

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ  $ca$ - $\mathfrak{F}$  ГРУППАХ

Е.Н. Мысловец

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON FINITE  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -GROUPS

E.N. Myslovets

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Конечная группа  $G$  называется  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -группой, если каждый ее абелевый главный фактор  $\mathfrak{F}$ -централен, а каждый неабелевый главный фактор является простой группой. Установлено, что класс всех  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -групп образует композиционную формацию. Исследованы свойства произведений нормальных  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -подгрупп конечных групп.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -группа, композиционная формация, радикальная формация, полурадикальная формация.

Let  $\mathfrak{F}$  be a class of groups. A finite group  $G$  is called a  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -group if its every abelian chief factor of  $G$  is  $\mathfrak{F}$ -central and every nonabelian chief factor of  $G$  is a simple group. It is established that the class of  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -groups forms a composite formation. The properties of the products of normal  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -subgroups of finite groups are investigated.

**Keywords:** finite group,  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -group, composition formation, radical formation, semiradical formation.

**Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Центральными в теории классов групп являются концепции локальной и композиционной формации. Понятие локальной формации, введенное Гашюцем [1] в 1963 году, в настоящее время является классическим и активно применяется в исследовании различных вопросов теории групп и ее приложениях. Примерами локальных формаций являются классы всех разрешимых, нильпотентных и сверхразрешимых групп.

Определение композиционной формации было впервые введено Л.А. Шеметковым в [2] и Р. Бэром в неопубликованной работе [3, с. 370]. Каждая локальная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером композиционной формации, не являющейся локальной.

В 1988 году В.А. Ведерниковым в работе [4] был предложен целый ряд интересных классов групп и среди них класс  $\mathfrak{U}_c$  всех  $c$ -сверхразрешимых групп и класс  $\mathfrak{U}_{ca}$  всех  $ca$ -сверхразрешимых групп. Напомним, что группа  $G$  называется  $c$ -сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами, и  $ca$ -сверхразрешимой, если она является  $c$ -сверхразрешимой и каждый ее абелев фактор централен в  $G$ . Класс  $\mathfrak{U}_c$  был подробно изучен в работе А.Ф. Васильева и Т.И. Васильевой [5]. В частности, было доказано,

что класс  $\mathfrak{U}_c$  является композиционной, но не локальной формацией. В работе [6] Д. Робинсоном были найдены структурные свойства  $c$ -сверхразрешимых групп.

Ввиду роста приложений композиционных формаций в различных вопросах теории групп возникает задача нахождения новых примеров и серий композиционных формаций. Так, в работах [7], [8] А.Н. Скибой и Го Вэньбином была введена конструкция класса квази- $\mathfrak{F}$ -групп, с помощью которой были получены новые примеры композиционных формаций, исследованы их свойства и приложения.

По аналогии с [7], [8] в настоящей работе введено понятие  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -группы. Доказано, что класс всех  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -групп является композиционной формацией, если  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация. Установлены свойства групп, представимых в произведение своих нормальных  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -подгрупп.

**1 Предварительные сведения**

В работе используются обозначения и определения из монографий [2], [3], [9]. Приведем некоторые из них.

$H \times K$  – полупрямое произведение групп  $H$  и  $K$ ;

$\mathfrak{F}$  – некоторый класс групп;

$\mathfrak{U}$  – класс всех сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}_p$  – класс всех  $p$ -групп;

$G^{\mathfrak{S}}$  –  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ .

Формацией называется класс, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Формация  $\mathfrak{F}$  называется насыщенной, если из  $G/N \in \mathfrak{F}$ , где  $N \leq \Phi(G)$ , следует, что  $G \in \mathfrak{F}$ .

Экраном [2] называется отображение  $f$  класса  $\mathfrak{G}$  всех групп в множество классов групп, если для любой группы  $G$  выполняются следующие условия:

- 1)  $f(G)$  – формация;
- 2)  $f(G) \subseteq f(G^\varphi) \cap f(\text{Ker } \varphi)$  для любого гомоморфизма  $\varphi$  группы  $G$ ;
- 3)  $f(1) = \mathfrak{G}$ .

При этом экран  $f$  называется локальным, если он  $p$ -постоянен для любого простого  $p$  ( $f(R) = f(S) = f(p)$  для любых двух неединичных  $p$ -групп  $R$  и  $S$ ) и  $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$  для любой группы  $G \neq 1$ . Экран  $f$  называется композиционным, если для любой группы  $G \neq 1$  имеет место  $f(G) = \bigcap f(H/K)$ , где  $H/K$  пробегает все композиционные факторы группы  $G$ .

Формация  $\mathfrak{F}$  называется локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран  $f$ , т. е.

$$\mathfrak{F} = \{G : G/C_G(H/K) \in f(p), \forall p \in \pi(H/K)\}.$$

Обозначается  $\mathfrak{F} = LF(f)$ . Формация  $\mathfrak{F}$  называется композиционной, если она имеет хотя бы один композиционный экран  $f$ , т. е.

$$\mathfrak{F} = \{G : G/C_G(H/K) \in f(A), \forall A \in K(H/K)\}.$$

Обозначается  $\mathfrak{F} = CLF(f)$ .

**Теорема 1.1** [3, теорема 4.6]. Формация конечных групп насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.

Внутренним экраном формации  $\mathfrak{F}$  называется такой экран  $f$ , что  $f(G) \subseteq \langle f \rangle$  для любой неединичной группы  $G$ . Экран  $f$  называется максимальным внутренним локальным (композиционным) экраном формации  $\mathfrak{F}$ , если  $f$  является максимальным элементом множества всех внутренних локальных (композиционных) экранов формации  $\mathfrak{F}$ .

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется радикальным или классом Фиттинга [2], если  $\mathfrak{F}$   $S_n$ -замкнут и  $R$ -замкнут, т. е. содержит всякую группу  $G = HK$ , где  $H$  и  $K$  – нормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы в  $G$ .

**Теорема 1.2** [2]. Пусть  $f$  – максимальный внутренний локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Формация  $\mathfrak{F}$   $R$ -замкнута тогда и только тогда, когда для любого просто  $p$  формация  $f(p)$   $R$ -замкнута.

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется полурадикальным [10], если  $\mathfrak{F}$   $S_n$ -замкнут и содержит всякую группу  $G = HK$ , где  $H$  и  $K$  – нормальные в  $G$   $\mathfrak{F}$ -подгруппы такие, что  $G/H$  и  $G/K$  не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

**Теорема 1.3** [10]. Пусть  $h$  – внутренний композиционный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если полурадикален экран  $h$ , то полурадикальна формация  $\mathfrak{F}$ ;
- 2) если полурадикальна формация  $\mathfrak{F}$ , то ее максимальный внутренний композиционный экран полурадикален.

**Лемма 1.4** [2]. Пусть  $f$  – локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Группа  $G$  тогда и только тогда принадлежит  $\mathfrak{F}$ , когда  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \pi(G)$ .

**Лемма 1.5** [5]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация и  $N$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  такая, что  $|N| = p^\alpha$  для некоторого простого числа  $p$ . Если  $N$  содержится в подгруппе  $H$  из  $G$  и  $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$  для любого  $H$ -главного фактора  $U/V$  группы  $N$ , то  $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ .

## 2 Определение и свойства класса са- $\mathfrak{F}$ -групп

**Определение 2.1** [9]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Главный фактор  $H/K$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -центральным, если

$$H/K \times G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}.$$

В противном случае фактор  $H/K$  называется  $\mathfrak{F}$ -эксцентральным.

**Определение 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Будем говорить, что группа  $G$  является са- $\mathfrak{F}$ -группой, если каждый ее абелевый главный фактор является  $\mathfrak{F}$ -центральным, а каждый неабелевый главный фактор является простой группой.

Класс всех са- $\mathfrak{F}$ -групп обозначим через  $\mathfrak{S}_{sa}$ .

**Лемма 2.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Тогда класс  $\mathfrak{S}_{sa}$  является непустой формацией.

**Доказательство.** Пусть  $G \in \mathfrak{S}_{sa}$  и  $N \triangleleft G$ . Докажем, что  $G/N$  также является са- $\mathfrak{F}$ -группой. Рассмотрим главный ряд группы  $G$ , проходящий через подгруппу  $N$ :

$$1 = G_1 < \dots < G_i = N < G_{i+1} < \dots < G_n = G.$$

Тогда любой главный фактор  $G_{j+1}/G_j$  является  $\mathfrak{F}$ -центральным, если он абелев, и изоморфен простой группе, если неабелев. Рассмотрим главный ряд группы  $G/N$ :

$$1 = G_i/N < G_{i+1}/N < \dots < G_n/N = G/N.$$

В силу  $G$ -изоморфизма факторов

$$(G_{j+1}/N)/(G_j/N) \cong G_{j+1}/G_j$$

любой главный фактор  $(G_{j+1}/N)/(G_j/N)$  является либо  $\mathfrak{F}$ -центральным, либо изоморфен простой группе. Следовательно,  $G/N$  –  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -группа.

Пусть  $G/N_1 \in \mathfrak{F}_{ca}$  и  $G/N_2 \in \mathfrak{F}_{ca}$ ,  $N_1 \triangleleft G$  и  $N_2 \triangleleft G$ . Из леммы 1.3 [2] следует, что любой главный фактор группы  $G/(N_1 \cap N_2)$   $G$ -изоморфен либо некоторому главному фактору группы  $G/N_1$ , либо некоторому главному фактору группы  $G/N_2$ . Отсюда следует, что группа  $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}_{ca}$ .

Следовательно, класс  $\mathfrak{F}_{ca}$  является формацией. Лемма доказана.

**Теорема 2.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация и  $f$  – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация  $\mathfrak{F}_{ca}$  является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран  $h$  такой, что  $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$ , если  $N$  – простая неабелева группа и  $h(N) = f(p)$ , если  $N$  – простая  $p$ -группа,  $p$  – простое число.

*Доказательство.* Пусть  $h$  – композиционный экран такой, что для любой простой группы  $N$  значение экрана  $h(N) = f(p)$ , если  $N$  –  $p$ -группа и  $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$ , если  $N$  – неабелева группа. Обозначим через  $\mathfrak{X} = CLF(h)$ . Покажем, что  $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{ca}$ .

Предположим, что множество  $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}_{ca}$  не пусто, и выберем в нем группу  $G$  наименьшего порядка. Так как  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{F}_{ca}$  являются формациями, то в  $G$  имеется единственная минимальная нормальная подгруппа  $N$ , которая совпадает с  $\mathfrak{F}_{ca}$ -корадикалом группы  $G$ , т. е.  $N = G^{\mathfrak{F}_{ca}}$ .

Пусть  $N$  – неабелева группа. Если  $N = G$ , то  $G$  – простая группа и  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Противоречие. Будем считать, что  $N \neq G$ . Заметим, что  $C_G(N) \cap N \triangleleft G$ . Из неабелевости и минимальности  $N$  следует, что  $C_G(N) = 1$ . Так как  $G \in \mathfrak{X}$ , то  $G/C_G(N) \cong G \in h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$ . Получили противоречие с выбором группы  $G$ .

Пусть  $N$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Из  $G \in \mathfrak{X}$  следует, что  $G/C_G(N) \in h(N) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ . Рассмотрим прямое произведение  $R = N \times G/C_G(N)$ . Заметим, что  $N$  – минимальная нормальная подгруппа в  $R$  и  $C_R(N) = N = F(R) = F_p(R)$ . Тогда  $R/F_p(R) \cong G/C_G(N) \in h(p)$ . По лемме 1.4 получаем, что  $R \in \mathfrak{F}$ . То есть фактор  $N/1$  является

$\mathfrak{F}$ -центральным в  $G$ . Отсюда и из  $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$  получаем  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Противоречие. Таким образом,  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{ca}$ .

Докажем обратное включение. Предположим, что множество  $\mathfrak{F}_{ca} \setminus \mathfrak{X}$  не пусто, и выберем в нем группу  $G$  наименьшего порядка. Так как  $\mathfrak{F}_{ca}$  и  $\mathfrak{X}$  – формации, то можно считать, что в  $G$  имеется единственная минимальная нормальная подгруппа  $N$  такая, что  $N = G^{\mathfrak{X}}$ .

Пусть  $N$  – неабелева группа. Тогда  $C_G(N) = 1$ . Из  $G/C_G(N) \cong G \in \mathfrak{F}_{ca} = h(N)$ , следует, что главный фактор  $N$  является  $h$ -центральным в  $G$ . Отсюда и из  $G/N \in \mathfrak{X}$  получаем, что  $G \in \mathfrak{X}$ . Противоречие с выбором  $G$ .

Пусть  $N$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого  $p$ . Так как  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ , то  $N$  –  $\mathfrak{F}$ -центральна в  $G$ . Следовательно,

$$R = N \times G/C_G(N) \in \mathfrak{F},$$

где  $N$  – минимальная нормальная подгруппа в  $R$  и  $C_G(N) = N = F(R) = F_p(R)$ . По лемме 1.4 получаем, что  $R/F_p(R) \cong G/C_G(N) \in h(p)$ . Отсюда и из  $G/N \in \mathfrak{X}$  следует, что  $G \in \mathfrak{X}$ . Противоречие. Итак,  $\mathfrak{F}_{ca} \subseteq \mathfrak{X}$ , тем самым равенство  $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{ca}$  установлено. Теорема доказана.

### 3 Свойства произведений нормальных $ca$ - $\mathfrak{F}$ -подгрупп

Установим свойства групп, представимых в произведение своих нормальных  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Для этого нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 3.1.** Пусть группа  $G$  имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$  такую, что  $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Если  $G = HK$ , где  $H$  и  $K$  – нормальные  $ca$ - $\mathfrak{F}$ -подгруппы из  $G$ , то  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $N \subseteq H \cap K$ . Пусть  $R$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $H$ , содержащаяся в  $N$ . Так как  $H \in \mathfrak{F}_{ca}$ , то  $R$  – простая неабелева группа. Прямой проверкой устанавливается, что  $R^g \triangleleft H$  для любого  $g \in G$ . Из  $N \triangleleft G$  следует, что произведение  $R^x R^y \dots R^z \subseteq N$ , где  $x, y, \dots, z$  – все элементы группы  $G$ . Из минимальности  $N$  получаем  $N = R^x R^y \dots R^z$ . Выберем элементы  $g_1, g_2, \dots, g_n$  группы  $G$  так, чтобы  $N = R^{g_1} R^{g_2} \dots R^{g_n}$  и  $R^{g_i} \neq R^{g_j}$  для любых  $i \neq j$ . Ввиду простоты  $R$  имеем  $R^{g_i} \cap R^{g_j} = 1$  для  $i \neq j$ , т. е.

$$N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \dots \times R^{g_n}.$$

Аналогично, минимальная нормальная подгруппа  $L$  группы  $K$ , содержащаяся в  $N$ , обладает

следующими свойствами:  $L$  – простая неабелева группа;  $L^h \triangleleft K$  для любого  $h \in G$ ;

$$N = L^{h_1} \times L^{h_2} \times \dots \times L^{h_m},$$

где  $h_1, h_2, \dots, h_m$  – элементы группы  $G$  такие, что  $L^{h_i} \neq L^{h_j}$  для любых  $i \neq j$ . Ввиду утверждения а) леммы 13.16 [11, гл. X] и простоты  $L$  для любого  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  имеем  $L^{h_i} = R^{g_k}$  для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда из

$$N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \dots \times R^{g_n} = L^{h_1} \times L^{h_2} \times \dots \times L^{h_m}$$

получаем, что  $n = m$ , т. е.

$$\{R^{g_1} R^{g_2} \dots R^{g_n}\} = \{L^{h_1} L^{h_2} \dots L^{h_m}\}.$$

Так как  $L^h = R^{g_k}$  для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то  $N_G(L^h) = N_G(R^{g_k}) \supseteq HK = G$ . Это означает, что  $L^h \triangleleft G$ . Отсюда и из минимальности  $N$  следует равенство  $N = L^{h_1}$ , т. е.  $N$  проста. Так как  $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ , то  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Если локальная формация  $\mathfrak{F}$  является  $S_n$ -замкнутой, то и формация  $\mathfrak{F}_{ca}$  также  $S_n$ -замкнута.

*Доказательство.* Пусть  $G$  – группа наименьшего порядка, такая, что  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$  и в  $G$  существует нормальная подгруппа  $R$ , которая не принадлежит  $\mathfrak{F}_{ca}$ . Выберем минимальную нормальную подгруппу  $N$  группы  $G$ , содержащуюся в  $R$ . По индукции  $R/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ .

Пусть  $N$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого  $p$ . Так как  $N \backslash G / C_G(N) \in \mathfrak{F}$  и формация  $\mathfrak{F}$  является  $S_n$ -замкнутой, то  $N \in \mathfrak{F}$  и  $G / C_G(N) \in h(p)$ ,

где  $h$  – максимальный внутренний локальный экран формации  $\mathfrak{F}$ . Так как формация  $\mathfrak{F}$  является  $S_n$ -замкнутой, то по теореме 4.7 из [2] формация  $h(p)$  также  $S_n$ -замкнута. Тогда

$$RC_G(N) / C_G(N) \simeq R / C_R(N) \in h(p).$$

Нетрудно видеть, что любой главный фактор группы  $R$ , лежащий в  $R$ , является  $h$ -центральным в  $R$ , а следовательно и  $\mathfrak{F}$ -центральным в  $R$ . Отсюда и из  $R/N \in \mathfrak{F}_{ca}$  следует, что  $R \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Получили противоречие.

Если  $N$  – неабелева группа, то  $N$  – простая группа, так как  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Тогда  $R \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Данное противоречие завершает доказательство леммы.

**Лемма 3.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная полурадикальная формация. Если группа  $G = HK$ , где  $H$  и  $K$  – нормальные в  $G$  са- $\mathfrak{F}$ -подгруппы такие, что  $G/H$  и  $G/K$  не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых компо-

зиционных факторов, то  $G$  также является са- $\mathfrak{F}$ -группой.

*Доказательство.* Пусть  $G$  – группа наименьшего порядка для которой утверждение леммы неверно. Обозначим через  $N$  – минимальную нормальную подгруппу группы  $G$ .

Покажем, что для  $G/N$  условия леммы выполняются. Рассмотрим

$$G/N = HN/N \cdot KN/N,$$

где  $HN/N \triangleleft G$  и  $KN/N \triangleleft G$ . Группы

$$G/N / HN/N \simeq G/HN$$

и  $G/N / KN/N \simeq G/KN$  не имеют общих абелевых композиционных факторов. По выбору группы  $G$  факторгруппа  $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ .

Покажем, что  $N$  является единственной минимальной подгруппой в  $G$ . Предположим, что в  $G$  есть минимальная нормальная подгруппа  $R \neq N$ . Так как  $\mathfrak{F}_{ca}$  является формацией из  $G/R \in \mathfrak{F}_{ca}$  и  $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$  следует, что

$$G/R \cap N \in \mathfrak{F}_{ca}.$$

Из того, что  $R$  и  $N$  – минимальные нормальные подгруппы в  $G$ , следует, что  $R \cap N = 1$  и  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Противоречие.

Таким образом,  $N$  – единственная минимальная подгруппа, причем  $N = G^{S_n}$  и  $N \subseteq H \cap K$ .

Пусть  $N$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран  $h$  формации  $\mathfrak{F}_{ca}$ . Для любого  $H$ -главного фактора  $U/V$  группы  $N$  имеем

$$H / C_H(U/V) \in h(U/V) = h(p).$$

По лемме 1.5 имеем  $H / C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$ .

Аналогично  $K / C_K(N) \in h(p)$ . Рассмотрим группу  $G / C_G(N) = HC_G(N) / C_G(N) \cdot KC_G(N) / C_G(N)$ .

Тогда ее нормальные подгруппы

$$HC_G(N) / C_G(N) \simeq H / C_H(N) \in h(p)$$

и  $KC_G(N) / C_G(N) \simeq K / C_K(N) \in h(p)$ . Из теоремы 1.3 и из того, что  $G / C_G(N) / HC_G(N) / C_G(N)$

и  $G / C_G(N) / KC_G(N) / C_G(N)$  не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, следует, что  $G / C_G(N) \in h(p)$ .

Следовательно,  $N$  является  $h$ -центральным фактором группы  $G$ . Отсюда и из  $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$

следует, что  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Получили противоречие.

Если  $N$  – неабелева группа, то из леммы 3.1 следует, что  $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ . Противоречие доказывает лемму.

**Лемма 3.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная радикальная формация. Если группа  $G = HK$ , где  $H$  и  $K$  – нормальные в  $G$  са- $\mathfrak{F}$ -подгруппы, то  $G$  также является са- $\mathfrak{F}$ -группой.

*Доказательство.* Аналогично доказательству леммы 3.3.

**Теорема 3.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная радикальная формация. Тогда  $\mathfrak{F}_{ca}$  – радикальная формация.

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из лемм 3.2 и 3.4.

**Теорема 3.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная полурадикальная формация. Тогда  $\mathfrak{F}_{ca}$  – полурадикальная формация.

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из лемм 3.2 и 3.3.

**Следствие 3.7.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая насыщенная формация. Если группа  $G = HK$ , где  $H$  и  $K$  – нормальные  $sa$ - $\mathfrak{F}$ -подгруппы из  $G$  и  $(|G:H|, |G:K|) = 1$ , то  $G$  является  $sa$ - $\mathfrak{F}$ -группой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschutz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Ведерников, В.А. О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Доклады АН БССР. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 872–875.

5. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Известия вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.

6. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.

7. Guo, W. On finite quazi- $\mathfrak{F}$ -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Communication in Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.

8. Guo, W. On some classes of finite quazi- $\mathfrak{F}$ -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.

9. Шеметков, Л.Н. Формации алгебраических систем / Л.Н. Шеметков, А.Н. Скиба // М.: Наука, 1989 – 256 с.

10. Васильева, Т.И. Полурадикальные формации конечных групп / Т.И. Васильева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – Т. 1, № 1 (15). – С. 71–77.

11. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin : Springer, 1982. – 454 p.

Поступила в редакцию 21.10.13.