\vec{\tau}(\delta)=\vec{\tau}'(\delta)$, $\vec{v}(\delta)=\dfrac{\vec{k}(\delta)}{k(\delta)}, \vec{\beta}(\delta)=\left[\vec{\tau}(\delta),\vec{v}(\delta)\right]$, так как в R_1^3 можно ввести векторное произведение двух векторов, положив для этого, чтобы для векторов ортонормированного базиса выполнялись условия: $\left[\vec{a}_0,\vec{a}_1\right]=\vec{a}_2, \left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]=-\vec{a}_0, \left[\vec{a}_2,\vec{a}_0\right]=\vec{a}_1$. Значит, $\left[\vec{\tau},\vec{v}\right]=\vec{\beta}, \left[\vec{v},\vec{\beta}\right]=-\vec{\tau}, \left[\vec{\beta},\vec{\tau}\right]=\vec{v}$.

Векторы $\vec{\tau}(\delta),\vec{v}(\delta),\vec{\beta}(\delta)$ называются соответственно вектором касательной, главной нормали и бинормали. Плоскости $L(\vec{\tau},\vec{v}), L(\vec{v},\vec{\beta}), L(\vec{\tau},\vec{\beta})$ называются соответственно соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостью кривой в данной точке. Формулы Френе времениподобной кривой $\vec{r}(\delta)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\tau}(\delta)}{d\delta}=k(\delta)\,\vec{v}(\delta), \\ \dfrac{d\vec{v}(\delta)}{d\delta}=k(\delta)\vec{\tau}(\delta)+\aleph(\delta)\vec{\beta}(\delta), \\ \dfrac{d\vec{\beta}(\delta)}{d\delta}=-\aleph(\delta)\vec{v}(\delta). \end{cases}$$

Функции $k(\delta)$ и $\aleph(\delta)$ называются соответственно кривизной и кручением времениподобной кривой $\vec{r}(\delta)$. Формулы для их вычисления имеют вид: $k(\delta)=\left|\,\left[\vec{r}'(\delta),\vec{r}''(\delta)\right]\,\right|$, $\aleph(\delta)=\dfrac{\vec{r}'(\delta)\vec{r}''(\delta)\vec{r}'''(\delta)}{\left|\left[\vec{r}'(\delta),\vec{r}''(\delta)\right]\right|}$ или $k(t)=\dfrac{\left|\,\left[\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right]\,\right|}{\left(\sqrt{-(\vec{r}'(t))^2}\right)^3}$,

$\aleph(t)=\dfrac{\vec{r}(t)\vec{r}''(t)\vec{r}'''(t)}{\left|\left[\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right]\right|}$, если кривая имеет параметризацию, отличную от δ.

Пусть R^3 – трехмерное евклидово пространство с координатами (x,y,z) и $F(x,y,z)$ – вещественная функция трех переменных, обладающая непрерывными частными производными до порядка k включительно (функция $F(x,y,z)$ принадлежит классу C^k).

Поверхностью класса C^k называется множество M точек $(x,y,z)\in R^3$, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z)=0$, причем

$$grad\ F\Big|_M=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_M\neq 0.$$

Поверхность класса C^k, заданная в параметрическом виде, есть взаимно однозначное с C^k дифференцируемое отображение $\vec{r}:U\to R^3$, где U –

открытое множество в R^2 с координатами (u, v), причем $\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right] \neq 0$ в U, т. е. поверхность в R^3 задается векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ или $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$.

Векторы $\vec{r}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \vec{r}_v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ называются касательными векторами поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

Прямая называется касательной прямой поверхности, если она касается какой-либо кривой, принадлежащей этой поверхности.

Касательной плоскостью поверхности называется множество прямых, касающихся поверхности в этой точке. Уравнение касательной плоскости поверхности имеет вид: $(\vec{\rho} - \vec{r})\vec{r}_u\vec{r}_v = 0$ или $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$.

Нормаль к поверхности есть прямая, проходящая через данную точку поверхности по направлению вектора $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$. Ее уравнение имеет вид: $\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\,[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ или $\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$.

Длина дуги главной кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$, расположенной на поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, определяется формулой

$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu_t'^2 + 2Fu_t'v_t' + Gv_t'^2}\,dt$, где

$E = r_u'r_u' = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = \vec{r}_u\vec{r}_v = x_ux_v + y_uy_v + z_uz_v, \quad G = \vec{r}_v\vec{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$

Выражение $d\ell^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \varphi_1$ называется первой квадратичной формой поверхности или римановой метрикой на поверхности.

Угол между двумя пересекающимися кривыми $u = u_1(t), v = v_1(t)$ и $u = u_2(t), v = v_2(t)$ поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ определяется формулой

$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$, где du, dv – дифференциалы функций u и v, взятые из уравнений первой кривой, а $\delta u, \delta v$ – дифференциалы от u и v, взятые из уравнений второй кривой.

Площадь поверхности определяется формулой

$$\delta = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \varphi_2,$$

где $\vec{m} = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right|}$ – единичный вектор нормали к поверхности

$$L = \vec{m}\vec{r}_{uu} = \frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \vec{m}\vec{r}_{uv} = \frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \vec{m}\vec{r}_{vv} = \frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\left|\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad .$$

Проекция вектора кривизны линии на нормаль поверхности в точке, через которую проходит эта кривая, называется <u>нормальной кривизной</u> этой кривой, которая определяется формулой $K_n = \dfrac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ – матрица первой квадратной формы, а $B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ – матрица второй квадратичной формы. Существует такой базис, в котором матрица A становится единичной, а B – диагональной. Элементы этого базиса называются <u>главными векторами</u> в данной точке поверхности, а направления, определяемые главными векторами – <u>главными направлениями</u>. Элементы k_1 и k_2 матрицы B в главном базисе называются <u>главными кривизнами поверхности</u> в данной точке и определяются из уравнения $\det(B - kA) = \begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $k_1 k_2 = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$ – <u>полная или гауссова</u> кривизна поверхности в данной точке, $k_1 + k_2 = \dfrac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2} = 2H$, H – <u>средняя кривизна</u> поверхности.

Пусть $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор нормального сечения в данной точке, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – единичные главные векторы, φ – угол поворота от $\vec{e}_1$ до $\vec{\tau}$ в направлении от $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$. Тогда $k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$ – формула Эйлера.

Если $k_1 = k_2$, то $k_n = const$. Такие точки называются омбилическими. В такой точке коэффициенты первой и второй квадратичных форм пропорциональны: $\dfrac{L}{E} = \dfrac{M}{F} = \dfrac{N}{G}$.

Если в данной точке поверхности $K > 0$, то данная точка поверхности называется эллиптической, если $K < 0$, то – гиперболической, и если $K = 0$, то – параболической.

Пусть $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, u^1 = u, u^2 = v$ – криволинейные координаты. Дифференцирование вектора $\vec{r}$ поверхности по u^1 будем обозначать индексом 1, а по u^2 – индексом 2 снизу: $\vec{r}_u = \vec{r}_1$, $\vec{r}_v = \vec{r}_2$, $\vec{r}_{uu} = \vec{r}_{11}$, $\vec{r}_{vv} = \vec{r}_{22}$, $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{12}$. Тогда $g_{ij} = \vec{r}_i \vec{r}_j, b_{ij} = \vec{r}_{ij} \vec{m}$, где $i, j = 1,2$. Для каждой точки поверхности однозначно определяется натуральный репер поверхности – $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{m})$. Формулы, выражающие первые производные этого репера через базис этого репера, называются деривационными формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial u^i} = \Gamma_{1i}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{1i}^2 \vec{r}_2 + b_{1i} \vec{m}, \\ \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial u^i} = \Gamma_{2i}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{2i}^2 \vec{r}_2 + b_{2i} \vec{m}, \\ \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial u^i} = -b_i^1 \vec{r}_1 - b_i^2 \vec{r}_2, \end{cases}$$

где $\Gamma_{ij}^{\ell} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{2} g^{k\ell} \left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} + \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \right)$, $\mathrm{g}^{11} = \dfrac{\mathrm{g}_{22}}{\mathrm{g}_{11}\mathrm{g}_{22} - \mathrm{g}_{12}^2}$, $\mathrm{g}^{12} = \mathrm{g}^{21} = -\dfrac{\mathrm{g}_{12}}{\mathrm{g}_{11}\mathrm{g}_{22} - \mathrm{g}_{12}^2}$, $\mathrm{g}^{22} = \dfrac{\mathrm{g}_{11}}{\mathrm{g}_{11}\mathrm{g}_{22} - \mathrm{g}_{12}^2}$, $b_i^k = -\sum\limits_{j=1}^{2} b_{ij} g^{ik}$. Выражения Γ_{ij}^k называются символами Кристоффеля поверхности.

Формула Гаусса:

$$b_{11} b_{12} - b_{12}^2 = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{12}^i \Gamma_{12}^j g_{ij} - \sum_{k,\ell=1}^{2} \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^{\ell} g_{k\ell}.$$

Геодезической линией на поверхности называется линия, главная нормаль которой в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности в той же точке. Если кривая на поверхности задана параметрическим уравнением $\vec{r}(\ell) = \vec{r}(u^1(\ell), u^2(\ell))$, где ℓ натуральный параметр, то уравнение геодезических линий имеет вид:

$$\frac{d^2 u^k}{d\ell^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\ell} \frac{du^j}{d\ell} = 0, k = 1, 2.$$

Геодезической кривизной k_g кривой C в точке на поверхности называется кривизна в этой точке ортогональной проекции C' кривой C на касательную плоскость K поверхности в данной точке. Пусть кривая на поверхности задана параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(\ell) = \vec{r}(u^1(\ell), u^2(\ell))$, где ℓ – натуральный параметр на кривой. Тогда геодезическая кривизна вычисляется по формуле:

$$k_g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\Big| (u^2)''(u^1)' - (u^2)'(u^1)'' + \Gamma_{11}^2 (u^1)'^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u^1)'^2 (u^2)' +$$

$$+ (\Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)\ (u^1)'\ (u^2)'^2 - \Gamma_{22}^1 (u^2)'^3 \Big| .$$

Тензоры – это важнейший из классов величин, числовая запись которых меняется при изменении координат. Тензором (тензорным полем) типа *(p, q)* ранга $p+q$ называется объект, задаваемый набором чисел $\mathrm{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ в произвольной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$, числовая запись которого зависит от системы координат по следующему закону: если $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n), z^j = z^j(x^1, \dots, x^n)$, то имеет место формула:

$\mathrm{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum\limits_{(k),(\ell)} \mathrm{T}_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \dots \dfrac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \dfrac{\partial z^{\ell_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \dfrac{\partial z^{\ell_q}}{\partial x^{j_q}}$, где $\mathrm{T}_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p}$ – числовая запись тензора в координатах $(z^1, \dots, z^n)$, $\mathrm{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ – числовая запись тензора в координатах $(x^1, \dots, x^n)$, индексы $(i) = (i_1, \dots, i_p)$, $(j) = (j_1, \dots, j_q)$, $(k) = (k_1, \dots, k_p)$, $(\ell) = (\ell_1, \dots, \ell_q)$ меняются от 1 до n.

Приведем примеры тензоров:

1) скаляр – тензор 0-го ранга;

2) векторы (типа вектора скорости) – тензор типа (1, 0):

$$\vec{\xi} = (\xi^i)_x \to \vec{\xi} = (\xi^j)_z;\ \xi^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i};$$

3) ковектор (типа градиента функции) – тензор типа (0, 1):

$$\vec{\xi} = (\xi_i)_x \to (\xi_j)_z = \vec{\xi};\ \ \xi_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j};$$

4) квадратичная форма на векторах (скалярное произведение векторов) – тензор типа (0, 2):

$$(g_{ij}) \to (g'_{ij}); \qquad g'_{ij} = \sum_{k,\ell} g_{k\ell} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial z^j}; (x) \to (z);$$

5) квадратичная форма на ковекторах (скалярное произведение ковекторов) – тензор типа (2, 0):

$$(g^{ij}) \to' (g^{ij});' g^{ij} = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^\ell};$$

6) линейный оператор на векторах (ковекторах) – тензор типа (1, 1): $\mathrm{A} = (a_j^i) \to' \mathrm{A} = ('a_j^i);' a_j^i = \sum\limits_{k,\ell} a_\ell^k \dfrac{\partial x^\ell}{\partial z^j} \dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}$.

Говорят, что два тензора $\mathrm{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ и $\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ одного типа получаются друг из друга <u>перестановкой верхних индексов</u>, если найдется такая перестановка $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_p \\ \ell_1 \dots \ell_p \end{pmatrix}$, где $i_k \to j_\ell$, что имеет место равенство при всех $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q, \ell_1, \dots, \ell_p : \widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \mathrm{T}^{\ell_1 \dots \ell_p}_{j_1 \dots j_q}$.

Аналогично определяется <u>перестановка нижних индексов</u>.

Для тензора $\mathrm{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ типа *(p, q)* его <u>сверткой (следом) по индексам</u> (i_k, ℓ_k) будет тензор $\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}}$ типа *(p – 1, q – 1)*, определяемый формулой

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}^{\, i_1 \dots i_{k-1} i i_{k+1} \dots i_p}_{\, j_1 \dots j_{\ell-1} i j_{\ell+1} \dots j_q} .$$

Если заданы два тензора $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\right)$ и $\mathrm{P} = \left(\mathrm{P}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_\ell}\right)$ типа *(p, q)* и (k, ℓ) соответственно, то их <u>произведением</u> будет тензор $S = T \otimes P$ типа $(p+k, q+\ell)$ с компонентами $S^{\, i_1 \dots i_{p+k}}_{\, j_1 \dots j_{q+\ell}} = T^{\, i_1 \dots i_p}_{\, j_1 \dots j_q} \,.\, P^{\, i_{p+1} \dots i_{p+k}}_{\, j_{q+1} \dots j_{q+\ell}}$.

Произведение вектора $\left(\xi^i\right)$ и ковектора $\left(\eta_j\right)$ есть тензор 2-го ранга $T^i_j = \left(\xi^i \eta_j\right)$, а его след $T^i_i = \xi^i \eta_i$ – скалярное произведение $\lambda = \xi^i \eta_i$.

Произведение вектора $\left(\xi^i\right)$ и линейного оператора A^k_ℓ есть тензор типа (2, 1): $T^{ik}_\ell = A^k_\ell \xi^i$, а свертка (след) этого произведения $\eta^k = T^i_\ell \eta^\ell = A^k_\ell \eta^\ell$ есть вектор.

Если в пространстве заданы риманова метрика $\left(g_{ij}\right)$ и тензор $\mathrm{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ в какой-то системе координат $\left(x^1, \dots, x^n\right)$, то можно рассмотреть новый тензор $T^{i_2 \dots i_p}_{i_1 j_1 \dots j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$. Результат этой операции называется <u>опусканием индекса</u> <u>i_1 с помощью римановой метрики</u> $\left(g_{ij}\right)$. Если $\left(\xi^i\right)$ – вектор, то после опускания индекса мы получим ковектор $\xi_i = g_{ij} \xi^j$.

Для <u>поднятия нижних индексов вверх</u> при наличии римановой метрики $\left(g_{ij}\right)$ необходимо рассмотреть обратную матрицу $\left(g^{ij}\right)$, такую, что $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k \end{cases}$. По определению имеем $T^{j_1 i_1 \dots i_p}_{j_2 \dots j_q} = g^{j_1 k} T^{i_1 \dots i_p}_{k j_2 \dots j_q}$.

Отметим, что совокупность всех тензоров типа *(p, q)* в заданной точке пространства образует линейное пространство: если $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\right)$ и $S = \left(S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\right)$ – тензоры типа (p, q), то их линейная комбинация $\lambda T + \mu S = U$ с компонентами $U^{\, i_1 \dots i_p}_{\, j_1 \dots j_q} = \lambda T^{\, i_1 \dots i_p}_{\, j_1 \dots j_q} + \mu S^{\, i_1 \dots i_p}_{\, j_1 \dots j_q}$ тоже есть тензор типа (p, q) в этой же самой точке.

<u>Кососимметрическим тензором</u> $T_{i_1 \dots i_k}$ или $T^{i_1 \dots i_k}$ называется такой тензор, который меняет знак при нечетной перестановке индексов и сохраняет

свое значение при любой четной перестановке индексов.

Если $T_{i_1 \ldots i_k}$ – кососимметрический по всем индексам тензор в n-мерном пространстве с координатами $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, $i_q = 1, 2, \ldots, n$, то <u>его градиентом</u> $\left(\nabla^S T\right)_{j_1 \cdots j_k j_{k+1}}$ называется кососимметрический тензор$(k+1)$-го ранга типа $(0, k+1)$ с компонентами $\left(\nabla^S T\right)_{j_1 \cdots j_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} \frac{\partial T_{j_1 \cdots \hat{j}_q \cdots j_{k+1}}}{\partial x^{jq}} \cdot (-1)^q$. (Здесь значок $\hat{i}_q$ означает, что индекс i_q пропущен).

Рассмотрим примеры.

Пусть $k+1=1$ и $T = f(x)$ – функция. Тогда согласно определению $\left(\nabla^S T\right)_i = \frac{\partial T}{\partial x^i}$ – обычный градиент функции.

Пусть $T = (T_i)$ – ковектор. Тогда $\left(\nabla^S T\right)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} = -\left(\nabla^S T\right)_{ji}$. Этот тензор $\left(\nabla^S T\right)_{ij}$ называется <u>ротором ковекторного поля</u>, $\left(\nabla^S T\right)_{ij} = rot\ T$. Ротор – это кососимметрический тензор типа (0, 2) ранга 2. Если $n = 3$ и координаты $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ эвклидовы, то тензору $\left(\nabla^S T\right)_{ij}$ сопоставляют вектор $\left(\eta^k\right) = rot\ T$,

где $$\eta^1 = \frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2} = \left(\nabla^S T\right)_{23},$$

$$\eta^2 = \frac{\partial T_3}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^3} = \left(\nabla^S T\right)_{31} = -\left(\nabla^S T\right)_{13},$$

$$\eta^3 = \frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1} = \left(\nabla^S T\right)_{12}.$$

Пусть $n = 3$ и задан кососимметрический тензор $T_{ij} = -T_{ji}$. Тогда кососимметрический тензор 3-го ранга $\left(\nabla^S T\right)_{123}$ имеет вид $\left(\nabla^S T\right)_{123}$ = $= \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1}$. Если координаты евклидовы $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ и $\eta^1 = T_{23}$, $\eta^2 = -T_{13}$, $\eta^3 = T_{12}$, согласно указанному выше правилу сопоставления вектора кососимметрическому тензору, то имеем $\left(\nabla^S T\right)_{123} = \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i}$. В евклидовых координатах операция, сопоставляющая векторному полю $\vec{\eta} = \left(\eta^i\right)$ число $div\vec{\eta} = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i}$, называется <u>дивергенцией</u>.

Отметим, что ∇^S – единственная не связанная ни с какой геометрией операция. Что же касается обычного обобщения градиента функции на тензоры $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q, k} = \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k}$ в пространстве с декартовыми координатами $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, то

результат этой операции не является тензором. Однако, если в пространстве заданы координаты и тензорное поле $\mathrm{T}=\left(\mathrm{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$, то поле $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q,k}=\dfrac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^k}$ <u>преобразуется как тензор при всех линейных координатах</u>:
$x^i=a^i_j z^j$, $a^i_j=const$, $z^i=b^i_j x^j$, $b^i_j\, a^j_k=\delta^i_k$.

А как же быть в других системах координат, связанных с евклидовой нелинейной заменой?

Если градиент $T^{(i)}_{(j),q}$ любого тензорного поля $T^{(i)}_{(j)}$ типа (m,n) ведет себя как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат (x) определяется по формуле $T^{(i)}_{(j),k}=\dfrac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$, то <u>в любой другой системе координат (z) он вычисляется по формуле</u>

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(\ell),r}=\frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(\ell)}}{\partial z^r}+\sum_{s=1}^{p}\widetilde{T}^{k_1\ldots k_s=i\ldots k_p}_{\ell_1\ldots\ell_q}\tilde{A}^{k_s}_{ir}-\sum_{s=1}^{q}\widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{\ell_1\ldots\ell_s=i\ldots\ell_q}\tilde{A}^{i}_{\ell_3},$$

где набор функций $\tilde{A}^p_{kq}$ вычисляется по формуле $\tilde{A}^p_{kq}=-\dfrac{\partial x^i}{\partial z^p}\dfrac{\partial x^m}{\partial z^q}\dfrac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\partial x^m}$.

Например, для тензоров 2-го ранга имеем
$\widetilde{T}^i_{j,k}=\dfrac{\partial \widetilde{T}^i_j}{\partial z^k}+\widetilde{T}^p_j\tilde{A}^i_{pk}-\widetilde{T}^i_p\tilde{A}^p_{jk}$; $\widetilde{T}_{ij,k}=\dfrac{\partial \widetilde{T}_{ij}}{\partial z^k}-\widetilde{T}_{pj}\tilde{A}^p_{ik}-\widetilde{T}_{ip}\tilde{A}^p_{jk}$;
$\widetilde{T}^{ij}_{,k}=\dfrac{\partial \widetilde{T}^{ij}}{\partial z^k}+\widetilde{T}^{pj}\tilde{A}^i_{pk}+\widetilde{T}^{ip}\tilde{A}^j_{pk}$. Для векторного поля $\left(T^i\right)$ имеем $\widetilde{T}^k_{;r}=\dfrac{\partial \widetilde{T}^k}{\partial z^r}+\widetilde{T}^S\,\tilde{A}^k_{sr}$, а для ковекторного поля $(T_i)=\widetilde{T}_{i,k}=\dfrac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial z^k}-\widetilde{T}_r\,\tilde{A}^r_{ik}$.

Будем говорить, что <u>задана операция ковариантного дифференцирования</u> (взятия градиента) тензоров любого типа, если в любой системе координат $\left(z^1,\ldots,z^n\right)$ задан набор функций $\Gamma^k_{pq}(z)$, который при замене координат $z=Z(z')$ преобразуется по формуле $\tilde{A}^{k'}_{p'q'}=\dfrac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\tilde{A}^k_{pq}\dfrac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\dfrac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}+\dfrac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\right)$.

Величины $\tilde{A}^k_{pq}(k)$ называются <u>символами Кристоффеля</u>. Операцию ковариантного дифференцирования (градиента) часто называют <u>дифференциально-геометрической связностью</u> или <u>аффинной связностью</u>. <u>Связность называется евклидовой</u>, если существуют такие координаты $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, что $\tilde{A}^k_{ij}=0$ (или $T^{(i)}_{(j),k}=\dfrac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$). Такие координаты называются евклидовыми. Операция ковариантного дифференцирования обозначается символом ∇: $\nabla_q T^i=T^i_{,q}$.

Альтернативное выражение $T^i_{kj}=\tilde{A}^i_{kj}-\tilde{A}^i_{jk}=\tilde{A}^i_{[kj]}$ образует тензор, называемый тензором кручения.

Ковариантное дифференцирование $\tilde{A}^k_{ij}$ (связность) называется симметричной, если тензор кручения $\tilde{A}^k_{ij}-\tilde{A}^k_{ji}$ тождественно равен нулю в каждой системе координат или $\tilde{A}^k_{ij}=\tilde{A}^k_{ji}$.

Ковариантной производной векторного поля (T^i)(или ковекторного поля (T_i)) по направлению вектора (ξ^k) в некоторой точке $P=(z^1,...,z^n)$ называется выражение $\nabla_{\vec{\xi}}(T^i)=\xi^k\nabla_k T^i$ в точке P (или выражение $\nabla_{\vec{\xi}}(T_i)=\xi^k\nabla_k T_i$ в точке P для ковекторного поля). Результат ковариантного дифференцирования векторного поля по направлению $\vec{\xi}$ в некоторой точке P есть вектор в этой точке.

Говорят, что векторное (тензорное) поле T является ковариантно постоянным или параллельным вдоль кривой $z^i=z^i(t)$ на отрезке $a\le t\le b$, если ковариантная производная поля T в точках кривой по направлению вектора скорости кривой равна нулю: $\nabla_{\vec{\xi}}T=\xi^k\nabla_k T=0, 0\le t\le b, \xi^k=\dfrac{dz^k}{dt}$. Для векторных полей имеем: $\nabla_{\vec{\xi}}T=\xi^k\nabla_k T^i=\xi^k\left(\dfrac{\partial T^i}{\partial z^k}+\tilde{A}^i_{jk}T^j\right)=0$.

Параллельным переносом вектора T^i_p из точки $P=(z^1_0,...,z^n_0)$ в точку $Q=(z^1_1,...,z^n_1)$ вдоль кривой $z^i=z^i(t)$, ведущей из P в Q, называется векторное поле (T^i), заданное во всех точках кривой и параллельное вдоль этой кривой: $\dfrac{dx^k}{dt}\nabla_k T^i=0$ во всех $0\le t\le 1$. При $t=0$ векторное поле (T^i) в точке P должно совпадать с исходным вектором $(T^i)_p$; при $t=1$ векторное поле (T^i) в точке Q есть вектор $(T^i)_Q$, называющийся результатом параллельного переноса вектора $T^{\,i}_p$ вдоль заданной кривой $z^i=z^i(t)$ из P в Q. В координатах $z^1,...,z^n$ имеем:

$\dfrac{dz^k}{dt}\nabla_\alpha T^i=\dfrac{\partial T^i}{\partial z^\alpha}\dfrac{dz^\alpha}{dt}+\tilde{A}^i_{p\alpha}\dfrac{dz^\alpha}{dt}=\dfrac{dT^i}{dt}+\left(\dfrac{dz^\alpha}{dt}\tilde{A}^i_{p\alpha}\right)T^P=0$ – уравнение параллельного переноса. Начальное условие $T^i(0)=T^i_p$. Линия $x^i=x^i(t)$ называется геодезической, если ее вектор скорости $T^i=\dfrac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль нее самой: $\nabla_T(T)=0$ (или ковариантная производная векторного поля $T^i=\dfrac{dx^i}{dt}$ вдоль этой кривой равна нулю).

Уравнение геодезических линий:

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}+\tilde{A}^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0,\ j=1,...,n.$$

Вектор $\nabla_T(T^j)=\dfrac{d^2x^j}{dt^2}+\tilde{A}^j_{ki}\dfrac{dx^k}{dt}\dfrac{dx^i}{dt}=K^i_g(t)$ называется вектором геодезической кривизны данной линии, $T^i=\dfrac{dx^i}{dt}$.

Геодезической кривизной называется длина вектора $\vec{K}^i_g(\ell):k_g(\ell)=\left|\vec{K}^i_g(\ell)\right|=\sqrt{g_{ij}\,\vec{K}^i_g(\ell)\vec{K}^i_g(\ell)}$, где ℓ – натуральный параметр.

Связность $\tilde{A}^k_{ij}$ называется согласованной с метрикой g_{ij}, если ковариантная производная метрического тензора тождественно равна нулю: $\nabla_k g_{ij}=0,\quad k,i,\,j=1,...,n$. Связность, согласованная с данной метрикой g_{ij}, задается формулами:

$$\tilde{A}^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\right)$$ (формулы Кристоффеля).

Тензор $R^i_{qk\ell}$ называется тензором Римана или римановой кривизной, где –

$$R^i_{qk\ell}=\frac{\partial\tilde{A}^i_{q\ell}}{\partial x^k}-\frac{\partial\tilde{A}^i_{qk}}{\partial x^\ell}+\tilde{A}^i_{pk}\,\tilde{A}^p_{q\ell}-\tilde{A}^i_{p\ell}\,\tilde{A}^p_{qk}.$$

Тензор кривизны обладает следующими свойствами:

1) $R^i_{qk\ell}=-R^i_{q\ell k}$;

2) для симметричной связности $-R^i_{qk\ell}+R^i_{k\ell q}+R^i_{\ell qk}=0$;

3) для связности, согласованной с метрикой g_{ik}, тензор $R_{iqk\ell}=g_{ip}R^p_{qk\ell}$ кососимметричен по индексам $i,q:R_{iqk\ell}=-R_{qik\ell}$;

4) для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ik}, имеется симметрия $R_{iqk\ell}=R_{k\ell iq}$.

Известно, что $df=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ – дифференциал функции. Если задана замена $x^i=x^i\left(x^{1'},...,x^{n'}\right)$, то $dx^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}dx^{i'},df=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)dx^{i'}=\dfrac{\partial f}{\partial x^{i'}}dx^{i'}$, т. е. выражение df инвариантно относительно замен координат.

Аналогично, если любому ковектору T_i поставить в соответствие выражение $T_i dx^i$ (дифференциальную форму), то это выражение инвариантно относительно замены координат. Базисные координатные поля e^i преобразуются по закону $e^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}e^{i'},T_ie^i=T_{i'}e^{i'}$. Базисные ковекторы e^i преобразуются по тому же закону, что и $dx^i : e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'} \leftrightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$, $e^i \leftrightarrow dx^i$, $e^{i'} \leftrightarrow dx^{i'}$. Можно сказать, что символы dx^i – это базисные ковекторы e^i. Дифференциальная форма $T_i dx^i$ соответствует разложению $T_i e^i$ ковектора по базису. Разложение симметрического тензора типа (0, 2) g_{ij} по базису $dx^i\, dx^j$ имеет вид $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$.

Для кососимметрических тензоров часто используется язык дифференциальных форм. Базис в пространстве таких тензоров состоит из элементов $dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_k}, i_1 < \ldots < i_k$, где $dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{\sigma(i_1 \ldots\ldots e^{ik})}$. Для кососимметрического тензора $T_{i_1 \ldots i_k}$ имеем соответствующую дифференциальную форму $T_{i_1 \ldots i_k}\, e^{i_1} \ldots e^{i_k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ кососимметрично относительно перестановок индексов $dx^{\sigma(i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k)}$.

Каждый кососимметрический тензор $T_{i_1 \ldots i_n}$ в n-мерном пространстве определяется одним числом $T_{12\ldots n}$, и мы здесь имеем единственный базисный тензор $dx^{\,i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\,i_n}$. Выражение $\sqrt{|g|}\, dx^{\,i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\,i_n}$ называется элементом объема, задаваемым метрикой g_{ij}, где $g = \det(g_{ij})$. Он является тензором относительно таких замен координат, что $I = \det A = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) > 0$.

Определим внешнее произведение двух дифференциальных форм ранга p и q соответственно. Пусть

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} T_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \quad \omega_2 = \sum_{j_1 < \ldots < j_q} S_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Определим форму ω ранга $(p+q)$ $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{k_1 < \ldots < k_{p+q}} R_{k_1 \ldots k_{p+q}} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{p+q}}$, полагая $R_{k_1 \ldots k_{p+q}} = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{p!q!} T_{\sigma(k_1 \ldots k_p} . S_{k_{p+1} \ldots k_{p+q})}$. Внешнее произведение дифференциальных форм – билинейная ассоциативная операция, причем $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^p \omega_1 \wedge \omega_2$, если ω_1 – форма ранга p, ω_2 – ранга q.

Определим форму $d\omega$ степени $k+1$, полагая $d\omega = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1 < \ldots < i_k}} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где тензору $T_{i_1 \ldots i_k}$ соответствует форма $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ и имеют место тождества:

1) $d\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_{q+1}} (dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}$;

2) $d\left(\omega_1 \wedge \omega_2\right) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + \left(-1\right)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, где ω_1, ω_2 – дифференциальные формы степеней p и q соответственно;

3) $d\left(d\omega\right) = 0$.

Определим операцию ограничения тензора типа $\left(0, k\right)$ на поверхность. Для поверхности $x^i = x^i\left(z^1, ..., z^k\right)$ рассмотрим выражение $\sum\limits_{i_1 < ... < i_k} T_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ...$ $... \wedge dx^{i_k}$, где $T_{i_1 ... i_k}\left(x(z)\right)$ выражено через $z^1, ..., z^k$ в точках поверхности и $dx^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial z^k} dz^k$. В точках поверхности $x = x(z)$ имеем $\sum\limits_{i_1 < ... < i_k} T_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} = \sum\limits_{i_1 < ... < i_k} I^{i_1 ... i_k}_{12 ... k} T_{i_1 ... i_k} dz^1 \wedge ... \wedge dz^k$, где $I^{i_1 ... i_k}_{12 ... k}$ – минор матрицы $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$. Это выражение называется ограничением кососимметрического тензора $T_{i_1 ... i_k}$ на поверхность $x = x(z)$. Это тензор k-го ранга в k-мерном пространстве.

Обычный кратный интеграл от ограничения $\int\limits_U ... \int \left(\sum\limits_{i_1 < ... < i_k} T_{i_1 ... i_k} I^{i_1 ... i_k}_{1 ... k} \right) dz^1 \wedge ... \wedge dz^k$ тензора $T_{i_1 ... i_k}$ по области U на поверхности называется интегралом от кососимметрического тензорного поля $T_{i_1 ... i_k}$, заданного в n-мерном пространстве по области U на любой поверхности $x^i = x^i\left(z^1, ..., z^k\right)$, $i = 1, ..., n$.

Для любой дифференциальной формы $T = \sum\limits_{i_1 < ... < i_k} T_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ с гладкими коэффициентами $T_{i_1 ... i_k}$, любой гладкой поверхности $x^i\left(z^1, ..., z^k\right)$ и ограниченной области U на ней с гладкой границей *Г*, состоящей из одного куска, имеет место формула (общая формула Стокса): $\pm \int\limits_{\tilde{A}} T = \int\limits_U dT$.

Формула Грина: $\int\limits_{\tilde{A}} T_\alpha \dfrac{dx^\alpha}{dt} dt = \iint\limits_U \left(\dfrac{\partial T_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial T_2}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2$ или

$$\int\limits_{\tilde{A}} \left(T_1 dx + T_2 dy\right) = \iint\limits_U \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

Формула Гаусса – Остроградского:

$$\iint\limits_{\tilde{A}} \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iiint\limits_U \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= \iiint\limits_U \left(divT\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint\limits_{\tilde{A}} < T, \vec{n} > d\sigma = \iint\limits_{\tilde{A}} < T, \vec{n} > \sqrt{|g|} dz^1 \wedge dz^2,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности *Г*, а z^1, z^2 – координаты на поверхности.

Формула Стокса:

$$\oint_{\Gamma} T_\alpha dx^\alpha = \iint_U < rot T, \vec{n} > \sqrt{|g|} dz^1 \wedge dz^2 = \iint_U \left(\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2} \right) dx^2 \wedge dx^3 \right),$$

где U – область на поверхности $x^i = x^i\left(z^1, z^2\right)$, $i = 1, 2, 3$; Γ – граница этой области.

Дифференцируемым n-мерным многообразием называется произвольное множество точек M, в котором введена следующая структура:

– множество M представлено в виде объединения конечного или счетного числа областей U_q n-мерного евклидова пространства, $M = \bigcup_q U_q$;

– в каждой области U_q заданы координаты $\left(x_q^\alpha\right)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, называемые локальными координатами. Сами области U_q при этом называются координатными окрестностями или картами.

Касательным вектором к многообразию M в произвольной точке x называется вектор, записываемый в системе локальных координат $\left(x_q^\alpha\right)$ набором чисел ξ_q^α; записи одного и того же вектора в разных системах локальных координат, содержащих эту точку, связаны формулой $\xi_p^\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta} \right)_x \xi_q^\beta$.

Римановой (псевдоримановой) метрикой на многообразии M называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат. В каждой области U_p действия локальных координат $\left(x_p^\alpha\right)$ метрика задается симметрической матрицей $g_{\alpha\beta}^{(p)}\left(x_p^1, \ldots, x_p^n\right)$, $\left|\vec{\xi}\right|^2 = g_{\alpha\beta}^{(p)} \xi_p^\alpha \xi_p^\beta$ для любого вектора $\vec{\xi}$ в точке x (по повторяющимся индексам α, β подразумеваем суммирование). Метрика задает скалярное произведение двух векторов в одной и той же точке: $< \vec{\xi}, \vec{\eta} > = \vec{\xi}\,\vec{\eta} = g_{\alpha\beta}^{(p)} \xi_p^\alpha \eta_p^\beta$.

Тензор типа (k, ℓ) на многообразии задается в каждой системе локальных координат $\left(x_p^\alpha\right)$ набором функций ${}^{(p)}T_{j_1 \ldots j_\ell}^{i_1 \ldots i_k}(x)$. В других локальных координатах $\left(x_q^\beta\right)$, содержащих точку x, этот же тензор задается величинами ${}^{(q)}T_{t_1 \ldots t_\ell}^{s_1 \ldots s_k}(x)$, причем ${}^{(q)}T_{t_1 \ldots t_\ell}^{s_1 \ldots s_k}(x) = \frac{\partial x_q^{s_1}}{\partial x_p^{i_p}} \cdots \frac{\partial x_q^{s_k}}{\partial x_p^{i_k}} \frac{\partial x_p^{j_1}}{\partial x_q^{t_1}} \cdots \frac{\partial x_p^{j_\ell}}{\partial x_q^{t_\ell}} \, {}^{(p)}T_{j_1 \ldots j_\ell}^{i_1 \ldots i_k}(x)$.

Все утверждения, сформулированные для тензоров в области n-мерного пространства, переносятся на тензоры на многообразии.

Литература

1 Дубровин, В. А. Современная геометрия [Текст] : Методы и приложения: учебное пособие для студентов университетов / Б. А. Дубравин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : Наука, 1979. – 759 с.

2 Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для студентов механико-математических специальностей университетов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – М. : Изд-во МГУ, 1980. – 439 с.

3 Дифференциальная геометрия [Текст] : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / И. В. Белько [и др.]. – Мн. : Изд-во БГУ, 1982. – 255 с.

4 Сизый, С. В. Лекции по дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для математических специальностей / С. В. Сизый. – Екатеринбург : Изд-во Уральского госуниверситета, 2005. – 331 с.

5 Норден, А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для университетов и педагогических институтов / А. П. Норден. – М. : Физматгиз, 1958. – 224 с.

6 Щербаков, Р. Н. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для университетов и techинститутов / Р. Н. Щербаков, А. А. Лучинин. – Томск : Изд-во Томского университета, 1974. – 248 с.

7 Мищенко, А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебное пособие для студентов механико-математических специальностей университетов / А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – 184 с.

8 Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии [Текст] : учебное пособие для математических специальностей университетов и techинститутов / В. Т. Воднев [и др.]. – Мн. : Вышэйшая школа, 1970. – 374 с.

9 Васильев, А. М. Дифференциальная геометрия [Текст] : методические указания для студентов-заочников математических факультетов университетов / А. М. Васильев, Ю. П. Соловьев. – М. : МГУ, 1981. – 120 с.

10 Селькин, М. В. Лабораторный практикум по курсу «Дифференциальная геометрия» [Текст] : для студентов математических факультетов / М. В. Селькин, В. Г. Сафонов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 1994. – 67 с.