УДК 621.373 : 535

# НЕЛИНЕЙНОЕ СМЕЩЕНИЕ И РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ ГЕНЕРАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

*В. Ф. Бойцов*

Рассчитаны и проанализированы формулы нелинейных сдвигов частот генерации, пропорциональных относительному превышению накачки над пороговой, у кольцевого лазера с пространственно неоднородной средой. Показано, что для получения малых расщеплений частот генерации встречных волн следует применять резонаторы, близкие к конфокальному, при любом соотношении между эффективными поперечными размерами среды и резонаторного поля; резонаторы, близкие к плоскому, целесообразно использовать, если поперечные размеры поля превышают поперечные размеры среды.

## Введение

В статье Андроновой и Бернштейна [1] указывалось, что неоднородность пространственных характеристик активной среды может привести к различию встречных волн у кольцевого лазера. В настоящей работе проведен теоретический расчет влияния пространственной неоднородности коэффициента усиления среды на нелинейные сдвиги и разность частот генерации встречных волн в кольцевом лазере.

Рассмотрим кольцевой лазер, резонатор которого образован цилиндрическим зеркалом радиуса $R$ с постоянным по апертуре коэффициентом отражения $\gamma$ и двумя плоскими полностью отражающими зеркалами. Все зеркала полагаем достаточно большими, чтобы пренебречь дифракцией на них. Введем прямоугольную систему координат (**x**, **z**) с ортом **z** в направлении движения часовой стрелки вдоль оптической оси и $z=0$ на цилиндрическом зеркале. Неоднородная среда $P$ длиной $l$, расположенная между сечениями $z_1$ и $z_2$, имеет комплексный показатель преломления $n(x)$:

$$\left.\begin{aligned} n(x) = \frac{k(x)}{k} = 1 + \frac{\chi^{(1)}(x)}{k} = 1 + \frac{\chi^{(1)}}{k}\left[1 - \left(\frac{x}{a_p}\right)^2\right], \\ k \equiv k(0), \quad \chi^{(1)} \equiv \chi^{(1)}(0) = \chi_1^{(1)} + i\chi_2^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $k(x)$ — волновое число в среде, $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$ — вещественные величины, определяющие линейную дисперсию и усиление (затухание) на единицу длины вдоль оптической оси резонатора. Комплексный коэффициент насыщения $\chi^{(3)}(x)$ зададим в виде гауссовой функции

$$\chi^{(3)}(x) = \chi^{(3)} \exp\left\{-\left(\frac{x}{a_p}\right)^2\right\}, \quad \chi^{(3)} \equiv \chi^{(3)}(0) = \chi_1^{(3)} + i\chi_2^{(3)}. \tag{2}$$

При выполнении обычных приближений квазиоптики и неравенства

$$\left|\sqrt{N_p \varkappa^{(1)} l'}\right| \ll 1, \quad N_p \equiv L/ka_p^2, \quad \varkappa^{(1)} \equiv \chi^{(1)} l, \quad l' = l/L, \tag{3}$$

где $L$ — длина оптической оси резонатора, поперечные распределения полей нулевых мод встречных волн в резонаторе внутри усиливающей среды $P$ выражаются формулами, которые можно получить с помощью метода интегральных уравнений или другими способами [3–6],

$$\varphi^{(\pm)}(\bar{x},\ z') = N^{(\pm)}(z') \exp\left\{-\frac{\bar{x}^2}{2} q^{(\pm)}(z')\right\},$$

$$z' = z/L, \quad \bar{x} = x\sqrt{k/L}. \tag{4}$$

Здесь верхний знак соответствует волне, бегущей по часовой стрелке, а нижний — встречной волне; функции $N^{(\pm)}(z')$ и $q^{(\pm)}(z')$ определены в Приложении (П.1)—(П.2). В общем случае реальные части комплексных функций $q^{(+)}(z')$ и $q^{(-)}(z')$ не равны друг другу. Это приводит к тому, что у встречных волн снимается вырождение по каустическим поверхностям, которое характерно для пустых кольцевых резонаторов [7].

Спектр частот встречных волн резонатора и пороговые условия определяются с помощью уравнения

$$\exp\left\{i\left[\pi n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\arccos g\right]\right\} = \gamma \exp\{-i[kL + \varkappa^{(1)} - 2\pi q]\}, \tag{5}$$

$n$ и $q$ — поперечный и продольный индексы моды. Вид функции $g$ приведен в Приложении (П.2). Из (5) видно, что частоты и пороговые условия у встречных волн совпадают. Таким образом, поперечная неоднородность среды в кольцевом резонаторе приводит к снятию вырождения только полей встречных волн (ср. с [8]).

## Нелинейный сдвиг частоты генерации в кольцевом лазере

Нелинейные сдвиги частот генерации $\omega_{\pm}^{nl}$ для невзаимодействующих встречных волн оказываются разными из-за различия нелинейных поляризуемостей среды, пропорциональных $\varkappa^{(3)}(x)|\varphi^{(\pm)}|^2$. Таким образом, расщепление каустических поверхностей встречных волн в резонаторе с неоднородной средой является причиной возникновения разности частот генерации $\delta\omega = \omega_{+}^{nl} - \omega_{-}^{nl}$ у встречных волн.

Теоретический расчет нелинейного сдвига частоты генерации с учетом пространственного распределения поля в кольцевом резонаторе проведен в работе [2] [см. (19), (25), (27), (28)]. Анализ этого расчета применительно к функциям (4) дает следующие результаты: 1) нелинейные сдвиги $\omega_{\pm}^{nl}$ при небольших относительных превышениях накачки над пороговой прямо пропорциональны этому превышению; 2) разность частот генерации встречных волн $\delta\omega$ зависит от положения $z_0$ центра активной среды внутри резонатора, длины трубки $l$, ее эффективной полуширины $a_p$ и параметра конфокальности

$$g_0 = 1 - \frac{L}{R\cos\alpha_0} \tag{6}$$

($\alpha_0$ — угол между оптической осью и нормалью к центру цилиндрического зеркала); 3) $\delta\omega$ зависит от расстройки частоты генерации относительно центра линии перехода (от функции $r$), от коэффициента пропускания зеркала $\gamma$, а тем самым от порогового усиления. Разность частот $\delta\omega$ пропадает, если 1) длина активной среды равна длине оптической оси ($l=L$), 2) среда в поперечном направлении однородна ($a_p \to \infty$), 3) центр трубки расположен симметрично по отношению к цилиндрическому зеркалу ($z_0'=1/2$), 4) цилиндрическое зеркало вырождается в плоское ($g_0=1$).

Расчет $\omega_{\pm}^{nl}$ производится с помощью функции $\mu^{(\pm)}(z')$, вид которой определен формулой (19) из [2].[1] В ряде важных для практического приложения случаев эту функцию удается представить в асимптотическом виде

$$\mu^{(\pm)}(z') = -i\,[(b_1(z') \pm b_2(z')) + i\,(b_3(z') \pm b_4(z'))], \tag{7}$$

где $b_j(z')$ — вещественные функции, причем модули функций $b_2(z')$ и $b_4(z')$, характеризующие «деформацию» каустик из-за неоднородности среды, много меньше, чем модули $b_1(z')$ и $b_3(z')$. Введем обозначения

[1] Естественно, что в этой формуле вместо функций $W^{(\pm)}$ следует взять функции $\varphi^{(\pm)}$, заданные выражением (4).

$$r \equiv \chi_1^{(3)}/\chi_2^{(3)} \; (r \ll 1), \quad b_j \equiv \int_{z'_1}^{z'_2} b_j(z')\,dz', \tag{8}$$

тогда с учетом главных членов и первых поправок к ним имеем

$$\omega_\pm^{nl} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\eta c}{L}\left\{\left[\frac{b_3}{b_1} - r\left(1 + \frac{b_3^2}{b_1^2}\right) - \frac{b_2 b_4}{b_1^2}\right] \pm \left[\frac{b_4}{b_1} - 2r\frac{b_3 b_4}{b_1^2} - \frac{b_2 b_3}{b_1^2}\right]\right\}, \tag{9}$$

где $c$ — скорость света, $\alpha$ — потери в резонаторе. Дальнейшие расчеты будем проводить для двух предельных случаев

$$(1 - g_0^2) \gg |2 g_0 \varkappa^{(1)} N_p a_4(z'_0)| \quad \mathscr{A}, \tag{10}$$

$$|1 - g_0^2| \ll |2 g_0 \varkappa^{(1)} N_p a_4(z'_0)| \quad \mathscr{B}. \tag{11}$$

Функция $a_4(z'_0)$ определена в приложении (П.3). Ситуация $\mathscr{A}$ соответствует резонаторам, близким к конфокальному, а ситуация $\mathscr{B}$ соответствует резонаторам, близким к плоскому или концентрическому.

## Лазер с резонатором, близким к конфокальному

Функция $\mu^{(\pm)}(z')$, определенная в формуле (19) из [2], для ситуации $\mathscr{A}$ (10) имеет вид

$$\mu^{(\pm)}(z') = -i\,\{C(z') + N_p[2\varkappa_1^{(1)} a_8(z') + \varkappa_2^{(1)}(i a_8(z') \pm a_7(z'))]\}^{-1/2} f(z'), \tag{12}$$

где введены следующие обозначения $\varkappa_1^{(1)} = \mathrm{Re}\,\varkappa^{(1)}$, $\varkappa_2^{(1)} = \mathrm{Im}\,\varkappa^{(1)}$:

$$f(z') \equiv \exp\left[\int_{z'_1}^{z'} N_p p_0^{-2}(z)\,(\varkappa_2^{(1)} a_8(z) \mp \varkappa_1^{(1)} a_7(z))\,dz\right], \tag{13}$$

$$C(z') = 2\sqrt{1 - g_0^2} + N_p p_0^2(z'), \quad p_0^2(z') = 1 - 2z'(1 - z')(1 - g_0). \tag{14}$$

Физически функция $p_0^2(z')$ определяет каустические поверхности в пустом резонаторе [7]. Функции $a_7(z')$ и $a_8(z')$ приведены в Приложении (П. 4). Главным членом фигурных скобок в формуле (12) является $C(z')$. Разложение этой скобки по степеням малого параметра с точностью до первого порядка малости приводит функцию $\mu^{(\pm)}(z')$ (12) к асимптотическому виду (7), где $b_j(z')$ определяются следующим образом (ниже полагаем $\varkappa_1^{(1)} = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &b_1(z') = C^{-1/2}(z') f(z'), \quad b_2(z') = -\frac{1}{2} N_p \varkappa_2^{(1)} a_7(z')\, C^{-3/2}(z') f(z'), \\ &b_3(z') = -\frac{1}{2} N_p \varkappa_2^{(1)} a_8(z')\, C^{-3/2}(z') f(z'), \quad b_4(z') \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Расчет $\omega_\pm^{nl}$ проводим в приближении короткой трубки. В этом приближении при интегрировании $b_j(z')$ по $z'$ учитываются члены не выше $l'^2$. После расчета интегралов от $b_j(z')$ на основании формулы (9) получаем

$$\begin{gathered} \omega_\pm^{nl} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\eta c}{L}\left\{\left[-\frac{1}{2} N_p \varkappa_2^{(1)} C^{-1}(z'_0)\, C_1(z'_0) - r\left(1 + \left(\frac{1}{2} N_p \varkappa_2^{(1)} C^{-1}(z'_0)\, C_1(z'_0)\right)^2\right)\right] \pm \right. \\ \left. \pm\left[-\frac{1}{8}(N_p \varkappa_2^{(1)})^2\, l' g_0 p_0^2(z'_0)\, C^{-3}(z'_0)\, \frac{(2z'_0 - 1)(1 - g_0)}{\sqrt{1 - g_0^2}}\left(\frac{4\sqrt{1 - g_0^2}}{3} + \frac{5}{3} N_p p_0^2(z'_0)\right)\right]\right\}, \\ C_1(z'_0) = \frac{g_0 p_0^2(z'_0)}{\sqrt{1 - g_0^2}} + \frac{l'}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{1 - g_0^2} + N_p \varkappa_2^{(1)} \frac{g_0^2 p_0^2(z'_0)(1 - p_0^2(z'_0))}{1 - g_0^2}\right), \end{gathered} \tag{16}$$

где $C(z')$ определено выражением (14). Выпишем формулы для $\delta\omega$ в двух предельных случаях

$$2\sqrt{1 - g_0^2} \gg N_p p_0^2(z'_0) - \mathscr{A}_1; \quad 2\sqrt{1 - g_0^2} \ll N_p p_0^2(z'_0) - \mathscr{A}_2. \tag{17}$$

Ситуация $\mathscr{A}_1$ имеет место, когда эффективные поперечные размеры среды много больше эффективных поперечных размеров поля (каустики поля находятся «внутри» среды). Ситуация $\mathscr{A}_2$ осуществляется, если поперечные размеры среды много меньше поперечных размеров поля (каустики поля находятся «вне» среды).

$$\delta\omega\,|_{A_1}=\frac{\alpha}{48}\,\frac{\eta c}{L}\,\frac{(N_p\varkappa_2^{(1)})^2\,l'g_0\,(2z_0'-1)\,(1-g_0)}{(1-g_0^2)^{3/2}}\left[1-\frac{N_pp_0^2\,(z_0')}{6\sqrt{1-g_0^2}}\right], \tag{18}$$

$$\delta\omega\,|_{A_2}=\frac{5\alpha}{24}\,\frac{\eta c}{L}\,\frac{(\varkappa_2^{(1)})^2\,l'g_0\,(2z_0'-1)\,(1-g_0)}{\sqrt{1-g_0^2}\,p_0^4\,(z_0')}\left[1-\frac{26\sqrt{1-g_0^2}}{5N_pp_0^2\,(z_0')}\right]. \tag{19}$$

Как видно из формулы (16), $\omega_{\pm}^{nl}$ содержит члены, которые не зависят от порогового усиления $\varkappa_2^{(1)}$, а также члены пропорциональные пороговому усилению и его квадрату. Следует иметь в виду, что само $\varkappa_2^{(1)}$ зависит от коэффициента отражения зеркала $\gamma$ и параметра $N_p$ через соотношение (5). Для конфокального резонатора ($g_0=0$) нелинейные сдвиги частот генерации встречных волн равны друг другу. В этом случае сдвиг аддитивно зависит от расстройки частоты генерации относительно центра линии перехода (от $r$) и члена, пропорционального пороговому усилению $\varkappa_2^{(1)}$.

Из формул (18) и (19) следует, что расщепление частот генерации встречных волн $\delta\omega$ пропорционально квадрату $\varkappa_2^{(1)}$, линейно зависит от $l'$, пропадает (в выбранном приближении) у конфокального резонатора, а также при симметричном положении среды относительно цилиндрического зеркала ($z_0'=1/2$). Знак $\delta\omega$ определяется знаком $g_0$. Для ситуации $\mathscr{A}_1$ следует ожидать слабой зависимости $\varkappa_2^{(1)}$ от $N_p$ при фиксированном $\gamma$, поэтому $\delta\omega\approx N_p^2$. Для ситуации $\mathscr{A}_2$, если пренебречь малым вторым слагаемым в квадратных скобках формулы (19), $\delta\omega$ явно не зависит от $N_p$.

## Лазер с резонатором, близким к плоскому или концентрическому

Функция $\mu^{(\pm)}(z')$ для неравенства $\mathscr{B}$ (11) имеет вид

$$\mu^{(\pm)}(z')=-i\,\{C_0\,(2k_1^{(1)}+ik_2^{(1)})+N_pp_0^2\,(z')\pm N_p\varkappa_2^{(1)}a_7\,(z')\}^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left[\int\limits_{z_1'}^{z'}\left(\frac{C_0k_2^{(1)}}{p_0^2\,(z)}\mp\frac{\varkappa_1^{(1)}N_pa_7\,(z)+a_2\,(z)}{p_0^2\,(z)}\right)dz\right]. \tag{20}$$

Здесь введены обозначения

$$C_0=\sqrt{|\,g_0\,|\,N_pa_4\,(z_0')},\quad \sqrt{(\operatorname{sign} g_0)\,2\varkappa^{(1)}}=k_1^{(1)}+ik_2^{(1)}. \tag{21}$$

Ниже полагаем $\varkappa_1^{(1)}=0$, тогда для усиливающих сред

$$k_1^{(1)}=(\operatorname{sign} g_0)\,k_2^{(1)}=\sqrt{\varkappa_2^{(1)}}. \tag{22}$$

Главным членом в фигурных скобках выражения (20) является слагаемое $C_0(k_1^{(1)}+ik_2^{(1)})+N_pp_0^2(z')$. Рассмотрим два случая

$$C_0\sqrt{2\varkappa_2^{(1)}}\gg N_pp_0^2\,(z')-\mathscr{B}_1;\quad C_0\sqrt{2\varkappa_2^{(1)}}\ll N_pp_0^2\,(z')-\mathscr{B}_2. \tag{23}$$

Первый случай $\mathscr{B}_1$ соответствует ситуации, когда эффективные поперечные размеры среды много больше эффективных поперечных размеров поля в резонаторе; второй случай $\mathscr{B}_2$ соответствует обратной ситуации (ср. с $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$).

Разложение фигурной скобки выражения (20) по степеням малого параметра с точностью до первого порядка малости и использование неравенства $\mathscr{B}_1$ (23), приводит функцию $\mu^{(\pm)}(z')$ к асимптотическому виду (7), где $b_j(z')$ определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
b_1(z') &= (\varkappa_2^{(1)})^{-1/4}\left[1.455\,(\varkappa_2^{(1)})^{1/2} - \frac{0.256 N_p p_0^2(z')}{C_0}\right] f_1(z'),\\
b_2(z') &= -(\varkappa_2^{(1)})^{-1/4}\frac{0.256 N_p \varkappa_2^{(1)} a_7(z')}{C_0} f_1(z'),\\
b_3(z') &= -(\varkappa_2^{(1)})^{-1/4}(\operatorname{sign} g_0)\left[0.344\,(\varkappa_2^{(1)})^{1/2} - \frac{0.214 N_p p_0^2(z')}{C_0}\right] f_1(z'),\\
b_4(z') &= (\operatorname{sign} g_0)(\varkappa_2^{(1)})^{-1/4}\frac{0.214 N_p \varkappa_2^{(1)} a_7(z')}{C_0} f_1(z').
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Функция $f_1(z')$ имеет вид

$$f_1(z') = \exp\int_{z_1'}^{z'} C_0 k_2^{(1)} p_0^{-2}(z)\,dz. \tag{25}$$

Соответственно для неравенства $\mathscr{B}_2$ (23) имеем

$$\left.\begin{aligned}
b_1(z') &= \frac{1}{\sqrt{N_p p_0^2(z')}}\left(1 - \frac{C_0 k_1^{(1)}}{N_p p_0^2(z')}\right) f_1(z'),\\
b_2(z') &= \left(-\frac{\varkappa_2^{(1)} a_7(z')}{2p_0^2(z')\sqrt{N_p p_0^2(z')}} + \frac{3}{2}\,\frac{C_0 \varkappa_2^{(1)} k_1^{(1)} a_7(z')}{p_0^4(z')\,N_p\sqrt{N_p p_0^2(z')}}\right) f_1(z'),\\
b_3(z') &= -\frac{C_0 k_2^{(1)} f_1(z')}{2\,(N_p p_0^2(z'))^{3/2}},\quad b_4(z') = \frac{3}{4}\,\frac{C_0 \varkappa_2^{(1)} k_2^{(1)} a_7(z')}{p_0^4(z')\,N_p\sqrt{N_p p_0^2(z')}} f_1(z').
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

С помощью формул (8), (9), (21), (22) и (24)—(26) получаем для нелинейных сдвигов частот генерации $\omega_\pm^{nl}$ в приближении короткой трубки следующие выражения:

$$\begin{gathered}
\omega_\pm^{nl}|_{\mathscr{B}_1} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{\eta c}{L}\left\{\left[-(\operatorname{sign} g_0)\,0.236 - r\,1.056 + \right.\right.\\
\left. + 0.106\sqrt{\frac{N_p p_0^2(z_0')}{|g_0|\,\varkappa_2^{(1)}}}\left((\operatorname{sign} g_0)\,1 + r\,0.472\right)\right] \pm \left[\left((\operatorname{sign} g_0)\,0.0353 + r\,0.0233\right)\times\right.\\
\left.\left.\times\sqrt{\frac{N_p p_0^2(z_0')\,\varkappa_2^{(1)}}{|g_0|}}\,l'(2z_0'-1)(1-g_0)\right]\right\},
\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}
\omega_\pm^{nl}|_{\mathscr{B}_2} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{\eta c}{L}\left\{\left[-(\operatorname{sign} g_0)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|g_0|\,\varkappa_2^{(1)}}{N_p p_0^2(z_0')}} - r\right] \pm \right.\\
\left.\pm\left[(\operatorname{sign} g_0)\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{|g_0|}{N_p p_0^2(z_0')}}\,\frac{(\varkappa_2^{(1)})^{3/2}\,l'(2z_0'-1)(1-g_0)}{p_0^2(z_0')}\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{28}$$

Из формулы (27) имеем, что $\omega_\pm^{nl}$ $B_1$ содержит слагаемые, которые зависят от порогового усиления как $(\varkappa_2^{(1)})^{-1/2}$ и $(\varkappa_2^{(1)})^{1/2}$. В случае незначительных резонаторных потерь такая зависимость может привести к существенным нелинейным сдвигам частот. Легко видеть, что разность частот генерации встречных волн $\delta\omega$ $\mathscr{B}_1$ зависит от расстройки частоты генерации относительно центра линии перехода (от $r$), знака параметра конфокальности резонатора; пропорциональна $l'$ и $(N_p\varkappa_2^{(1)})^{1/2}$. Для плоского резонатора, как уже отмечалось выше, разность частот равна нулю.

$\omega_\pm^{nl}$ $\mathscr{B}_2$ (28) имеет слагаемые, пропорциональные $(\varkappa_2^{(1)})^{1/2}$ и $(\varkappa_2^{(1)})^{3/2}$. Разность частот генерации встречных волн $\delta\omega$ $\mathscr{B}_2$ пропорциональна $(\varkappa_2^{(1)})^{3/2}$, $l'$, $(N_p p_0^2(z_0'))^{-1/2}$ и пропадает, когда поперечные размеры среды исчезающе малы. Знак $\delta\omega$ определяется знаком параметра конфокальности.

## Заключение

Сопоставление формул (16)—(19) и (27), (28), полученных в приближении короткой трубки, приводит к следующим выводам. 1. У лазеров с резонаторами, близкими к конфокальному $\mathscr{A}$, $\delta\omega \sim (\varkappa_2^{(1)})^2$, а с резонаторами, близкими к плоскому или концентрическому $\mathscr{B}$, $\delta\omega \sim (\varkappa_2^{(1)})^{1/2}$

или $(\varkappa_2^{(1)})^{3/2}$. При малых резонаторных потерях $\delta\omega$ для случаев $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ могут сильно отличаться друг от друга. 2. Конфокальный (в выбранном приближении) и плоский резонаторы не обладают частотной невзаимностью встречных волн. 3. При постоянном пороговом усилении для достаточно «широких» лазерных трубок ($\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}_1$) у резонаторов, близких к конфокальному, $\delta\omega$ обратно пропорциональна четвертой степени диаметра трубки, а у резонаторов, близких к плоскому или концентрическому, $\delta\omega$ обратно пропорционально диаметру. 4. При постоянном пороговом усилении для достаточно «тонких» лазерных трубок ($\mathscr{A}_2$, $\mathscr{B}_2$) у резонаторов, близких к конфокальному, $\delta\omega$ не зависит от диаметра трубки, в то время как у резонаторов, близких к плоскому или концентрическому, $\delta\omega$ прямо пропорциональна диаметру. 5. Для ситуаций $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{B}_2$ $\delta\omega$ не зависит от величины расстройки частоты генерации от центра линии перехода (от $r$); для ситуации $\mathscr{B}_1$ такая зависимость наблюдается, хотя вклад ее в $\delta\omega$ мал. 6. В выбранном приближении для всех разобранных случаев $\delta\omega$ линейно зависит от безразмерной длины трубки $l'$. Это связано с тем, что различие полей встречных волн формируется в результате дифракции на самой (неоднородной) среде. В тех же приближениях частотная невзаимность встречных волн, вызванная дифракцией на диафрагме в резонаторе, не зависит от длины лазерной трубки [2, 9], поскольку различие полей встречных волн в этом случае формируется не (однородной) средой, а диафрагмой. В некоторых задачах необходимо совместно учитывать оба источника дифракции. 7. Для получения минимальных расщеплений частот генерации встречных волн при небольших резонаторных потерях, по-видимому, следует использовать резонаторы, близкие к конфокальному (ср. с [9]). Применение резонаторов, близких к плоскому, целесообразно, когда лазерная трубка имеет поперечные размеры меньше, чем эффективные поперечные размеры поля в резонаторе (ситуация $\mathscr{B}_2$).

Автор благодарен И. Л. Берштейну за всестороннее и детальное обсуждение работы и за доброжелательные и полезные советы.

## Приложение

Функции $N^{(\pm)}(z')$ и $q^{(\pm)}(z')$ из формулы (4) имеют вид

$$N^{(\pm)}(z') = \exp\left\{-\frac{1}{2} i \int\limits_{z_0' \pm l'/2}^{z'} q^{(\pm)}(z)\, dz\right\}, \qquad q^{(\pm)}(z') = \frac{\sqrt{1-g^2}}{p^2(z')} \mp i \frac{B(z')}{p^2(z')}. \tag{П. 1}$$

Здесь введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} g = g_0 - \varkappa^{(1)} N_p a_4(z_0'), \quad \frac{1}{p^2(z')} = \frac{1}{p_0^2(z')}\left\{1 + \frac{\varkappa^{(1)} N_p a_1(z')}{p_0^2(z')\, l'}\right\}, \\ B(z') = a_2(z') + \frac{\varkappa^{(1)} N_p a_3(z')}{l'}, \quad z' \equiv \frac{z}{L}, \end{aligned}\right\} \tag{П. 2}$$

$N_p$, $\varkappa^{(1)}$, $l'$, $g_0$ и $p_0^2(z')$ определены в (3), (6) и (14), $z_0$ — положение центрального сечения среды, функции $a_j(z')$ выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_1(z') = \frac{2}{3}\Big\{(z'-z_0')^2\,[3 - 3l'g_0 - 2\,(z'(1-z') + z'(1-z_0') + {} \\ + z_0'(1-z'))(1-g_0)] + \left(\frac{l'}{2}\right)^2 [3p_0^2(z_0) - l'g_0 - 6\,(z'-z_0')^2(1-g_0)]\Big\}, \\ a_2(z') = (2z'-1)(1-g_0), \\ a_3(z') = 2\,(z_0'-z')\Big[(1-l') - \Big(\frac{3}{2}(z_0'-z')^2 + 2z'(1-z') - {} \\ - \frac{1}{2} l'(2-l')\Big)(1-g_0)\Big], \\ a_4(z_0') = 1 - \left(2z_0'(1-z_0') - \frac{1}{6} l'^2\right)(1-g_0), \quad a_4(z_0') > 0. \end{aligned}\right\} \tag{П. 3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_5(z') = a_3(z') + \frac{a_1(z')\,a_2(z')}{p_0^2(z')}, \quad a_6(z') = \frac{g_0 a_4(z'_0)\,l'}{1-g_0^2} + \frac{a_1(z')}{p_0^2(z')}, \\ a_7(z') = \frac{a_5(z')}{l'}, \quad a_8(z') = \frac{a_6(z')\sqrt{1-g_0^2}}{l'}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{П. }4)$$

**Литература**


[1] И. А. Андронова, И. Л. Берштейн. ЖЭТФ, *57*, 100, 1969.
[2] В. Ф. Бойцов, Т. А. Мурина, Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., *36*, 539, 1974.
[3] Д. Маркузе. Оптические волноводы. «Мир», М., 1974.
[4] H. Kogelnik. Proc. IEEE, *54*, 1312, 1966.
[5] J. A. Arnoud. Proc. IEEE, *62*, 1561, 1974.
[6] Е. С. Коваленко. Квантовая электроника, *3*, 433, 1976.
[7] Волновые и флуктуационные процессы в лазерах (под ред. Ю. Л. Климонтовича). «Наука», М., 1974.
[8] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., *31*, 961, 1971.
[9] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., *41*, 864, 1976.


Поступило в Редакцию 15 февраля 1977 г.