УДК 512.548

# ЦИКЛИЧЕСКИЕ *n*-АРНЫЕ ГРУППЫ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

**А.М. Гальмак**[1], **Н.А. Щучкин**[2]

[1]*Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь*
[2]*Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия*

# CYCLIC *n*-ARY GROUPS AND THEIR GENERALIZATIONS

**A.M. Gal'mak**[1], **N.A. Shchuchkin**[2]

[1]*Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus*
[2]*Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, Russia*

Для любого делителя $m-1$ натурального числа $n-1$ определяются и изучаются $m$-полуциклические $n$-арные группы. Класс всех $m$-полуциклических $n$-арных групп входит в класс всех $m$-полуабелевых $n$-арных групп, которые были определены Э. Постом. Кроме того, класс всех $m$-полуциклических $n$-арных групп включает в себя класс всех циклических $n$-арных групп и входит в класс всех полуциклических $n$-арных групп. Установлены новый критерий цикличности $n$-арной группы и критерий $m$-полуцикличности $n$-арной группы, сформулированные с помощью одной из подгрупп универсальной обертывающей группы Поста.

***Ключевые слова**: n-арная группа, циклическая группа, полуциклическая группа, m-полуциклическая группа.*

The authors define and study $m$-semicyclic $n$-ary groups for any divisor $m-1$ of natural number $n-1$. The class of all $m$-semicyclic $n$-ary groups is included in the class of all $m$-semiabelian $n$-ary groups identified by E. Post. Moreover, the class of all $m$-semicyclic $n$-ary groups includes the class of all cyclic $n$-ary groups and belongs to the class of all semicyclic $n$-ary groups. New criteria of cyclicity for $n$-ary group and for $m$-semicyclicity of $n$-ary group formulated by one of the subgroups of the universal covering group of Post are determined.

***Keywords**: n-ary group, cyclic group, semicyclic group, m-semicyclic group.*

***Введение***

Пусть $< A, [\ ] >$ – $n$-арная группа, $F_A$ – свободная полугруппа над алфавитом $A$, $\theta_A$ – отношение эквивалентности Поста [1], определенное на $F_A$ по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\gamma$ и $\delta$ из $F_A$ такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что $\theta_A$ – конгруэнция на полугруппе $F_A$, а полугруппа $A^* = F_A / \theta_A$ является группой.

Для всякого $i = 1, \ldots, n-1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta_A(\alpha) \mid \theta_A(\alpha) \in A^*, l(\alpha) = i\},$$

где $\theta_A(\alpha)$ – класс конгруэнции $\theta_A$, содержащий последовательность $\alpha$; $l(\alpha)$ – длина последовательности $\alpha$. В частности,

$$A' = \{\theta_A(a) \mid a \in A\},$$

$$A'' = \{\theta_A(ab) \mid a, b \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ будем обозначать распространенным в литературе по $n$-арным группам символом $A_0$, то есть $A_0 = A^{(n-1)}$.

Справедливы равенства (см., например, [2, предложение 1.3.7])

$$A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^{(i)},$$

$$A^{(i)} \cap A^{(j)} = \varnothing,\ i, j \in \{1, \ldots, n-1\},\ i \neq j.$$

Если зафиксировать $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и элементы $a_1, \ldots, a_{n-i} \in A$, то несложно убедиться в справедливости ещё одного равенства

$$A' = A^{(i)}\theta_A(a_1 \ldots a_{n-i}). \tag{0.1}$$

***Замечание* 0.1.** Если $n = k(m-1)+1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ является $(k+1)$-арной группой относительно $(k+1)$-арной операции

$$[\theta_A(\alpha_1)\theta_A(\alpha_2) \ldots \theta_A(\alpha_{k+1})]_{k+1} =$$
$$= \theta_A(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}),\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in A^{(m-1)}.$$

Если $m = 2$, то $k = n-1$ и получаем $n$-арную операцию

$$[\theta_A(a_1)\theta_A(a_2) \ldots \theta_A(a_n)]_n = \theta_A(a_1a_2 \ldots a_n) =$$
$$= \theta_A([a_1a_2 \ldots a_n]),\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

При этом, как несложно установить, отображение $\varphi\colon a \to \theta_A(a)$ является изоморфизмом $n$-арной группы $< A, [\ ] >$ на $n$-арную группу $< A', [\ ]_n >$.

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$[\theta_A(a_1a_2 \ldots a_{n-1})\theta_A(b_1b_2 \ldots b_{n-1})]_2 =$$
$$= \theta_A(a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_1b_2 \ldots b_{n-1}) =$$
$$= \theta_A([a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_1]b_2 \ldots b_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A$. При этом группу $< A^{(n-1)} = A_0, [\ ]_2 >$ называют *соответствующей* группой для $n$-арной группы $< A, [\ ] >$ и для сокращения записей обозначают одним символом $A_0$.

Если $m - 1$ делит $n - 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то положим

$${}^{m}A = \{\theta_A(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) \text{ кратно } m - 1\}.$$

При $m = 2$ множество ${}^{m}A$ совпадает с универсальной обёртывающей группой Поста $A^*$, а при $m = n$ множество ${}^{m}A$ совпадает с соответствующей группой $A_0$:

$${}^{2}A = A^*,\ {}^{n}A = A_0.$$

### *1 Обобщение теоремы Поста о смежных классах*

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Поста о смежных классах.

***Теорема* 1.1** [3]. *Пусть* $< A, [\,] >$ *– n-арная группа*, $n = k(m - 1) + 1$. *Тогда*:

1) $A_0 \subseteq {}^{m}A \subseteq A^*$;

2) ${}^{m}A = \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}$;

3) ${}^{m}A$ *– инвариантная подгруппа группы* $A^*$;

4) *группа* ${}^{m}A$ *порождается* множеством $A^{(m-1)}$;

5) ${}^{m}A / A_0 = \{A^{(m-1)}, A^{(2(m-1))}, \ldots, A^{(k(m-1))} = A_0\}$ *– циклическая группа порядка k, порождаемая элементом* $A^{(m-1)}$;

6) $A^* / {}^{m}A$ *– циклическая группа порядка* $m - 1$.

Так как $A^{(i(m-1))} \bigcap A^{(j(m-1))} = \varnothing$ при $i \neq j$, то из 2) предыдущей теоремы вытекает

***Следствие* 1.1.** *Если* $n = k(m - 1) + 1$, $< A, [\,] >$ *– конечная n-арная группа порядка* $\gamma$, *то порядок группы* ${}^{m}A$ *равен* $k\gamma$.

***Замечание* 1.1.** Если в теореме 1.1 положить $m = 2$, то тогда $k = n - 1$, ${}^{m}A = A^*$, а утверждения 1) – 6) примут следующий вид:

1) $A_0 \subseteq A^*$;

2) $A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^{(i)}$;

3) $A^*$ *– инвариантная подгруппа группы* $A^*$;

4) *группа* $A^*$ *порождается* множеством $A'$;

5) $A^* / A_0 = \{A', A'', \ldots, A^{(n-1)} = A_0\}$ *– циклическая группа порядка* $n - 1$, *порождаемая элементом* $A'$;

6) $A^* / A^*$ *– циклическая группа порядка* 1.

Утверждения 3 и 6 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах ([1], [2, теорема 1.3.2]).

***Замечание* 1.2.** Если в теореме 1.1 положить $m = n$, то тогда $k = 1$, ${}^{m}A = A_0$ , а утверждения 1) – 6) примут следующий вид:

1) $A_0 \subseteq A^*$;

2) $A_0 = A_0$;

3) $A_0$ *– инвариантная подгруппа группы* $A^*$;

4) *группа* $A_0$ *порождается* множеством $A_0$;

5) $A_0 / A_0$ *– циклическая группа порядка* 1;

6) $A^* / A_0$ *– циклическая группа порядка* $n - 1$.

Утверждения 2, 4 и 5 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах.

Таким образом, теорема 1.1 является обобщением теоремы Поста о смежных классах. При этом утверждение последней о том, что $A^* / A_0$ – циклическая группа порядка $n - 1$, может быть получено из теоремы 1.1 двояко: из утверждения 5) при $m = 2$; из утверждения 6) при $m = n$. Вообще говоря, указанное обобщение является формальным, так как утверждения теоремы 1.1 могут быть извлечены из теоремы Поста о смежных классах. Например, цикличность группы ${}^{m}A / A_0$ вытекает из того, что ${}^{m}A / A_0$ – подгруппа циклической группы $A^* / A_0$; а цикличность группы $A^* / {}^{m}A$ вытекает из цикличности группы $A^* / A_0$ и изоморфизма

$$(A^* / A_0) / ({}^{m}A / A_0) \simeq A^* / {}^{m}A.$$

Используя утверждения 3) и 4) предложения 1.3.7 [2], несложно получить разложения групп $A^*$ и ${}^{m}A$ на непересекающиеся смежные классы по подгруппам ${}^{m}A$ и $A_0$ соответственно.

***Предложение* 1.1.** *Пусть* $< A, [\,] >$ *– n-арная группа,* $n = k(m - 1) + 1$, $b \in A$. *Тогда*:

1) $$A^* = {}^{m}A + \theta_A(b)\,{}^{m}A + \theta_A^2(b)\,{}^{m}A + \ldots + \theta_A^{m-2}(b)\,{}^{m}A =$$
$$= {}^{m}A + {}^{m}A\theta_A(b) + {}^{m}A\,\theta_A^2(b) + \ldots + {}^{m}A\,\theta_A^{m-2}(b);$$

2) $${}^{m}A = A_0 + \theta_A(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})A_0 + \theta_A^2(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})A_0 + \ldots + \theta_A^{k-1}(\underbrace{b\ldots b}_{m-1})A_0 =$$
$$= A_0 + A_0\theta_A(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}) + A_0\,\theta_A^2(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}) + \ldots + A_0\,\theta_A^{k-1}(\underbrace{b\ldots b}_{m-1}).$$

Известное разложение Поста ([1], [2, предложение 1.4.6])

$$A^* = A_0 + \theta_A(b)A_0 + \theta_A^2(b)A_0 + \ldots + \theta_A^{n-2}(b)A_0 =$$
$$= A_0 + A_0\theta_A(b) + A_0\,\theta_A^2(b) + \ldots + A_0\,\theta_A^{n-2}(b)$$

может быть получено либо из 1) предыдущего предложения при $m = n$, либо из 2) этого же предложения при $m = 2$.

***Замечание* 1.3.** Если $n = k(m - 1) + 1$, то несложно установить, что

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)}u^{i-1} = u^{i-1}A^{(m-1)}$$

для любого $u \in A^{(m-1)}$, $i = 1, \ldots, k$.

Согласно Э. Посту [1], группа $G$ называется *обертывающей* для $n$-арной группы $< A, [\,] >$, если:

1) группа $G$ порождается множеством $A$;

2) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ бинарная и $n$-арная операции связаны равенством

$$[x_1x_2 \ldots x_n] = x_1x_2 \ldots x_n.$$

Любая обертывающая группа $G$ $n$-арной группы $< A, [\,] >$ является гомоморфным образом универсальной обёртывающей группы Поста $A^*$ ([1], [2, теорема 1.4.9]).

***Замечание*** **1.4.** Из утверждения 4) теоремы 1.1 и определения $(k+1)$-арной операции $[\ ]_{k+1}$ следует, что группа ${}^{m}A$ является обертывающей для $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$. Более того, группа ${}^{m}A$ изоморфна универсальной обёртывающей группе Поста $(A^{(m-1)})^*$ для $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$.

Группа $A^*$ из теоремы Поста о смежных классах и её подгруппа $A_0$ используются при изучении $n$-арных групп. Яркими примерами эффективного использования этих групп являются описание В.А. Артамоновым свободных $n$-арных групп [4] и шрайеровых многообразий $n$-арных групп [5], а также разработанная Э. Постом [1] и С.А. Русаковым [6] силовская теория $n$-арных групп. В следующих разделах будет показано, что при изучении $n$-арных групп с успехом может быть использована и группа ${}^{m}A$, частными случаями которой, как отмечалось в конце введения, являются как сама группа $A^*$, так и её подгруппа $A_0$.

### *2 Критерий m-полуабелевости n-арной группы*

Напомним, что $n$-арная группа $< A, [\ ] >$ называется *абелевой* [7], если в ней для любой подстановки $\sigma$ множества $\{1, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}].$$

$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ называется *полуабелевой* [7], если в ней выполняется тождество

$$[a a_2 \ldots a_{n-2} b] = [b a_2 \ldots a_{n-2} a].$$

Э. Пост объединил абелевость и полуабелевость общим понятием, назвав [1] $n$-арную группу $< A, [\ ] >$ *$m$-полуабелевой*, если $m-1$ делит $n-1$ и

$$(a a_2 \ldots a_{m-2} b, b a_2 \ldots a_{m-2} a) \in \theta_A$$

для всех $a, a_2, \ldots, a_{m-2}, b \in A$.

Имеет место следующий критерий $m$-полуабелевости $n$-арной группы.

***Теорема*** **2.1** [3]. *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является $m$-полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^{m}A$ абелева.*

Полагая в теореме 2.1 $m = 2$, получим

***Следствие*** **2.1** [1]. *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является абелевой тогда и только тогда, когда её универсальная обертывающая группа Поста $A^*$ абелева.*

Полагая в теореме 2.1 $m = n$, получим

***Следствие*** **2.2** [1]. *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда её соответствующая группа $A_0$ абелева.*

При доказательстве теоремы 2.1 используется следующая лемма.

***Лемма*** **2.1.** *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является $m$-полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_{m-1} \in A$ последовательности*

$$a_1 \ldots a_{m-1} b_1 \ldots b_{m-1} \text{ и } b_1 \ldots b_{m-1} a_1 \ldots a_{m-1}$$

*эквивалентны.*

***Замечание*** **2.1.** Если $n = k(m-1)+1$, то непосредственным следствием леммы 2.1 является равносильность $m$-полуабелевости $n$-арной группы $< A, [\ ] >$ и абелевости $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ из замечания 0.1.

### *3 Циклические и полуциклические n-арные группы*

Вначале напомним определения полиадической степени и циклической $n$-арной группы.

Для любого целого $s$ и любого элемента $a$ $n$-арной $(n \geq 3)$ группы $< A, [\ ] >$ *$s$-ая $n$-адическая степень* $a^{[s]}$ этого элемента определяется следующим образом [1]:

$$a^{[s]} = a, \text{ если } s = 0;$$

$$a^{[s]} = [\underbrace{a \ldots a}_{s(n-1)+1}], \text{ если } s > 0;$$

$$a^{[s]} \text{ – решение уравнения } [x \underbrace{a \ldots a}_{-s(n-1)}] = a, \text{ если } s < 0.$$

Заметим, что использовать квадратные скобки в обозначении полиадической степени предложил Э. Пост. Эти скобки не связаны с символом $n$-арной операции.

$n$-Арную группу $< A, [\ ] >$, порождённую одноэлементным множеством $\{a\}$, называют *циклической* $n$-арной группой, порождённой элементом $a$ [1]. Сам элемент $a$ в этом случае называется *порождающим*.

Циклическая $n$-арная группа, порождённая элементом $a$, состоит из всех полиадических степеней этого элемента. Если $< A, [\ ] >$ – конечная порядка $\gamma$, то

$$A = \{a^{[0]}, a^{[1]}, a^{[2]}, \ldots, a^{[\gamma-1]}\}.$$

Если же $< A, [\ ] >$ – бесконечная, то

$$A = \{a^{[s]} \mid s \text{ – целое}\}.$$

Более подробную информацию о циклических $n$-арных группах можно найти в [1], [2]. Здесь же мы сформулируем и докажем новый критерий цикличности $n$-арной группы.

***Лемма*** **3.1.** *Пусть $n = k(m-1)+1$, $< A, [\ ] >$ – $n$-арная группа, у которой группа ${}^{m}A$ является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$, где $a_1, \ldots, a_{m-1} \in A$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, k$ верно:*

1) *если $< A, [\ ] >$ – конечная порядка $\gamma$, то*

$$A^{(i(m-1))} = \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \ldots, \gamma-1\};$$

2) *если $< A, [\ ] >$ – бесконечная, то*

$$A^{(i(m-1))} = \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r \text{ – целое}\}.$$

***Доказательство.*** 1) Положим

$$V_i = \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \ldots, \gamma-1\}.$$

Ясно, что

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \bigcup_{i=1}^{k} \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \ldots, \gamma-1\} =$$

$$= \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid i = 1, \ldots, k, r = 0, 1, \ldots, \gamma-1\} =$$

$$= \{\, \theta_A^s(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid s = 1, \ldots, \gamma k\},$$

то есть

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \{\, \theta_A^s(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid s = 1, \ldots, \gamma k\}.$$

А так как циклическая группа ${}^mA$ порождается элементом $\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$ и имеет порядок $\gamma k$, то из последнего равенства следует, что $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = {}^mA$, откуда и из утверждения 2) теоремы 1.1 следует

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}, \qquad (3.1)$$

где для любых $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$ верно

$$A^{(i(m-1))} \cap A^{(j(m-1))} = \varnothing. \qquad (3.2)$$

Так как

$$\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) = \theta_A\, \underbrace{a_1 \ldots a_{m-1} \ldots a_1 \ldots a_{m-1}}_{rk+i},$$

а длина последовательности $\underbrace{a_1 \ldots a_{m-1} \ldots a_1 \ldots a_{m-1}}_{rk+i}$ равна

$$(rk + i)(m - 1) = rk(m - 1) + i(m - 1) =$$
$$= r(n - 1) + i(m - 1),$$

то

$$V_i \subseteq A^{(i(m-1))}. \qquad (3.3)$$

Предположим, что $V_i \neq A^{(i(m-1))}$, то есть существует элемент $u \in A^{(i(m-1))}$ такой, что $u \notin V_i$. Тогда $u \in \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))}$, а из (3.2) и (3.3) вытекает $u \notin \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, что противоречит (3.1). Таким образом, $A^{(i(m-1))} = V_i$, то есть верно равенство из 1).

2) Доказательство проводится аналогично с заменой условия $r = 0, 1, \ldots, \gamma - 1$ условием $r$ – целое. Лемма доказана.

***Лемма* 3.2** [2]. *Для любого элемента a n-арной группы* $< A, [\,] >$ *и любого целого s справедливо равенство* $\theta_A(a^{[s]}) = (\theta_A(a))^{s(n-1)+1}$.

Теперь мы можем сформулировать новый критерий цикличности $n$-арной группы.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $< A, [\,] >$ *– n-арная группа. Тогда*:

1) *если* $< A, [\,] >$ *– циклическая, порождённая элементом a, то для любого m такого, что* $n = k(m - 1) + 1$, *группа* ${}^mA$ *является циклической, порождённой элементом* $\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1})$;

2) *если для некоторого m такого, что* $n = k(m - 1) + 1$, *группа* ${}^mA$ *является циклической, порождённой элементом* $\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1})$, *то* $< A, [\,] >$ *– циклическая n-арная группа, порождённая элементом a*.

***Доказательство.*** Сразу же заметим, что $n$-арная группа $< A, [\,] >$ и группа ${}^mA$ конечны или бесконечны одновременно.

1) Так как $A = \{a^{[r]} \mid r \in Z\}$, то, ввиду предложения 1.3.7 [2],

$$A^{(i(m-1))} = \{\theta_A(a^{[r]}\, \underbrace{a \ldots a}_{i(m-1)-1}) \mid r \in Z\} =$$
$$= \{\theta_A(a^{[r]})\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{i(m-1)-1}) \mid r \in Z\},$$

откуда, учитывая лемму 3.2 и равенство $n = k(m - 1) + 1$, имеем

$$A^{(i(m-1))} = \{(\theta_A(a))^{r(n-1)+1}(\theta_A(a))^{i(m-1)-1}) \mid r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_A(a))^{rk(m-1)+1}(\theta_A(a))^{i(m-1)-1}) \mid r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_A(a))^{(rk+i)(m-1)} \mid r \in Z\} =$$
$$= \{((\theta_A(a)^{m-1})^{rk+i} \mid r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z\},$$

то есть

$$A^{(i(m-1))} = \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z\}.$$

Тогда по теореме 1.1

$${}^mA = \bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))} = \bigcup_{i=1}^{k} \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid i = 1, \ldots, k, r \in Z\} =$$
$$= \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{s} \mid s \in Z\},$$

то есть ${}^mA = \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{s} \mid s \in Z\}$. Следовательно, ${}^mA$ – циклическая группа, порождённая элементом $\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1})$.

2) По лемме 3.1

$$A^{(m-1)} = \{\, \theta_A^{rk+1}(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}) \mid r - \textit{целое}\}.$$

Тогда, используя равенство (0.1) при $i = m - 1$, $a_1, \ldots, a_{n-m+1} = a$, а также лемму 3.2, получим

$$A' = A^{(m-1)}\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}) =$$
$$= \{\, \theta_A^{rk+1}(\underbrace{a \ldots a}_{m-1})\, \theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{n-m+1}) \mid r - \textit{целое}\} =$$
$$= \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{rk+1}\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{(k-1)(m-1)+1}) \mid r - \textit{целое}\} =$$
$$= \{(\theta_A(\underbrace{a \ldots a}_{m-1}))^{rk+1}(\theta_A(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \textit{целое}\} =$$
$$= \{(\theta_A(a))^{(rk+1)(m-1)}(\theta_A(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \textit{целое}\} =$$
$$= \{(\theta_A(a))^{(r+1)k(m-1)+1} \mid r - \textit{целое}\} =$$
$$= \{(\theta_A(a))^{(r+1)(n-1)+1} \mid r - \textit{целое}\} =$$
$$= \{(\theta_A(a^{[r+1]}) \mid r - \textit{целое}\}.$$

Таким образом,

$$A' = \{(\theta_A(a^{[s]}) \mid s - \textit{целое}\}.$$

А так как $A' = \{\theta_A(b) \mid b \in A\}$, то $A = \{a^{[s]} \mid s$ – *целое*$\}$. Следовательно, $< A, [\,] >$ – циклическая $n$-арная группа, порождённая элементом $a$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.1 $m = 2$, получим

***Следствие* 3.1** ([1], [2, теорема 2.5.22]). *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является циклической с порождающим элементом $a$ тогда и только тогда, когда её универсальная обертывающая группа Поста $A^*$ – циклическая с порождающим элементом $\theta_A(a)$.*

Напомним, что $n$-арная группа $< A, [\ ] >$ называется *полуциклической* [2], если её соответствующая группа $A_0$ циклическая. Так как для всякой $n$-арной группы $< A, [\ ] >$ мощности множеств $A$ и $A_0$ совпадают, то *любая $n$-арная группа простого порядка является полуциклической*. Подробному изучению полуциклических $n$-арных групп посвящена статья [8].

Полагая в теореме 3.1 $m = n$, получим

***Следствие* 3.2** [2, теорема 2.5.23]. *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является циклической с порождающим элементом $a$ тогда и только тогда, когда её соответствующая группа $A_0$ – циклическая с порождающим элементом $\theta_A(\underbrace{a\ldots a}_{n-1})$.*

Сформулируем ещё одно следствие из теоремы 3.1.

***Следствие* 3.3.** *Пусть $< A, [\ ] >$ – $n$-арная группа. Если для некоторого элемента $a \in A$ и некоторого $m$ такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^mA$ порождается элементом $\theta_A(\underbrace{a\ldots a}_{m-1})$, то универсальная обертывающая группа Поста $A^*$ порождается элементом $\theta_A(a)$.*

### 4 *m*-Полуциклические *n*-арные группы

Как уже отмечалось, подгруппа ${}^mA$ группы $A^*$, как и её частные случаи – сама группа $A^*$ и её подгруппа $A_0$, могут быть использованы при изучении $n$-арных групп. Одним из примеров такого использования может служить теорема 2.1. Продемонстрируем это также на примере $m$-полуциклических $n$-арных групп, которые мы определим по аналогии с $m$-полуабелевыми $n$-арными группами, отталкиваясь от критерия $m$-полуабелевости $n$-арной группы, сформулированного в теореме 2.1.

***Определение* 4.1.** Пусть $m - 1$ делит $n - 1$. $n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ называется *$m$-полуциклической*, если существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_{m-1} \in A$, что группа ${}^mA$ является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$. Последовательность $a_1 \ldots a_{m-1}$ в этом случае называется *порождающей* для $m$-полуциклической $n$-арной группы $< A, [\ ] >$.

Так как ${}^2A = A^*$, то, согласно следствию 3.1, циклические $n$-арные группы – это в точности 2-полуциклические $n$-арные группы.

Так как ${}^nA = A_0$, то полуциклические $n$-арные группы – это в точности $n$-полуциклические $n$-арные группы.

Таким образом, циклические и полуциклические $n$-арные группы являются частными случаями $m$-полуциклических $n$-арных групп при $m = 2$ и $m = n$.

Имеет место

***Предложение* 4.1.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *всякая циклическая $n$-арная группа является $m$-полуциклической*;

2) *всякая $m$-полуциклическая $n$-арная группа является полуциклической*;

3) *всякая $m$-полуциклическая $n$-арная группа является $m$-полуабелевой*.

*Доказательство.* 1) Если $< A, [\ ] >$ – циклическая $n$-арная группа, порождённая элементом $a$, то по теореме 3.1 группа ${}^mA$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a\ldots a}_{m-1})$. Тогда, согласно определению 4.1, $< A, [\ ] >$ – $m$-полуциклическая $n$-арная группа, порождённая последовательностью $\underbrace{a\ldots a}_{m-1}$.

2) Следует из включения $A_0 \subseteq {}^mA$.

3) Следует из теоремы 2.1. Предложение доказано.

***Пример* 4.1.** Пусть $< Z_2, [\ ] >$ – 7-арная группа, производная от циклической группы $Z_2 = \{1, a\}$ второго порядка с порождающим элементом $a$. Положим

$$u_i = \theta_A(\underbrace{1\ldots 1}_{i}),\ v_i = \theta_A(a\underbrace{1\ldots 1}_{i}),\ i = 1, \ldots, 6.$$

Тогда: универсальная обёртывающая группа Поста $Z_2^* = \{u_i, v_i \mid i = 1, \ldots, 6\}$ имеет порядок 12 и является объединением множеств

$$Z_2^{(i)} = \{u_i, v_i\},\ i = 1, \ldots, 6;$$

подгруппа ${}^3Z_2 = \{u_2, u_4, u_6, v_2, v_4, v_6\}$ группы $Z_2^*$ имеет порядок 6 и является объединением множеств $Z_2^{(2)}$, $Z_2^{(4)}$, $Z_2^{(6)}$. Так как

$$v_2^2 = u_4,\ v_2^3 = v_6,\ v_2^4 = u_2,\ v_2^5 = v_4,\ v_2^6 = u_6,$$

то ${}^3Z_2$ – циклическая группа с порождающим элементом $v_2 = \theta_A(a1)$. Следовательно, $< Z_2, [\ ] >$ – 3-полуциклическая 7-арная группа с порождающей последовательностью $a1$.

Так как

$$[\underbrace{1\ldots 1}_{7}] = 1,\ [\underbrace{a\ldots a}_{7}] = a,$$

то 7-арная группа $< Z_2, [\ ] >$ не является циклической.

Пример 4.1 показывает, что в общем случае класс всех $m$-полуциклических $n$-арных групп шире класса всех циклических $n$-арных групп.

***Пример* 4.2.** Пусть $B_3 = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечётных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$, $< B_3, [\ ] >$ – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе $S_3$. Положим

$$u_i = \theta_A(\underbrace{(12)\ldots(12)}_{i}),\ v_i = \theta_A((13)\ \underbrace{(12)\ldots(12)}_{i-1}),$$

$$w_i = \theta_A((23)\ \underbrace{(12)\ldots(12)}_{i-1}),\ i = 1, \ldots, 6.$$

Тогда: универсальная обёртывающая группа Поста $B_3^* = \{u_i, v_i, w_i \mid i = 1, \ldots, 6\}$ имеет порядок 18 и является объединением множеств $B_3^{(i)} = \{u_i, v_i, w_i\}$, $i = 1, \ldots, 6$; подгруппа ${}^3B_3 = \{u_2, u_4, u_6, v_2, v_4, v_6, w_2, w_4, w_6\}$ группы $B_3^*$ имеет порядок 9 и является объединением множеств $B_3^{(2)}$, $B_3^{(4)}$, $B_3^{(6)}$. Так как

$$u_2^2 = u_4,\ u_2^3 = u_6,\ u_2^4 = u_2,$$
$$v_2^2 = w_4,\ v_2^3 = u_6,\ v_2^4 = v_2,$$

то $\{u_2, u_4, u_6\}$ и $\{v_2, w_4, u_6\}$ – две циклические подгруппы третьего порядка группы ${}^3B_3$, которая по этой причине не является циклической. Следовательно, 7-арная группа $< B_3, [\ ] >$ не является 3-полуциклической. При этом $< B_3, [\ ] >$ как 7-арная группа простого порядка является полуциклической.

Пример 4.2 показывает, что в общем случае класс всех $m$-полуциклических $n$-арных групп уже класса всех полуциклических $n$-арных групп.

Критерий $m$-полуабелевости из замечания 2.1 наводит на мысль о существовании аналогичного критерия $m$-полуцикличности. Следующая теорема показывает, что это действительно так.

***Теорема* 4.1.** *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является конечной (бесконечной) $m$-полуциклической с порождающей последовательностью $a_1 \ldots a_{m-1}$ тогда и только тогда, когда $(k + 1)$-арная группа $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ – конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$.*

*Доказательство.* Сразу же заметим, что множества $A$ и $A^{(m-1)}$ равномощны.

Считаем вначале $< A, [\ ] >$ – конечная порядка $\gamma$.

*Необходимость*. Так как $< A, [\ ] >$ – $m$-полуциклическая $n$-арная группа с порождающей последовательностью $a_1 \ldots a_{m-1}$, то $m - 1$ делит $n - 1$, а группа ${}^mA$ является циклической, порождённой элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$.

Полагая в утверждении 1) леммы 3.1 $i = 1$, получим

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r = 0, 1, \ldots, \gamma - 1\}.$$

Для любого $r = 0, 1, \ldots, \gamma - 1$ имеем

$$v^{[0]} = v,$$
$$v^{[r]} = [\underbrace{v \ldots v}_{rk+1}]_{k+1} =$$
$$= [\underbrace{\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}) \ldots \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})}_{rk+1}]_{k+1} =$$
$$= \theta_A(\underbrace{a_1 \ldots a_{m-1} \ldots a_1 \ldots a_{m-1}}_{rk+1}) =$$
$$= \underbrace{\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}) \ldots \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})}_{rk+1} =$$
$$= (\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}))^{rk+1} = v^{rk+1},$$

то есть

$$v^{[0]} = v,\ v^{[1]} = v^{k+1},$$
$$v^{[2]} = v^{2k+1}, \ldots, v^{[\gamma-1]} = v^{(\gamma-1)k+1}. \tag{4.1}$$

В правых частях равенств из (4.1) стоят степени элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$, порождающего циклическую группу ${}^mA$. А так как порядки всех степеней в правых частях равенств из (4.1) не превосходят порядка $\gamma k$ группы ${}^mA$, то среди этих степеней нет одинаковых. Но тогда и среди стоящих в левых частях равенств из (4.1) полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$ $(k + 1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ также нет одинаковых элементов. Таким образом, множество

$$A^{(m-1)} = \{v, v^{k+1}, v^{2k+1}, \ldots, v^{(\gamma-1)k+1}\} =$$
$$= \{v^{[0]}, v^{[1]}, v^{[2]}, \ldots, v^{[\gamma-1]}\}$$

состоит из различных полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$. Следовательно, $(k + 1)$-арная группа $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ является циклической, порождённой элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$.

*Достаточность.* Так как $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ – конечная циклическая $(k + 1)$-арная группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$, то

$$A^{(m-1)} = \{v^{[0]}, v^{[1]}, v^{[2]}, \ldots, v^{[\gamma-1]}\},$$

откуда, ввиду (4.1), вытекает

$$A^{(m-1)} = \{v, v^{k+1}, v^{2k+1}, \ldots, v^{(\gamma-1)k+1}\}.$$

Тогда, используя замечание 1.3, получим

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)}v^{i-1} = \{v^i, v^{k+i}, v^{2k+i}, \ldots, v^{(\gamma-1)k+i}\}$$

для любого $i = 1, \ldots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{v^i, v^{k+i}, v^{2k+i}, \ldots, v^{(\gamma-1)k+i}\} = \{v^s \mid s = 1, \ldots, \gamma k\},$$

то из предыдущего равенства следует

$$\bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))} = \{v^s \mid s = 1, \ldots, \gamma k\}.$$

Следовательно, группа ${}^mA$ порождается элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$. Соответственно, $< A, [\ ] >$ – конечная $m$-полуциклическая, порожденная последовательностью $a_1 \ldots a_{m-1}$.

Считаем теперь $n$-арную группу $< A, [\ ] >$ бесконечной.

*Необходимость*. Снова ${}^mA$ – циклическая группа, порождённая элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$.

Полагая в утверждении 2) леммы 4.1 $i = 1$, получим

$$A^{(m-1)} = \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \ldots a_{m-1}) \mid r - \textit{целое}\}.$$

Так же, как и в конечном случае, получаются равенства

$$v^{[0]} = v,\ v^{[1]} = v^{k+1},\ v^{[2]} = v^{2k+1}, \ldots, v^{[r]} = v^{rk+1}, \ldots,$$

то есть $v^{[r]} = v^{rk+1}$ для любого целого $r \geq 0$.

Для целого $r < 0$ полиадическая степень $v^{[r]}$ элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$ является решением уравнения $[x\underbrace{v \ldots v}_{-rk}]_{k+1} = v$. Тогда последовательно получаем

$$[v^{[r]}\ \underbrace{\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}) \ldots \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})}_{-rk}]_{k+1} =$$
$$= \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}),$$

$$v^{[r]}\underbrace{\theta_A(a_1\ldots a_{m-1})\ldots\theta_A(a_1\ldots a_{m-1})}_{-rk} =$$

$$= \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}),$$

$$v^{[r]} = (\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}))^{rk+1},$$

то есть $v^{[r]} = v^{rk+1}$ для любого целого $r < 0$.

Таким образом,

$$v^{[r]} = v^{rk+1},\ r \text{ – целое}. \qquad (4.2)$$

В правых частях равенств из (4.2) стоят степени элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$, порождающего бесконечную циклическую группу ${}^mA$. Тогда среди стоящих в левых частях равенств из (4.2) полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$ нет одинаковых. Таким образом, множество

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r \text{ – целое}\} = \{v^{[r]} \mid r \text{ – целое}\}$$

состоит из различных полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$. Следовательно, $(k+1)$-арная группа $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ является бесконечной циклической, порождённой элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$.

*Достаточность* Так как $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ – бесконечная циклическая $(k+1)$-арная группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$, то

$$A^{(m-1)} = \{v^{[r]} \mid r \text{ – целое}\},$$

откуда, ввиду (4.2), вытекает

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r \text{ – целое}\}.$$

Тогда, используя замечание 1.3, получим

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)}v^{i-1} = \{v^{rk+i} \mid r \text{ – целое}\}$$

для любого $i = 1, \ldots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{v^{rk+i} \mid r \text{ – целое}\} = \{v^{s} \mid s \text{ – целое}\},$$

то из предыдущего равенства следует

$$\bigcup_{i=1}^{k} A^{(i(m-1))} = \{v^{s} \mid s \text{ – целое}\}.$$

Следовательно, бесконечная циклическая группа ${}^mA$ порождается элементом $v = \theta_A(a_1 \ldots a_{m-1})$. Соответственно, $< A, [\ ] >$ – бесконечная $m$-полуциклическая, порожденная последовательностью $a_1 \ldots a_{m-1}$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 4.1 $m = 2$, получим

***Следствие* 4.1.** *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является конечной (бесконечной) циклической, порожденной элементом $a$, тогда и только тогда, когда $n$-арная группа $< A', [\ ]_n >$ из замечания* 0.1 *– конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a)$.*

Заметим, что следствие 4.1 является также следствием изоморфизма $\varphi: a \to \theta_A(a)$ $n$-арной группы $< A, [\ ] >$ на $n$-арную группу $< A', [\ ]_n >$.

Полагая в теореме 4.1 $m = n$, получим

***Следствие* 4.2.** *$n$-Арная группа $< A, [\ ] >$ является конечной (бесконечной) полуциклической, порожденной последовательностью $a_1 \ldots a_{n-1}$, тогда и только тогда, когда группа $A_0$ – конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1})$.*

Как видим, следствие 4.2 равносильно определению $m$-полуциклической $n$-арной группы.

***Замечание* 4.1.** Если полуциклическая $n$-арная группа порождается последовательностью $\underbrace{a\ldots a}_{n-1}$, то по следствию 3.2 она является циклической, порожденной элементом $a$.

Приведём ещё один критерий $m$-полуцикличности $n$-арной группы. Для этого зафиксируем в $n$-арной группе $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1) + 1$, элементы $c_1, \ldots, c_{m-2}$ и определим на $A$ $(k+1)$-арную операцию $[\ ]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}}$ следующим образом:

$$[a_1a_2 \ldots a_{k+1}]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}} =$$

$$= [a_1c_1 \ldots c_{m-2}a_2c_1 \ldots c_{m-2} \ldots a_kc_1 \ldots c_{m-2}a_{k+1}].$$

Проведя соответствующие вычисления (см., например, [2]), можно убедиться в том, что $< A, [\ ]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}} >$ – $(k+1)$-арная группа. Этот результат может быть получен и как следствие изоморфизма из следующей леммы.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $n = k(m-1) + 1$, $< A, [\ ] >$ *– $n$-арная группа, $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$. Тогда $(k+1)$-арные группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ и $< A, [\ ]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}} >$ изморфны.*

*Доказательство.* Определим отображение $\tau: A^{(m-1)} \to A$ по правилу

$$\tau: \theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2}) \to a.$$

Ясно, что $\tau$ – биекция $A^{(m-1)}$ на $A$.

Для любых

$$\theta_A(a_1c_1 \ldots c_{m-2}), \ldots, \theta_A(a_{k+1}c_1 \ldots c_{m-2}) \in A^{(m-1)}$$

имеем

$$\tau([\theta_A(a_1c_1 \ldots c_{m-2}) \ldots \theta_A(a_{k+1}c_1 \ldots c_{m-2})]_{k+1}) =$$
$$= \tau(\theta_A([a_1c_1 \ldots c_{m-2} \ldots a_kc_1 \ldots c_{m-2}a_{k+1}]c_1 \ldots c_{m-2})) =$$
$$= [a_1c_1 \ldots c_{m-2} \ldots a_kc_1 \ldots c_{m-2}a_{k+1}] =$$
$$= [a_1a_2 \ldots a_{k+1}]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}} =$$
$$= [\tau(\theta_A(a_1c_1 \ldots c_{m-2}))\tau(\theta_A(a_2c_1 \ldots c_{m-2}))\ldots$$
$$\ldots \tau(\theta_A(a_{k+1}c_1 \ldots c_{m-2}))]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}},$$

то есть

$$\tau([\theta_A(a_1c_1 \ldots c_{m-2}) \ldots \theta_A(a_{k+1}c_1 \ldots c_{m-2})]_{k+1}) =$$
$$= [\tau(\theta_A(a_1c_1 \ldots c_{m-2})) \ldots$$
$$\ldots \tau(\theta_A(a_{k+1}c_1 \ldots c_{m-2}))]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1 и лемма 4.1 позволяют сформулировать следующий критерий $m$-полуцикличности $n$-арной группы.

**Теорема 4.2.** *Пусть* $n = k(m-1) + 1$, $< A, [\ ] >$ *– $n$-арная группа. Тогда:*

1) *если $< A, [\ ] >$ – $m$-полуциклическая с порождающей последовательностью $a_1 \ldots a_{m-1}$, то для любых $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$-арная группа $< A, [\ ]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}} >$ – циклическая с порождающим элементом $a$, который однозначно*

*определяется из условия*

$$\theta_A(a_1 \ldots a_{m-1}) = \theta_A(ac_1 \ldots c_{m-2});$$

2) *если для некоторых* $c_1, \ldots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$*-арная группа* $< A, [\ ]_{k+1,\, c_1 \ldots c_{m-2}} >$ *– циклическая с порождающим элементом* $a$, *то* $< A, [\ ] >$ *–* $m$*-полуциклическая с порождающей последовательностью* $ac_1 \ldots c_{m-2}$.

При $m = 2$ оба утверждения теоремы 4.2 тривиальны.

Полагая в теореме 4.2 $m = n$, получим

***Следствие* 4.3.** *Пусть* $< A, [\ ] >$ *–* $n$*-арная группа. Тогда*:

1) *если* $< A, [\ ] >$ *– полуциклическая с порождающей последовательностью* $a_1 \ldots a_{n-1}$, *то для любых* $c_1, \ldots, c_{n-2} \in A$ *группа* $< A, [\ ]_{2,\, c_1 \ldots c_{n-2}} >$ *– циклическая с порождающим элементом* $a$, *который однозначно определяется из условия* $\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) = \theta_A(ac_1 \ldots c_{n-2})$;

2) *если для некоторых* $c_1, \ldots, c_{n-2} \in A$ *группа* $< A, [\ ]_{2,\, c_1 \ldots c_{n-2}} >$ *– циклическая с порождающим элементом* $a$, *то* $n$*-арная группа* $< A, [\ ] >$ *– полуциклическая с порождающей последовательностью* $ac_1 \ldots c_{n-2}$.

***Замечание* 4.2.** Для обозначения операции $[\ ]_{2,\, c_1 \ldots c_{n-2}}$ используется также любой из символов © или $\circ_c$ из теоремы Поста – Глускина – Хоссу [2], [9], где $cc_1 \ldots c_{n-2}$ – нейтральная последовательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

2. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

3. *Гальмак*, *А.М.* К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // XI Междунар конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тез. докл., Саратов, 10–16 сент. 2012. – С. 39–40.

4. *Артамонов*, *В.А.* Свободные *n*-группы / В.А. Артамонов // Мат. заметки. – 1970. – Т. 8, № 4. – С. 499–507.

5. *Артамонов*, *В.А.* О шрайеровых многообразиях *n*-групп и *n*-полугрупп / В.А. Артамонов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1979. – Вып. 5. – С. 193–202.

6. *Русаков*, С.А. Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

8. *Щучкин*, *Н.А.* Полуциклические *n*-арные группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – № 3 (54). – С. 186–194.

9. *Гальмак*, *А.М.* О теореме Поста – Глускина – Хоссу / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьёв // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 55–60.

*Поступила в редакцию 10.07.13.*