Министерство образования
Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. БУЗЛАНОВ, С. Ф. КАМОРНИКОВ,
В. С. МОНАХОВ

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Практическое пособие
по выполнению лабораторных работ
для студентов математических
специальностей вузов

Гомель 2008

УДК 512+511(075.8)
ББК 22.14+22.13я73
Б904

Р е ц е н з е н т ы:
М.В. Селькин, профессор, доктор физико-математических наук;
кафедра алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Бузланов А. В.
Б904 Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов; М–во образ. РБ, Гомельский гос. ун–т им. Ф. Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 144 с.

ISBN

Практическое пособие включает разделы линейной алгебры курса «Алгебра и теория чисел», которые изучаются во втором семестре. По каждой теме изложены элементы теории, вопросы для самоконтроля, приведены образцы решения типовых задач, предложены 12 вариантов индивидуальных заданий.

Практическое пособие адресовано студентам математических специальностей. Может быть использовано студентами других специальностей, изучающих вопросы линейной алгебры.

УДК 512+511(075.8)
ББК 22.14+22.13я73

ISBN

Содержание

Предисловие 4

1. Линейные пространства и их начальные свойства 5
2. Базис и размерность линейного пространства 22
3. Подпространства линейного пространства 38
4. Линейные отображения линейных пространств 52
5. Строение линейного оператора 71
6. Евклидовы пространства 95
7. Линейные операторы в евклидовом пространстве 110
8. Квадратичные формы 126

Литература 142

Предисловие

Настоящее пособие создано на основе многолетнего опыта работы авторов со студентами первого курса математического факультета Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Оно охватывает разделы линейной алгебры, которые первокурсниками изучаются во втором семестре.

Весь материал разбит на 8 разделов. В каждом разделе приведены основные, необходимые для практической части, элементы теории; образцы решения типовых задач; вопросы для самоконтроля. По каждой теме предложены 12 вариантов индивидуальных заданий. Всё это вместе составляет тот необходимый минимум знаний и умений, которым должен овладеть студент-математик по линейной алгебре. Кроме того, такое построение содержания каждого раздела способствует активизации и организации обязательной и доступной для всех студентов самостоятельной работы при проведении лабораторных занятий.

Настоящее пособие предназначено прежде всего студентам математического факультета. Поскольку курс «Алгебра и теория чисел» лежит в основе всего математического образования студентов, то настоящее пособие может успешно использоваться при изучении соответствующих разделов курса «Высшая математика» других специальностей.

Авторы выражают благодарность Д. А. Ходановичу за помощь в подготовке рукописи к изданию.

Авторы

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ НАЧАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

1.1. Элементы теории

Линейным (векторным) пространством над полем P называется непустое множество V, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Каждой паре (x, y) элементов $x, y \in V$ соответствует однозначно определённый элемент $x + y \in V$, называемый их *суммой*, причём:

(1.1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых $x, y, z \in V$;

(1.2) в V существует такой элемент θ, что $x + \theta = \theta + x = x$ для всех $x \in V$;

(1.3) для каждого элемента $x \in V$ существует элемент $y \in V$ такой, что $x + y = y + x = \theta$;

(1.4) $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$.

2. Каждой паре (α, x), где $\alpha \in P, x \in V$, соответствует однозначно определённый элемент $\alpha x \in V$, называемый *произведением элементов* α *и* x, причём:

(2.1) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ для любых $\alpha, \beta \in P$ и любого $x \in V$;

(2.2) $1x = x$ для любого $x \in V$, здесь 1 — единичный элемент поля P;

(2.3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любого $\alpha \in P$ и любых $x, y \in V$;

(2.4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in P$ и любого $x \in V$.

Если V — линейное пространство над полем P, то элементы из V называются *векторами*, а элементы поля P — *скалярами*. Вектор θ называется *нулевым вектором*. *Противоположным к вектору* $x \in V$ называется такой вектор $y \in V$, что $x + y = y + x = \theta$. Противоположный вектор к вектору x обозначается через $(-x)$.

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *действительным*, над полем $\mathbb{C}$ — *комплексным*.

Из определения линейного пространства следует, что оно является абелевой группой относительно операции сложения векторов.

Приведём несколько важных примеров линейных пространств. В дальнейшем будем ссылаться на обозначения, которые вводятся в этих примерах.

1. Через V^3 обозначим множество всех векторов в трёхмерном пространстве. Относительно операций сложения векторов и умножения их на действительные числа множество V^3 является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

2. Действительными линейными пространствами являются множества V^1 и V^2 — множества всех векторов на прямой и на плоскости с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

3. Линейным пространством над произвольным полем P является множество, состоящее из одного элемента θ, если сложение векторов и умножение вектора на произвольный скаляр $\alpha \in P$ определить следующим образом: $\theta + \theta = \theta, \alpha\theta = \theta$. Это пространство называется *нулевым*.

4. Пусть P — поле и $P^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in P\}$ — n-я декартова степень множества P. Определим на множестве P^n сложение и умножение на скаляр следующим образом:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ из P^n и любого $\alpha \in P$. Относительно введённых операций множество P^n является линейным пространством над полем P. Пространство P^n называется *пространством n-мерных строк над полем P*.

Пространство $\mathbb{R}^n$ называется *n–мерным арифметическим пространством*.

5. Множество $M(n, P)$ всех $n \times n$-матриц над полем P с операциями сложения матриц и умножения матриц на скаляр является линейным пространством над полем P.

6. Множество $C_{[a,b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций действительной переменной x будет линейным пространством над полем $\mathbb{R}$, если сумму двух функций и произведение функции на действительное число для каждого $x \in \mathbb{R}$ определить следующим образом:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

7. Множество $P[x]$ всех многочленов переменной x над полем P относительно сложения многочленов и умножения многочлена на элемент поля P является линейным пространством над полем P.

8. Множество $P_n[x]$ всех многочленов над полем P, степени которых не превосходят натурального числа n, также будет линейным пространством.

Лемма 1.1. *Пусть V — линейное пространство над полем P. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *в пространстве V существует единственный нулевой вектор;*

2) *для каждого вектора существует единственный противоположный вектор;*

3) $0x = \theta$ *для любого $x \in V$, здесь 0 — нулевой элемент поля P, а θ — нулевой вектор пространства V;*

4) $(-1)x = -x$ *для любого $x \in V$, здесь (-1) — противоположный элемент к единичному элементу поля P, $(-x)$ — противоположный вектор к вектору x;*

5) $\alpha\theta = \theta$ *для любого $\alpha \in P$.*

Все утверждения леммы 1.1 являются простыми следствиями аксиом линейного пространства.

Пусть V — линейное пространство над полем P. *Системой векторов* называется конечная последовательность векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1.1}$$

пространства V. Часть этой системы называется её *подсистемой*.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые элементы поля P, то вектор $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ называется *линейной ком-*

бинацией векторов (1.1), а скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — *коэффициентами этой линейной комбинации.*

Если для вектора $x \in V$ существуют такие скаляры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, что $x = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_n a_n$, то говорят, что вектор x *линейно выражается через векторы* системы (1.1).

Система векторов (1.1) называется *линейно зависимой*, если существуют такие скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta. \tag{1.2}$$

Система векторов (1.1) называется *линейно независимой*, если равенство (1.2) имеет место лишь тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если какая-то подсистема некоторой системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима;*

2) *если система векторов линейно независима, то и любая её подсистема линейно независима.*

Теорема 1.3. *Система векторов* (1.1) *линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные векторы.*

Теорема 1.4. *Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ линейно зависима, а её подсистема $a_1, \ldots, a_k$ линейно независима. Тогда вектор a_{k+1} является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_k$.*

Два линейных пространства V и V' над одним и тем же полем P называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi\colon V \to V'$ такое, что:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in V$;

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для любого $x \in V$ и любого $\alpha \in P$.

Отображение φ в этом случае называется *изоморфизмом* линейных пространств V и V'. Если пространства V и V' изоморфны, то пишут $V \cong V'$.

Теорема 1.5. *Отношение изоморфизма линейных пространств над одним и тем же полем есть отношение эквивалентности.*

Теорема 1.6. *Пусть $\varphi\colon V \to V'$ — изоморфизм линейных пространств V и V' над полем P. Тогда:*

1) *если θ — нулевой вектор пространства V, то $\varphi(\theta)$ — нулевой вектор пространства V';*

2) *$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для каждого $x \in V$;*

3) *если система $a_1, \ldots, a_n$ векторов пространства V линейно независима, то система $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$ векторов пространства V' линейно независима.*

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.1. Пусть $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Сложение на V определим равенством

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

а произведение $\lambda \in P$ и $(a_1, a_2) \in V$ — равенством

$$\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, a_2).$$

Является ли V действительным линейным пространством относительно заданных операций?

☐ Проверим выполнение условий определения линейного пространства.

1. Любым двум элементам $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ множества V соответствует элемент $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, который определяется однозначно и принадлежит множеству V.

(1. 1) Для любых $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ из множества V V равенства

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) =$$
$$= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) =$$
$$= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)).$$

Здесь использовано свойство ассоциативности сложения действительных чисел.

(1.2) Нулевым элементом является $\theta = (0,0)$, так как он принадлежит V и
$$(a_1,a_2)+(0,0)=(0,0)+(a_1,a_2)=(a_1,a_2)$$
для каждого элемента $(a_1,a_2)\in V$.

(1.3) Для элемента $(a_1,a_2)\in V$ противоположным будет элемент $(-a_1,-a_2)$, так как он принадлежит V и
$$(a_1,a_2)+(-a_1,-a_2)=(-a_1,-a_2)+(a_1,a_2)=(0,0).$$

(1.4) Для любых элементов (a_1,a_2) и (b_1,b_2) из множества V равенства
$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)=$$
$$=(b_1+a_1,b_2+a_2)=(b_1,b_2)+(a_1,a_2).$$
Здесь использовано свойство коммутативности сложения действительных чисел.

2. Любым двум элементам $\lambda\in\mathbb{R}$ и $(a_1,a_2)\in V$ соответствует однозначно определённый элемент $(\lambda a_1,a_2)$, принадлежащий V.

(2.1) Для любых $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ и любого элемента (a_1,a_2) из V равенства
$$(\lambda\beta)(a_1,a_2)=((\lambda\beta)a_1,a_2)=(\lambda(\beta a_1),a_2)=$$
$$=\lambda(\beta a_1,a_2)=\lambda(\beta(a_1,a_2)).$$
Здесь использовано свойство ассоциативности умножения действительных чисел.

(2.2) Пусть $1\in\mathbb{R}$, (a_1,a_2) — любой элемент из V. Тогда $1(a_1,a_2)=(1a_1,a_2)=(a_1,a_2)$.

(2.3) Для любого действительного числа λ и любых элементов (a_1,a_2), (b_1,b_2) множества V верны равенства
$$\lambda((a_1,a_2)+(b_1,b_2))=\lambda(a_1+b_1,a_2+b_2)=$$
$$=(\lambda(a_1+b_1),a_2+b_2)=(\lambda a_1+\lambda b_1,a_2+b_2)=$$
$$=(\lambda a_1,a_2)+(\lambda b_1,b_2)=\lambda(a_1,a_2)+\lambda(b_1,b_2).$$

(2.4) Возьмем любые $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ и $(a_1,a_2)\in V$. Тогда
$$(\lambda+\beta)(a_1,a_2)=((\lambda+\beta)a_1,a_2)=(\lambda a_1+\beta a_1,a_2),$$
$$\lambda(a_1,a_2)+\beta(a_1,a_2)=(\lambda a_1,a_2)+(\beta a_1,a_2)=$$

$$=(\lambda a_1+\beta a_1,a_2+a_2)=(\lambda a_1+\beta a_1,2a_2).$$
Значит, $(\lambda+\beta)(a_1,a_2)\neq\lambda(a_1,a_2)+\beta(a_1,a_2)$ и множество V не является линейным пространством относительно заданных операций. ⊠

Пример 1.2. Являются ли в пространстве $\mathbb{R}^4$ линейно зависимыми векторы
$$a_1=(1,2,3,4),\ a_2=(3,6,9,12),\ a_3=(1,2,3,6)?$$

☐ Из равенства $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3=\theta$, где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ — элементы поля $\mathbb{R}$, а $\theta=(0,0,0,0)$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^4$, легко получить систему линейных уравнений относительно $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, приравняв соответствующие элементы строк в обеих частях исходного равенства
$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+6\lambda_2+2\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+9\lambda_2+3\lambda_3=0\\ 4\lambda_1+12\lambda_2+6\lambda_3=0.\end{cases}$$
Решая эту систему методом Гаусса, находим $\lambda_1=-3\lambda_2$, $\lambda_3=0$. Так как система имеет ненулевые решения (например, $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$), то векторы a_1,a_2,a_3 являются линейно зависимыми. ⊠

Пример 1.3. Являются ли в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ линейно зависимыми векторы $f_1(x)=1, f_1(x)=x,\ldots,f_{n+1}(x)==x^n$?

☐ Продифференцируем n раз обе части равенства
$$\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x)+\ldots+\alpha_nf_n(x)+\alpha_{n+1}f_{n+1}(x)=0.$$
Получим систему уравнений
$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2x+\ldots+\alpha_nx^{n-1}+\alpha_{n+1}x^n=0\\ \alpha_2+\ldots+(n-1)\alpha_nx^{n-2}+n\alpha_{n+1}x^{n-1}=0\\ \quad\ldots\\ (n-1)!\alpha_n+n!\alpha_{n+1}x=0\\ n!\alpha_{n+1}=0.\end{cases}$$

Относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ определитель этой системы принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & \dots & (n-1)x^{n-2} & nx^{n-1} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)! & n!x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot (n-1)! n! \neq 0.$$

Поэтому система имеет единственное решение. Поскольку система однородная, то она имеет только нулевое решение:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0.$$

Это означает, что векторы

$$f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)$$

линейно независимы. ⊠

Пример 1.4. Докажите изоморфизм линейных пространств $\mathbb{R}_1[x]$ и $\mathbb{R}^2$.

□ Установим соответствие между векторами данных пространств следующим образом:

$$f\colon ax + b \mapsto (a, b), \;\; ax + b \in \mathbb{R}_1[x], \;\; (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Легко показать, что f является биективным отображением. Для любых $m(x) = a_1x + b_1$ и $n(x) = a_2x + b_2$, принадлежащих пространству $\mathbb{R}_1[x]$, и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы следующие равенства:

$$f(m(x) + n(x)) = f((a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)) =$$
$$= f((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) =$$
$$= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = f(a_1x + b_1) + f(a_2x + b_2) =$$
$$= f(m(x)) + f(n(x));$$
$$f(\lambda m(x)) = f(\lambda(a_1x + b_1)) = f(\lambda a_1x + \lambda b_1) =$$
$$= (\lambda a_1, \lambda b_1) = \lambda(a_1, b_1) = \lambda f(a_1x + b_1) = \lambda f(m(x)).$$

Значит, f является изоморфизмом линейных пространств $\mathbb{R}_1[x]$ и $\mathbb{R}^2$. ⊠

1.3. Вопросы для самоконтроля

1. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.

1.1. Как задать линейное пространство над полем P?

1.2. Покажите, что поле P можно рассматривать как линейное пространство над полем P с операциями сложения и умножения, определенными в P.

1.3. Являются ли действительными линейными пространствами следующие множества чисел с обычными операциями сложения и умножения чисел:

1.3.1. $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

1.3.2. $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

1.3.3. $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел;

1.3.4. $\mathbb{R}_+$ — множество всех действительных положительных чисел?

1.4. Является ли действительным линейным пространством множество всех векторов, не параллельных данной прямой, если сложение векторов и умножение их на число определяются правилами векторной алгебры?

1.5. Докажите, что множества V^3, V^2, V^1, P^n, $M(n, P)$, $C_{[a,b]}$, $P[x]$, $P_n[x]$ с введёнными на них операциями сложения и умножения на скаляры являются линейными пространствами.

2. Простейшие следствия из аксиом линейного пространства.

2.1. Докажите, что линейное пространство обладает единственным нулевым вектором.

2.2. Докажите, что для каждого вектора $x \in V$ существует единственный противоположный вектор.

2.3. Сколько решений в пространстве V имеет уравнение $a + x = b$?

2.4. Докажите, что $0a = \theta$ для любого $a \in V$.

2.5. Всегда ли $\alpha\theta = \theta$?

2.6. Докажите, что $\lambda a \neq \theta$ при любых $a \in V \setminus \{\theta\}$ и $\lambda \in P \setminus \{0\}$.

3. Линейная зависимость векторов.

3.1. Что понимается под системой векторов?

3.2. Сформулируйте определение линейно независимой системы векторов.

3.3. Покажите, что два вектора из V^2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

3.4. Покажите, что три вектора из V^3 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

3.5. Может ли линейно независимая система содержать нулевой вектор?

3.6. Сформулируйте критерий линейной независимости системы, состоящей из одного вектора.

3.7. Может ли линейно независимая система содержать два равных вектора?

3.8. Докажите, что в пространстве $M(2, \mathbb{R})$ линейно независима система векторов

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.9. Верно ли, что если a, b, c — линейно независимые векторы, то этим свойством обладают векторы $a+b$, $b+c$, $c+a$?

4. Критерий линейной зависимости системы векторов.

4.1. Сформулируйте критерий линейной зависимости системы, состоящей из одного вектора.

4.2. Докажите, что если три вектора a_1, a_2, a_3 линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через векторы a_1 и a_2, то векторы a_1 и a_2 различаются между собой лишь скалярным множителем.

4.3. Докажите, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, отличных от нуля, тогда и только тогда линейно независима, когда ни один из этих векторов не выражается через предыдущие.

5. Изоморфизм линейных пространств.

5.1. Какие линейные пространства называются изоморфными?

5.2. Пусть V и V' — линейные пространства над полем P, $f\colon V \to V'$ — изоморфизм. Докажите, что:

5.2.1. $f^{-1}\colon V' \to V$ — изоморфизм;

5.2.2. $f(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$, для любых $\alpha_i \in P$, $x_i \in V$.

5.3. Пусть $f\colon V \to V'$ — изоморфизм линейных пространств. Докажите, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из V линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система их образов $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$.

5.4. Пусть $f\colon V \to V'$ — биективное отображение линейных пространств V и V' над полем P. Докажите, что f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для любых $x, y \in V$ и любых $\alpha, \beta \in P$.

5.5. Покажите, что изоморфизмом является тождественное преобразование $\varepsilon\colon x \mapsto x$ линейного пространства V на себя.

5.6. Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — изоморфизм линейных пространств V_1 и V_2, $g\colon V_2 \to V_3$ — изоморфизм линейных пространств V_2 и V_3. Докажите, что gf — изоморфизм V_1 и V_3.

5.7. Докажите, что отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на множестве всех линейных пространств над одним и тем же полем.

1.4. Индивидуальные задания

1.1.–1.6. Является ли действительным линейным пространством с операциями, определенными в $\mathbb{R}^n$, множество всех тех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, которые удовлетворяют следующему условию.

1.1. Все координаты равны между собой?

1.2. Первая координата α_1 равна нулю?

1.3. Сумма координат равна нулю?

1.4. Сумма координат равна единице?

1.5. Координата α_n равна сумме всех остальных координат?

1.6. Последняя координата α_n равна нулю?

1.7.–1.12. Является ли комплексным линейным пространством с операциями сложения матриц и умножения матрицы на элемент поля $\mathbb{C}$ множество всех тех $n \times n$-матриц, которые удовлетворяют следующему условию.

1.7. Первая строка — нулевая?

1.8. Все элементы, не расположенные на главной диагонали, равны нулю (диагональные матрицы)?

1.9. Определитель равен нулю?

1.10. Все элементы ниже главной диагонали равны нулю?

1.11. Все элементы выше главной диагонали равны нулю?

1.12. Все элементы главной диагонали равны нулю?

2.1.–2.6. Является ли комплексным линейным пространством с операциями сложения многочленов и умножения многочленов на комплексное число множество всех тех многочленов $f(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, которые удовлетворяют следующему условию.

2.1. $f(0) = 1$?

2.2. $f(0) = 0$?

2.3. $2f(0) - 3f(1) = 0$?

2.4. $f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = 0$?

2.5. $f(1) = 0$?

2.6. $f(x)$ имеет только чётные степени переменной x?

2.7.–2.12. Является ли действительным линейным пространством с операциями, определёнными в $C_{[a,b]}$, множество всех тех функций, которые обладают следующим свойством.

2.7. Дифференцируемы на $[a, b]$?

2.8. Имеют вид $ax+b$, где a, b — любые действительные числа?

2.9. Имеют вид $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — любые действительные числа?

2.10. $f(a) = 0$?

2.11. Неотрицательны на $[a, b]$?

2.12. Монотонны на $[a, b]$?

3. Докажите, что множество решений однородной системы линейных уравнений образует линейное пространство над $\mathbb{R}$:

3.1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

4. Являются ли векторы a_1, a_2, a_3, a_4 пространства $\mathbb{R}^4$ линейно зависимыми? В случае утвердительного ответа найдите нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

	a_1	a_2	a_3	a_4
4.1.	(-1,1,1,0)	(2,-1,1,3)	(-1,2,1,5)	(2,2,-1,1)
4.2.	(1,1,-1,0)	(-1,2,2,-3)	(-2,1,-1,4)	(-1,1,2,-2)
4.3.	(3,-1,2,1)	(-2,1,4,5)	(4,3,-2,1)	(-4,4,-1,2)
4.4.	(-2,1,3,2)	(-1,1,1,1)	(7,-1,2,0)	(5,1,1,-1)
4.5.	(-3,2,1,1)	(-2,3,3,4)	(1,1,5,-2)	(-3,4,-2,1)
4.6.	(-4,4,2,1)	(0,3,2,1)	(-1,1,1,-1)	(4,3,2,0)
4.7.	(0,1,-1,2)	(-1,1,2,2)	(0,-1,0,-1)	(0,1,1,2)
4.8.	(4,3,-2,1)	(-3,3,3,0)	(-2,0,1,1)	(-1,0,1,2)
4.9.	(-1,1,0,2)	(4,5,0,1)	(4,5,-1,2)	(-1,2,5,7)
4.10.	(0,1,-4,3)	(-3,2,1,-1)	(-2,-1,1,4)	(-2,3,-2,1)
4.11.	(-1,1,2,0)	(0,0,3,-1)	(0,-1,-2,-3)	(0,1,-1,2)
4.12.	(0,-3,2,1)	(-1,0,1,2)	(-1,1,-1,1)	(4,2,-2,3)

5. Являются ли линейно зависимыми векторы z_1 и z_2 из пространства $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$?

	z_1	z_2		z_1	z_2
5.1.	$1+2i$	$-2-4i$	5.2.	$-3+i$	$2+3i$
5.3.	$-2+3i$	$-1+i$	5.4.	$-4i$	$5-2i$
5.5.	$1+4i$	$-4-i$	5.6.	$-3+2i$	$-2+3i$
5.7.	$-1+i$	$1-i$	5.8.	$1-i$	$2-2i$
5.9.	$-2-i$	$4+2i$	5.10.	$3-i$	$1+3i$
5.11.	$-1-i$	$1-i$	5.12.	$1+i$	$3+3i$

6. Является ли линейно зависимой система векторов пространства $C_{[a,b]}$?

6.1. $\sin x, \ \cos x$; 6.2. $1, \ \sin x, \ \cos x$;
6.3. $\sin x, \ \sin 2x$; 6.4. $1, \ \cos x, \ \cos 2x$;
6.5. $1, \ \sin x, \ \sin^2 x$; 6.6. $1, \ \cos x, \ \cos^2 x$;
6.7. $1, \ \sin^2 x, \ \cos^2 x$; 6.8. $e^x, \ e^{2x}, \ e^{3x}$;
6.9. $2^x, \ 3^x, \ 6^x$; 6.10. $x, \ e^x, \ xe^x$;
6.11. $\sin x, \ \cos x, \ \sin 2x$;
6.12. $\sin x, \ \sin(x+1), \ \cos x$.

7. Являются ли векторы $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$ линейно зависимыми? В случае утвердительного ответа найдите нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
7. 1.	x^2+5	x^2-4x+3	$x^2+16x+1$
7. 2.	$6x+9$	$x^2-8x+12$	$2x^2+1$
7. 3.	$3x^2-5$	$2x+1$	x^2-x-1
7. 4.	$2x^2+x$	$6x^2-5x+3$	$2x^2+1$
7. 5.	$6x+5$	$2x^2+x+3$	x^2-1
7. 6.	x^2+4	$2x^2-x+4$	$3x^2+2x+1$
7. 7.	$-x^2-x+3$	$2x-5$	$6x^2+3x+3$
7. 8.	$-x^2+2x$	x^2+x+3	$5x^2-x+2$
7. 9.	$4x^2+2x+4$	$2x^2+x+2$	$3x+6$
7. 10.	$-2x^2+5x-7$	$4x^2+5x$	$2x^2+10x-7$
7. 11.	$-3x^2+2x+1$	$-x^2+x+2$	$5x-6$
7. 12.	$-x^2+3x$	$4x^2-4x+2$	$-7x^2+1$

8. Найдите все значения λ, при которых в пространстве $\mathbb{R}^4$ вектор c линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3.

	a_1	a_2	a_3	c
8. 1.	(1,2,3,-1)	(0,1,-2,3)	(-1,2,0,4)	$(1,1,2,\lambda)$
8. 2.	(-1,0,2,5)	(1,-1,2,0)	(2,0,1,5)	$(-1,-2,\lambda,3)$
8. 3.	(0,2,3,-4)	(0,1,-3,2)	(5,4,3,-2)	$(0,1,1,\lambda)$
8. 4.	(-2,1,4,2)	(1,2,4,-5)	(1,1,-1,2)	$(-1,1,0,\lambda)$
8. 5.	(0,3,2,1)	(3,-2,1,0)	(0,5,3,2)	$(0,2,-1,\lambda)$
8. 6.	(-1,1,1,-1)	(-4,2,5,3)	(-4,-2,1,0)	$(-2,1,\lambda,0)$
8. 7.	(-2,1,1,2)	(-1,0,3,5)	(-1,4,5,0)	$(-1,-1,\lambda,1)$
8. 8.	(3,-4,5,2)	(-1,1,2,4)	(4,2,-2,4)	$(-2,2,\lambda,2)$
8. 9.	(1,-2,2,0)	(-1,3,-2,0)	(-2,3,-3,1)	$(1,-1,-1,\lambda)$
8. 10.	(3,2,-1,1)	(-1,0,2,1)	(-3,1,2,-1)	$(-3,2,\lambda,1)$
8. 11.	(2,-2,3,-3)	(-2,4,1,0)	(4,-5,2,-1)	$(-2,3,1,\lambda)$
8. 12.	(4,2,-1,0)	(1,5,0,-1)	(5,2,-1,0)	$(1,-1,1,\lambda)$

9. Докажите, что линейные пространства V и W изоморфны.

9. 1. $V = M(2,\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}_3[x]$.

9. 2. $V = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^2$.

9. 3. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}_3[x]$.

9. 4. $V = M(2,\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}^4$.

9. 5. $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = V^3$.

9. 6. $V = \mathbb{C}_3[x]$, $W = \mathbb{C}^4$.

9. 7. $V = \mathbb{C}_3[x]$, $W = M(2,\mathbb{C})$.

9. 8. $V = \mathbb{C}^3$, $W = \mathbb{C}_2[x]$.

9. 9. $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{C} \right\}$ над $\mathbb{C}$, $W = \mathbb{C}_1[x]$.

9. 10. $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$ над $\mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_1[x]$.

9. 11. $V = \{(\alpha_1, 0, \alpha_2) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}\}$ над $\mathbb{C}$, $W = \mathbb{C}_1[x]$.

9. 12. $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C} \right\}$ над $\mathbb{C}$, $W = \mathbb{C}^3$.

2. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

2.1. Элементы теории

Пусть V — линейное пространство над полем P. Если для любого натурального числа n в пространстве V имеется n линейно независимых векторов, то пространство V называется *бесконечномерным.*

Пусть пространство V не бесконечномерное. Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *базисом пространства* V, если она линейно независима и любой вектор пространства V линейно выражается через векторы этой системы.

Теорема 2.1. *В любом не бесконечномерном линейном пространстве все базисы состоят из одного и того же числа векторов.*

Теорема 2.1 позволяет ввести следующие определения. Линейное не бесконечномерное пространство V над полем P называется *n-мерным*, если в нем есть базис, состоящий из n векторов. Число n называется *размерностью пространства* V. Нулевое пространство называется *нульмерным.* Все n-мерные пространства, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называются *конечномерными.*

Размерность линейного пространства V обозначается через $\dim V$. Будем обозначать также n-мерное пространство через V_n. Если линейное пространство V бесконечномерно, то пишем $\dim V = \infty$.

Линейные пространства V^3, V^2, V^1, P^n, $M(n, P)$, $P_n[x]$ конечномерны. Линейные пространства $P[x]$, $C_{[a,b]}$ являются бесконечномерными.

Теорема 2.2. *Для любого n-мерного линейного пространства справедливы следующие утверждения:*

1) *каждую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса;*

2) *любая линейно независимая система из n векторов является базисом.*

Из теоремы 2.2 следует, что в линейном пространстве V_n любая система из $n+1$ векторов является линейно зависимой.

Следующая теорема показывает, что при фиксированном поле P и размерности n существует единственное с точностью до изоморфизма n-мерное линейное пространство над полем P.

Теорема 2.3. *Два линейных пространства V и V' над одним и тем же полем P изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Пусть V_n — линейное пространство над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V_n. Тогда каждый вектор $x \in V_n$ можно представить в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые элементы поля P. Такое представление называется *разложением вектора x по векторам базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *координатами вектора x в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Теорема 2.4. *Координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно.*

Разложение вектора по векторам базиса удобно записывать в матричной форме. Если обозначим

$$(x) = (x_1 x_2 \ldots x_n), \quad [e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix},$$

то разложение $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ является элементом матрицы $(x)[e]$. В этом случае будем писать $x = (x)[e]$. Матрица (x) называется *координатной строкой вектора* x, а матрица $[e]$ — *базисным столбцом базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Теорема 2.5. 1. *При сложении двух векторов, задан-*

ных в одном базисе, соответствующие координаты складываются.

2. *При умножении вектора на скаляр его координаты умножаются на этот скаляр.*

3. *Для любых векторов $x, y \in V_n$ и любого $\alpha \in P$ выполняются равенства*

$$(x+y) = (x) + (y), \quad (\alpha x) = \alpha(x).$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса линейного пространства V_n над полем P. Разложим векторы системы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots + \alpha_{1n}e_n \\ e'_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{2n}e_n \\ \quad \ldots \\ e'_n = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n. \end{cases}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$*. Если возьмём базисные столбцы

$$[e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad [e'] = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \ldots \\ e'_n \end{pmatrix},$$

то указанная выше система в матричной форме будет иметь вид $[e'] = A[e]$.

Теорема 2.6. *Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому невырожденная.*

Из теоремы 2.6 следует, что матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому обратима. Более того, если A — матрица перехода от «старого» базиса к «новому», то A^{-1} — матрица перехода от «нового» базиса к «старому».

Следующая теорема устанавливает связь между координатами вектора x в разных базисах.

Теорема 2.7. 1. *Пусть (x) — координатная строка вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, (x') — координатная строка вектора x в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Если A — матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, то $(x) = (x')A$, $(x') = (x)A^{-1}$.*

2. *«Старая» координатная строка вектора равна «новой» координатной строке этого вектора, умноженной на матрицу перехода от «старого» базиса к «новому».*

3. *«Новая» координатная строка вектора равна «старой» координатной строке этого вектора, умноженной на матрицу, обратную к матрице перехода от «старого» базиса к «новому».*

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.1. Докажите, что комплексные числа $z_1 = -2 + i$ и $z_2 = -3 + 2i$ образуют базис действительного линейного пространства $\mathbb{C}$.

☐ Покажем, что векторы z_1 и z_2 линейно независимы и любой вектор линейного пространства $\mathbb{C}$ линейно выражается через z_1 и z_2. Из равенства

$$\alpha_1(-2 + i) + \alpha_2(-3 + 2i) = 0$$

легко получить систему уравнений относительно скаляров α_1 и α_2:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

поэтому система имеет единственное решение, которое, ввиду однородности системы, является нулевым, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Это означает, что векторы z_1 и z_2 линейно независимы.

Пусть $z = \alpha + \beta i$ — произвольный вектор линейного пространства $\mathbb{C}$. Покажем, что всегда можно найти скаляры γ_1 и γ_2 такие, что

$$\gamma_1(-2+i) + \gamma_2(-3+2i) = \alpha + \beta i.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 3\gamma_2 = \alpha \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = \beta, \end{cases}$$

получим $\gamma_1 = -2\alpha - 3\beta$, $\gamma_2 = \alpha + 2\beta$, т. е.

$$\alpha + \beta i = (-2\alpha - 3\beta)(-2+i) + (\alpha + 2\beta)(-3+2i).$$

Следовательно, любой вектор $z \in \mathbb{C}$ линейно выражается через z_1 и z_2. ⊠

Пример 2.2. Докажите, что векторы $a_1 = (1, -2, 3)$, $a_2 = (3, 2, -1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$. Найдите координаты вектора $c = (3, 5, 6)$ в этом базисе.

☐ Так как линейное пространство $\mathbb{R}^3$ имеет размерность три, то ввиду теоремы 2.2 достаточно проверить, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы. Пусть

$$\alpha_1(1, -2, 3) + \alpha_2(3, 2, -1) + \alpha_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

Переходим к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т. е. векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы, поэтому они образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$.

Найдём координаты c_1, c_2, c_3 вектора c в этом базисе. Пусть

$$c_1(1, -2, 3) + c_2(3, 2, -1) + c_3(1, 1, 0) = (3, 5, 6).$$

Из системы

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + c_3 = 3 \\ -2c_1 + 2c_2 + c_3 = 5 \\ 3c_1 - c_2 = 6 \end{cases}$$

получим $c_1 = 2/3$, $c_2 = -4$, $c_3 = 43/3$. ⊠

Пример 2.3. Найдите базис пространства решений следующей однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

☐ Найдём решения данной системы линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при x_1 и x_4

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то можно выбрать x_1 и x_4 главными неизвестными. Тогда

$$x_1 = -5x_2 - 2x_3, \quad x_4 = 7x_2 + 5x_3,$$

x_2 и x_3 — любые действительные числа. Каждое решение будем записывать в виде строки, т. е.

$$x = (-5x_2 - 2x_3, x_2, x_3, 7x_2 + 5x_3), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Тогда множество всех решений данной системы можно записать как множество

$$M = \{(-5\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 7\alpha + 5\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Нетрудно показать, что M образует действительное линейное пространство относительно операций сложения строк и умножения числа на строку.

Пусть $a = (-5\alpha_1 - 2\beta_1, \alpha_1, \beta_1, 7\alpha_1 + 5\beta_1)$ — произвольное решение данной системы. Тогда

$$a = (-5\alpha_1 - 2\beta_1, \alpha_1, \beta_1, 7\alpha_1 + 5\beta_1) = (-5\alpha_1, \alpha_1, 0, 7\alpha_1) + \\ +(-2\beta_1, 0, \beta_1, 5\beta_1) = \alpha_1(-5, 1, 0, 7) + \beta_1(-2, 0, 1, 5).$$

Строка $a_1 = (-5, 1, 0, 7)$ является вектором пространства M (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$). Строка $a_2 = (-2, 0, 1, 5)$ также вектор из M (при $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Итак, каждый вектор пространства M линейно выражается через векторы a_1 и a_2. Легко проверить, что a_1 и a_2 — линейно независимые векторы. Значит, a_1 и a_2 образуют базис пространства M решений данной однородной системы. ⊠

Пример 2.4. Матрицей перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' действительного линейного пространства является матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите координатную строку вектора $a = -e_1 + e_2$ в базисе e_1', e_2'.

□ Координатная строка вектора a в базисе e_1, e_2 имеет вид $(-1\ 1)$. Пусть $(\lambda_1\ \lambda_2)$ — координатная строка вектора a в базисе e_1', e_2'. Тогда $\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix} A$. Отсюда легко получить равенство $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix} A^{-1}$. Так как

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}.$$ ⊠

Пример 2.5. В пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы два базиса

$$e_1 = (3, 2), e_2 = (1, -2); \quad e_1' = (-2, -4), e_2' = (-1, -6).$$

Найдите матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'.

□ Первый способ. Так как векторы e_1, e_2 образуют базис пространства, то векторы e_1' и e_2' можно линейно выразить через e_1, e_2:

$$e_1' = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2, \quad e_2' = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2,$$

$$(-2, -4) = \alpha_{11}(3, 2) + \alpha_{12}(1, -2),$$

$$(-1, -6) = \alpha_{21}(3, 2) + \alpha_{22}(1, -2).$$

Каждое из этих равенств можно заменить системой уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha_{11} + \alpha_{12} = -2 \\ 2\alpha_{11} - 2\alpha_{12} = -4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\alpha_{21} + \alpha_{22} = -1 \\ 2\alpha_{21} - 2\alpha_{22} = -6. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем:

$$\alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{21} = -1, \quad \alpha_{22} = 2.$$

Матрицей перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' является матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Проверим, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ векторы $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 1)$ образуют базис. Действительно, они линейно независимы и любой вектор $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ линейно выражается через a_1 и a_2: $(b, c) = b(1, 0) + c(0, 1)$.

Далее $e_1 = 3a_1 + 2a_2$, $e_2 = a_1 - 2a_2$ или

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Аналогично

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Пусть A — матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису

e_1', e_2'. Тогда
$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$
Из равенства (2.1) получаем:
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$
Обращаясь к равенству (2.2), имеем:
$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$
Значит, искомая матрица перехода имеет вид:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \boxtimes$$

2.3. Вопросы для самоконтроля

1. Определение базиса линейного пространства.

1.1. Для каждого из линейных пространств V^1, V^2, V^3, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $M(n,\mathbb{R})$ укажите один из базисов.

1.2. Опишите все базисы линейного пространства V^3.

1.3. Имеет ли нулевое пространство базис?

1.4. Пусть в линейном пространстве V даны n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Что ещё надо потребовать, чтобы указанная система векторов была базисом в данном линейном пространстве?

1.5. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V над полем P. Будет ли базисом в V система векторов $\alpha e_1, \alpha e_2, \ldots, \alpha e_n$, где $\alpha \in P \setminus \{0\}$?

1.6. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V и $x \in V$. Докажите, что система $x, e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно зависима.

2. Размерность линейного пространства.

2.1. Какие линейные пространства называются конечномерными?

2.2. Как определяется размерность нулевого пространства?

2.3. Какие линейные пространства называются бесконечномерными?

2.4. Для каждого из действительных линейных пространств V^1, V^2, V^3, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $M(n,\mathbb{R})$ укажите размерность.

2.5. Докажите, что линейные пространства $C_{[a,b]}$ и $\mathbb{R}[x]$ бесконечномерны.

3. Изоморфизм линейных пространств.

3.1. Пусть $f : V \to V'$ — изоморфизм линейных пространств V и V' над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Докажите, что $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ — базис пространства V'.

3.2. Как строится изоморфизм линейных пространств V и V' над полем P, имеющих одинаковую размерность?

3.3. Докажите, что любое ненулевое действительное конечномерное линейное пространство изоморфно некоторому арифметическому пространству.

3.4. Докажите, что изоморфизм двух n-мерных действительных линейных пространств определяется неоднозначно.

3.5. Всякое ли действительное конечномерное линейное пространство V изоморфно пространству $M(n,\mathbb{R})$?

3.6. Докажите, что ненулевое действительное линейное пространство изоморфно некоторому линейному пространству $\mathbb{R}_n[x]$.

4. Координаты вектора.

4.1. Докажите, что координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно.

4.2. Приводит ли перестановка векторов в базисе к изменению базиса?

4.3. Запишите разложение вектора $x \in V_n$ по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в матричной форме.

4.4. Какие координаты имеет нулевой вектор в заданном базисе? Изменяются ли эти координаты при переходе к другому базису?

5. Связь между базисами линейного пространства.

5.1. Как определяется матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому?

5.2. Запишите матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 пространства V_3 к базису e_3, e_2, e_1.

5.3. Запишите формулу перехода от одного базиса линейного пространства к другому в матричной форме.

5.4. Докажите, что матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому обратима.

6. Преобразование координат вектора при изменении базиса.

6.1. Как изменятся координаты вектора $x \in V_3$ при переходе от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_3, e_2, e_1?

6.2. Запишите формулы преобразования координат, если известна матрица перехода от «нового» базиса к «старому».

6.3. Запишите формулы преобразования координат в матричной форме.

2.4. Индивидуальные задания

1. Докажите, что в линейном пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочлены $1, x-a, (x-a)^2 \ldots, (x-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$, образуют базис. Найдите координаты многочлена $f(x)$ в этом базисе.

	a	$f(x)$
1.1.	1	$x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4$
1.2.	-1	$x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 32x - 32$
1.3.	2	$x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4$
1.4.	-2	$x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$
1.5.	3	$x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1$
1.6.	-3	$x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9$
1.7.	4	$x^5 - 5x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$
1.8.	-4	$x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
1.9.	5	$x^5 + 3x^4 + x^2 - 3x$
1.10.	-5	$x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4$
1.11.	6	$x^5 - 2x^4 + x^2 - 4$
1.12.	-6	$x^5 - x^3 - x^2 + x - 1$

2. Докажите, что система векторов e_1, e_2, e_3 образует базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, и найдите координаты вектора a в этом базисе.

	e_1	e_2	e_3	a
2.1.	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,3)	(6,9,14)
2.2.	(2,1,-3)	(3,2,-5)	(1,-1,1)	(6,2,-7)
2.3.	(1,2,1)	(2,3,3)	(3,8,2)	(3,5,3)
2.4.	(3,5,8)	(5,14,13)	(1,9,2)	(2,3,3)
2.5.	(2,0,1)	(-1,2,3)	(-1,1,1)	(3,5,4)
2.6.	(0,1,-2)	(-2,0,3)	(1,-1,1)	(3,1,-1)
2.7.	(1,0,2)	(3,-1,4)	(2,-2,1)	(3,2,0)
2.8.	(-2,3,1)	(0,2,1)	(1,2,1)	(3,-4,2)
2.9.	(-3,0,1)	(0,2,3)	(-1,-1,-1)	(5,6,9)
2.10.	(3,1,-1)	(-2,0,1)	(2,7,3)	(10,-1,6)
2.11.	(4,0,5)	(-2,1,3)	(-5,1,-1)	(- 5,7,10)
2.12.	(-1,3,7)	(0,2,-1)	(1,-2,-8)	(-1,2,7)

3. Докажите, что комплексные числа z_1 и z_2 образуют базис действительного линейного пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$, и запишите координатную строку числа $-5 + 4i$ в этом базисе.

	z_1	z_2		z_1	z_2
3. 1.	$-1+2i$	$2-i$	3. 7.	$4+2i$	$-2i$
3. 2.	$2i$	$3+2i$	3. 8.	$-3+i$	$2-i$
3. 3.	$2-3i$	$1-i$	3. 9.	$-2-2i$	$1+3i$
3. 4.	$1+i$	$-5i$	3. 10.	$4-i$	$1+4i$
3. 5.	$-2+i$	$2+2i$	3. 11.	$-i$	$2+3i$
3. 6.	$3-5i$	$1+2i$	3. 12.	$1-2i$	$3+4i$

4. Докажите, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 образуют базис линейного пространства $M(2,\mathbb{R})$, и запишите разложение по векторам этого базиса вектора

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

	E_1	E_2	E_3	E_4
4. 1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
4. 2.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$
4. 3.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$
4. 4.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
4. 5.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. 6.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
4. 7.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$
4. 8.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. 9.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$

	E_1	E_2	E_3	E_4
4. 10.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$
4. 11.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
4. 12.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*. Найдите размерность и укажите фундаментальную систему решений пространства решений однородной системы линейных уравнений из главы 1.

6. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому в результате следующего преобразования?

6. 1. Поменять местами два первых вектора первого базиса.

6. 2. Поменять местами два последних вектора первого базиса.

6. 3. Поменять местами два произвольных вектора первого базиса.

6. 4. Поменять местами два первых вектора второго базиса.

6. 5. Поменять местами два последних вектора второго базиса.

6. 6. Поменять местами два произвольных вектора второго базиса.

6. 7. Записать векторы первого базиса в обратном порядке.

6. 8. Записать векторы второго базиса в обратном порядке.

6. 10. Поменять местами два вектора первого базиса и записать векторы второго базиса в обратном порядке.

6. 11. Поменять местами два вектора второго базиса и записать векторы первого базиса в обратном порядке.

6.12. Второй базис сделать первым, первый — вторым.

7. Даны векторы e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Докажите, что векторы e_1, e_2, e_3 и a_1, a_2, a_3 образуют базисы линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Найдите матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3.

Найдите матрицу перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису e_1, e_2, e_3.

Найдите координаты вектора $c = (2, 0, 1)$ в базисе e_1, e_2, e_3.

Найдите координаты вектора $x = e_1 - e_2 + 2e_3$ в базисе a_1, a_2, a_3.

	e_1	e_2	e_3
7.1.	$(2, 1, -3)$	$(3, 2, -5)$	$(1, -1, 1)$
7.2.	$(1, 2, 1)$	$(2, 3, 3)$	$(3, 8, 2)$
7.3.	$(3, 5, 8)$	$(5, 14, 13)$	$(1, 9, 2)$
7.4.	$(2, 0, 1)$	$(-1, 2, 3)$	$(-1, 1, 1)$
7.5.	$(0, 1, -2)$	$(-2, 0, 3)$	$(1, -1, 1)$
7.6.	$(1, 0, 2)$	$(3, -1, 4)$	$(2, -2, 1)$
7.7.	$(-2, 3, 1)$	$(0, 2, 1)$	$(1, 2, 1)$
7.8.	$(-3, 0, 1)$	$(0, 2, 3)$	$(-1, -1, -1)$
7.9.	$(3, 1, -1)$	$(-2, 0, 1)$	$(2, 7, 3)$
7.10.	$(4, 0, 5)$	$(-2, 1, 3)$	$(-5, 1, -1)$
7.11.	$(-1, 3, 7)$	$(0, 2, -1)$	$(1, -2, -8)$
7.12.	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 3)$

	a_1	a_2	a_3
7.1.	$(0, 1, -2)$	$(-2, 0, 3)$	$(1, -1, 1)$
7.2.	$(1, 0, 2)$	$(3, -1, 4)$	$(2, -2, 1)$
7.3.	$(-2, 3, 1)$	$(0, 2, 1)$	$(1, 2, 1)$
7.4.	$(-3, 0, 1)$	$(0, 2, 3)$	$(-1, -1, -1)$
7.5.	$(3, 1, -1)$	$(-2, 0, 1)$	$(2, 7, 3)$
7.6.	$(4, 0, 5)$	$(-2, 1, 3)$	$(-5, 1, -1)$
7.7.	$(-1, 3, 7)$	$(0, 2, -1)$	$(1, -2, -8)$
7.8.	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 3)$
7.9.	$(2, 1, -3)$	$(3, 2, -5)$	$(1, -1, 1)$
7.10.	$(1, 2, 1)$	$(2, 3, 3)$	$(3, 8, 2)$
7.11.	$(0, 3, -2)$	$(1, -1, -8)$	$(-1, 2, 7)$
7.12.	$(2, 0, 1)$	$(-1, 2, 3)$	$(-1, 1, 1)$

8. Пусть $(-3\ 2\ 0)$ — координатная строка вектора a в базисе e'_1, e'_2, e'_3 действительного линейного пространства V, A — матрица перехода от базиса e'_1, e'_2, e'_3 пространства V к базису e_1, e_2, e_3. Найдите координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3.

8.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 8.2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8.3 $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8.4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8.6. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8.7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 8.8. $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

8.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 8.10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

8.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 8.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

3.1. Элементы теории

Непустое множество W векторов линейного пространства V над полем P называется *подпространством*, если $x + y \in W$ и $\alpha x \in W$ для любых $x, y \in W$ и любого $\alpha \in P$. Линейное пространство V является своим подпространством. Множество $\{\theta\}$, содержащее лишь нулевой вектор θ пространства V, является подпространством этого пространства. Его называют *нулевым подпространством*.

Введем на множестве всех подпространств линейного пространства V операции сложения подпространств и пересечения подпространств. Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_k$ — конечная система подпространств линейного пространства V над полем P. *Суммой этих подпространств* называется множество всех векторов $x \in V$, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k,\ x_i \in W_i,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Обозначается сумма подпространств символом $W_1 + W_2 + \ldots + W_k$ или $\sum\limits_{i=1}^{k} W_i$. Итак, из определения следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \mid x_i \in W_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пересечением подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ называется множество всех векторов из V, которые принадлежат одновременно подпространствам $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Обозначается пересечение подпространств символом $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_k$ или $\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$. Аналогично определяется пересечение произвольной (не обязательно конечной) системы подпространств линейного пространства, а именно:

$$\bigcap_{i \in I} W_i = \{x \in V \mid x \in W_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Лемма 3.1. 1. *Сумма конечного множества подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V над полем P является подпространством.*

2. *Пересечение любого множества подпространств W_i, $i \in I$, линейного пространства V над полем P является подпространством.*

Всякое подпространство W линейного пространства V над полем P само является линейным пространством над этим полем, если выполнять операции сложения векторов из W и умножения их на скаляры из P по правилам, определённым для пространства V. Поэтому можно говорить о таких понятиях, как базис подпространства и размерность подпространства.

Лемма 3.2. *Каждое подпространство W n-мерного линейного пространства V конечномерно, причем $\dim W \leqslant n$. Если $\dim W = n$, то $W = V$.*

Теорема 3.3. *Пусть U и W — конечномерные подпространства линейного пространства V над полем P. Тогда $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.*

Эта формула называется *формулой Грассмана.*

Сумма подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V называется *прямой суммой*, если каждое подпространство W_i пересекается с суммой остальных подпространств по нулевому подпространству. Обозначается прямая сумма подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ символом $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ или $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} W_i$.

Теорема 3.4. *Для того, чтобы сумма S подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V над полем P была прямой, необходимо и достаточно, чтобы любой элемент $x \in S$ единственным образом представ-*

лялся в виде $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, *где* $x_i \in W_i$, $i = 1, 2, \ldots \ldots, k$.

Теорема 3.5. *Пусть* S — *прямая сумма подпространств* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *линейного пространства* V *над полем* P. *Если* $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ — *базис* W_1, $b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}$ — *базис* W_2, $\ldots$, $c_1, c_2, \ldots, c_{n_k}$ — *базис* W_k, *то* $a_1, \ldots \ldots, a_{n_1}, b_1, \ldots, b_{n_2}, \ldots, c_1, \ldots, c_{n_k}$ — *базис* S. *Размерность прямой суммы конечномерных подпространств равна сумме их размерностей.*

Общий способ конструирования подпространств конечномерного линейного пространства основан на следующем определении. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — система векторов линейного пространства V над полем P. Множество всех линейных комбинаций векторов системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой системы векторов* $a_1, \ldots, a_n$ и обозначается через $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Лемма 3.6. *Линейная оболочка* $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *системы векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *линейного пространства* V *является подпространством пространства* V.

Теорема 3.7. 1. *Если* $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — *базис подпространства* U *линейного пространства* V, *то* $U = L(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

2. *Если* $U = L(a_1, \ldots, a_k)$, $W = L(b_1, \ldots, b_s)$, *то* $U + W = L(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)$.

3.2. Примеры решения задач

Пример 3.1. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^2$ множество всех векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, у которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$?

☐ Пусть K — данное множество векторов, т. е.

$$K = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 0\}.$$

Пусть $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $b = (\beta_1, \beta_2)$ — произвольные векторы

из множества K. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 0$. Следовательно, $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$ принадлежит K, так как $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = 0 + 0 = 0$. Аналогично, при любом γ вектор $\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2)$ принадлежит K, поскольку $\gamma\alpha_1 + \gamma\alpha_2 = \gamma(\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma \cdot 0 = 0$. Значит, K — подпространство пространства $\mathbb{R}^2$. ⊠

Пример 3.2. Найти базис и размерность линейной оболочки подпространства $A + B$, а также размерность подпространства $A \cap B$, где $A = L(a_1, a_2)$, $B = L(b_1, b_2)$ — подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^2$, и $a_1 = (1, 1)$, $a_2 = (1, 0)$, $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$.

☐ По теореме 3.7 $A + B = L(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Найдем базис пространства $A + B$. Для этого будем из системы векторов a_1, a_2, b_1, b_2 последовательно удалять те векторы, которые линейно выражаются через предыдущие. Возьмем вектор $a_1 = (1, 1)$. Так как он ненулевой, то система из одного вектора a_1 линейно независима. Рассмотрим теперь систему векторов a_1, a_2: $\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, 0) = (0, 0)$,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0, \end{cases} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Значит система из двух векторов a_1 и a_2 линейно независима. Следовательно, $\dim(A + B) \geqslant 2$. Но по лемме 3.2 $\dim(A + B) \leqslant 2$. Поэтому $\dim(A + B) = 2$. По теореме 2.2, с. 22, система векторов a_1, a_2 является базисом подпространства $A + B$. Заметим также, что $A + B = \mathbb{R}^2$.

Из формулы Грассмана следует, что $\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B)$. Так как система из двух векторов a_1 и a_2 линейно независима и любой вектор из подпространства $A = L(a_1, a_2)$ линейно выражается через a_1 и a_2, то векторы a_1 и a_2 образуют базис подпространства A. Следовательно, $\dim A = 2$.

Система из одного вектора b_1 линейно независима, так как вектор b_1 ненулевой. Система из двух векторов b_1 и b_2 также линейно независима, так как $\lambda_1(2, 1) + \lambda_2(-1, 1) =$

$= (0, 0)$,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Следовательно, b_1 и b_2 образуют базис подпространства $B = L(b_1, b_2)$. Поэтому $\dim B = 2$ и $\dim(A \cap B) = 2 + 2 - 2 = 2$. ⊠

Пример 3.3. Пусть $A = L(a_1, a_2, a_3)$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^3$, $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, -1)$, $a_3 = (2, 1, -2)$. Принадлежит ли вектор $x = (2, 0, 1)$ подпространству A?

☐ Если x — вектор из A, то x является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3. Выясним, существуют ли скаляры λ_1, λ_2, λ_3 такие, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x$? Переходя к системе

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

и решая ее,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

получим, что система несовместна. Значит, вектор x не принадлежит подпространству A. ⊠

Пример 3.4. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны подпространства $A = L(a, b)$ и $B = L(c)$. Докажите, что $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$. Представьте вектор $x = (-1, 1, 2)$ в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, если $a = (1, 1, 1)$, $b = (-1, -2, 0)$, $c = (-1, -1, 1)$.

☐ Найдем базис и размерность подпространства $A + B$. По теореме 3.7 $A + B = L(a, b, c)$. Система из одного вектора $a = (1, 1, 1)$ линейно независима. Система из двух векторов a и b также линейно независима, так как

$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(-1, -2, 0) = (0, 0, 0)$,

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0, \end{cases} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Рассмотрим систему из трёх векторов a, b, c.

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(-1, -2, 0) + \lambda_3(-1, -1, 1) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Следовательно, система трёх векторов a, b, c является линейно независимой. Итак, векторы a, b, c образуют базис подпространства $A + B = L(a, b, c)$. Значит $\dim(A + B) = 3$ и $\mathbb{R}^3 = A + B$ ввиду леммы 3.2.

Пусть вектор $d = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in A \cap B$. Тогда $d \in A$ и $d \in B$. Так как $d \in A$, то $d = \lambda_1 a + \lambda_2 b$. Так как $d \in B$, то $d = \lambda_3 c$. Тогда $\lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_3 c$, $\lambda_1 a + \lambda_2 b - \lambda_3 c = \theta$. Поскольку система векторов a, b, c линейно независима, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т. е. $d = 0 \cdot c = \theta$. Значит, $A \cap B = \{\theta\}$ и $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Так как вектор $x \in \mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$, то x линейно выражается через a, b, c: $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = x$, откуда

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right), \ \lambda_3 = \frac{5}{2}, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_1 = -\frac{1}{2}.$$

Итак, $x = (-1/2)a - 2b + (5/2)c$. Так как a и b принадлежат A, а c принадлежит B, то

$$x_1 = (-1/2)a - 2b = (-1/2)(1,1,1) - 2(-1,-2,0) = \\ = (3/2, 7/2, -1/2) \in A,$$

$$x_2 = (5/2)(-1,-1,1) = (-5/2, -5/2, 5/2) \in B. \quad \boxtimes$$

Пример 3.5. Линейная оболочка векторов

$$a_1 = (1,-1,1,0),\ a_2 = (1,1,0,1),\ a_3 = (2,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$$

является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений. Найдите эту систему.

$\square$ Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Необходимо определить условия, связывающие x_1, x_2, x_3, x_4, при которых $x \in \in L(a_1, a_2, a_3)$. Пусть существуют скаляры λ_1, λ_2, λ_3 такие, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x$. Перейдем к системе

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = x_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = x_4 \end{cases}$$

и приведём расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -1 & -x_1 + x_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 - 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

Так как система имеет решение, то по теореме Кронекера–Капелли ранги матрицы системы и расширенной матрицы равны. Следовательно, должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Эта система и является искомой системой уравнений. $\boxtimes$

3.3. Вопросы для самоконтроля

1. Подпространства линейного пространства.

1.1. Докажите, что всякое подпространство линейного пространства V над полем P само является линейным пространством относительно операций, определённых в V.

1.2. Докажите, что непустое множество W линейного пространства V над полем P является его подпространством тогда и только тогда, когда $\alpha x + \beta y \in W$ для любых $x, y \in W$ и любых $\alpha, \beta \in P$.

1.3. Докажите, что множество L всех многочленов из $\mathbb{R}_n[x]$, $n > 1$, имеющих данный действительный корень α, является подпространством $\mathbb{R}_n[x]$. Найдите $\dim L$.

1.4. Как определяется сумма двух подпространств линейного пространства?

1.5. Разложите пространство V^3 в сумму двух подпространств.

1.6. Разложите пространство V^3 в сумму трёх подпространств.

1.7. Пусть W, U — подпространства линейного пространства V. Равны ли подпространства $W + U$ и $U + W$?

1.8. Докажите, что сумма конечного множества подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ пространства V совпадает с пересечением всех подпространств пространства V, содержащих $W_1, W_2, \ldots, W_k$.

2. Формула Грассмана.

2. 1. Докажите, что каждое подпространство конечномерного линейного пространства конечномерно.

2. 2. Докажите, что базис подпространства W линейного пространства V можно дополнить до базиса пространства V.

2. 3. Пусть W_1, W_2 — подпространства конечномерного линейного пространства V. Докажите, что если $\dim(W_1 + W_2) = 1 + \dim(W_1 \cap W_2)$, то сумма $W_1 + W_2$ равна одному из этих подпространств, а пересечение $W_1 \cap W_2$ — другому.

2. 4. Пусть W_1, W_2 — подпространства конечномерного линейного пространства V. Докажите, что если $\dim W_1 + \dim W_2 > \dim V$, то $W_1 \cap W_2 \neq \{\theta\}$.

2. 5. Изложите схему доказательства теоремы 3.3.

3. Прямая сумма подпространств.

3. 1. Сформулируйте определение прямой суммы двух подпространств линейного пространства.

3. 2. Сформулируйте определение прямой суммы трёх подпространств линейного пространства.

3. 3 Как построить базис прямой суммы подпространств, зная базисы этих подпространств?

3. 5. Разложите пространство V^3 в прямую сумму двух подпространств.

3. 6. Разложите пространство V^3 в прямую сумму трёх подпространств.

4. Линейная оболочка системы векторов.

4. 1. Из каких векторов состоит подпространство $L(a)$?

4. 2. Из каких векторов состоит подпространство $L(a, b)$?

4. 3. Оцените размерность подпространства $L(a_1, \ldots, a_k)$.

4. 4. Пусть $U = L(a_1, \ldots, a_k)$, $W = L(b_1, \ldots, b_s)$. Докажите, что $U + W = L(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)$.

4. 5. Докажите, что для любого подпространства W n-мерного линейного пространства V найдётся такое подпространство U, что $V = W \oplus U$.

3.4. Индивидуальные задания

1. 1–1. 6. Являются ли подпространствами линейного пространства $M(n, \mathbb{C})$ следующие множества?

1. 1. Множество всех невырожденных матриц.

1. 2. Множество всех вырожденных матриц.

1. 3. Множество всех матриц с единичным определителем.

1. 4. Множество всех симметрических матриц.

1. 5. Множество всех кососимметрических матриц.

1. 6. Множество всех матриц, перестановочных с фиксированной квадратной матрицей $A \in M(n, \mathbb{C})$.

1. 7–1. 12. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{C}^n$ множество всех векторов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, координаты которых удовлетворяют следующим условиям?

1. 7. $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$.

1. 8. $\alpha_1 = -\alpha_n$.

1. 9. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

1. 10. $\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}$.

1. 11. $\alpha_1 - \alpha_n = 0$.

1. 12. $\alpha_1 = -(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$.

2. 1–2. 6. Является ли подпространством линейного пространства $C_{[a,b]}$ множество всех функций $f(x)$, удовлетворяющих следующим условиям?

2. 1. $f(a) = 0$.

2. 2. $f(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. 3. $f(x) = a + b\sin^2 x + c\cos^2 x$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. 4. $f(x) = a + b\sin x + c\cos x$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. 5. $f(x) = ax^2 + be^{-x} + c\sin x$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. 6. $f'(b) = 0$.

2. 7–2. 12. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_n[x]$ множество всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих следующим условиям?

2. 7. $f(-x) = f(x)$.

2. 8. $f(-x) = -f(x)$.

2.9. $f(0) = 0$.

2.10. $2f(1) - f(2) = 0$.

2.11. Коэффициенты при чётных степенях x нулевые.

2.12. Все коэффициенты равны между собой.

3. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ системы векторов из $\mathbb{R}^4$.

	a_1	a_2	a_3	a_4
3.1.	(1,0,0,-1)	(2,1,1,0)	(1,1,1,1)	(1,2,3,4)
3.2.	(1,1,1,1)	(1,1,-1,-1)	(2,2,0,0)	(1,-1,-1,0)
3.3.	(1,2,1,2)	(2,1,2,1)	(1,-1,1,-1)	(1,1,1,1)
3.4.	(-1,1,0,1)	(2,0,1,-1)	(1,1,-1,1)	(0,2,-1,2)
3.5.	(0,1,1,2)	(-3,1,0,-1)	(-1,2,1,-1)	(2,1,1,0)
3.6.	(-1,1,2,1)	(-1,2,1,3)	(0,1,-1,2)	(3,2,0,1)
3.7.	(1,-1,1,-1)	(0,-1,2,2)	(1,-2,3,1)	(0,-1,1,1)
3.8.	(0,1,0,1)	(1,0,1,0)	(2,2,2,2)	(-1,1,1,-1)
3.9.	(0,-2,1,1)	(1,-1,2,1)	(1,-3,3,2)	(-2,2,1,3)
3.10.	(4,1,0,-1)	(-2,1,2,3)	(-1,3,0,2)	(2,2,2,2)
3.11.	(-1,0,2,3)	(1,2,0,1)	(4,3,-1,2)	(0,1,3,2)
3.12.	(2,-1,1,0)	(2,4,1,-1)	(4,3,2,-1)	(-1,1,1,2)

4.1–4.4. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3)$ векторов из $\mathbb{R}_2[x]$.

	a_1	a_2	a_3
4.1.	$x^2 + x + 1$	$x^2 - x$	$-2x - 1$
4.2.	$3x^2 - 1$	$2x + 1$	$x^2 + x - 1$
4.3.	$2x - 1$	$x^2 + 2x - 1$	$x^2 + x$
4.4.	$-x^2 + 1$	$2x^2 + x + 2$	$x^2 - 3x$

4.5–4.8. Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3)$ векторов из действительного линейного пространства $\mathbb{C}$.

	a_1	a_2	a_3
4.5.	$1 + 2i$	$3 - i$	$5 + 2i$
4.6.	$2 - i$	$3i$	$1 + i$
4.7.	$-3 + 2i$	$2 + i$	$1 - i$
4.8.	$-1 - i$	$3 + 4i$	$-2i$

4.9–4.12. Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(a_1, a_2, a_3)$ векторов из $M(2, \mathbb{R})$.

	a_1	a_2	a_3
4.9.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
4.10.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
4.11.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
4.12.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

5. Найдите размерность и базис суммы, а также размерность пересечения подпространств $L(a_1, a_2, a_3)$ и $L(b_1, b_2)$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$. Принадлежит ли вектор x пространствам $L(a_1, a_2, a_3)$, $L(b_1, b_2)$?

	a_1	a_2	a_3
5.1.	$(1, -1, 2)$	$(3, 0, 2)$	$(2, 1, 0)$
5.2.	$(0, 1, 3)$	$(-1, 2, 0)$	$(-1, 3, 3)$
5.3.	$(-2, 3, -1)$	$(1, 1, -2)$	$(-3, 2, 1)$
5.4.	$(0, -1, 1)$	$(1, 2, -2)$	$(1, 1, -1)$
5.5.	$(-2, 1, 0)$	$(0, 1, -1)$	$(2, -2, 1)$
5.6.	$(1, 1, -1)$	$(-2, 0, 3)$	$(-1, 1, 2)$
5.7.	$(3, 1, -1)$	$(-1, 2, 0)$	$(2, 3, -1)$
5.8.	$(-1, 0, 1)$	$(2, -1, 3)$	$(1, -1, 4)$
5.9.	$(0, 1, -1)$	$(-1, -1, 2)$	$(-1, 0, 1)$
5.10.	$(4, -3, 1)$	$(-3, 2, 0)$	$(1, -1, 1)$

	a_1	a_2	a_3
5.11.	$(0,-1,2)$	$(1,3,0)$	$(1,2,2)$
5.12.	$(-2,1,2)$	$(0,-2,-1)$	$(-2,-1,1)$.

	b_1	b_2	x
5.1.	$(1,1,3)$	$(0,1,2)$	$(1,3,5)$
5.2.	$(-1,2,3)$	$(3,2,1)$	$(0,-1,2)$
5.3.	$(3,2,3)$	$(-1,0,1)$	$(5,-4,1)$
5.4.	$(-2,1,2)$	$(3,0,1)$	$(-2,2,4)$
5.5.	$(1,1,-1)$	$(4,-1,0)$	$(-1,2,3)$
5.6.	$(0,1,3)$	$(2,1,0)$	$(4,3,2)$
5.7.	$(-1,3,1)$	$(4,0,2)$	$(5,1,3)$
5.8.	$(4,1,2)$	$(-1,2,4)$	$(3,2,0)$
5.9.	$(5,-1,2)$	$(-1,3,1)$	$(1,2,2)$
5.10.	$(-4,2,0)$	$(1,-1,3)$	$(0,1,1)$
5.11.	$(-3,2,1)$	$(4,3,-1)$	$(-1,-1,1)$
5.12.	$(3,2,0)$	$(-3,1,1)$	$(4,3,2)$

6. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства $A = L(a_1, a_2)$ и $B = L(a_3, a_4)$. Докажите, что $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$. Представьте вектор x в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A$, $x_2 \in B$.

	a_1	a_2	a_3
6.1.	$(1,1,-1,-1)$	$(3,-1,1,-2)$	$(2,1,2,-3)$
6.2.	$(1,2,3,-1)$	$(2,3,-4,4)$	$(3,-4,2,1)$
6.3.	$(1,2,-2,1)$	$(2,1,3,2)$	$(3,-4,1,-3)$
6.4.	$(2,3,-3,1)$	$(1,-4,5,-2)$	$(3,4,-3,-4)$
6.5.	$(3,4,3,-4)$	$(4,5,-3,1)$	$(2,3,-4,2)$
6.6.	$(1,0,2,-3)$	$(1,3,0,-1)$	$(2,-2,1,0)$
6.7.	$(3,1,-2,4)$	$(1,3,2,3)$	$(2,1,-1,2)$
6.8.	$(8,6,3,2)$	$(-4,-1,-1,1)$	$(4,1,2,2)$
6.9.	$(2,5,1,3)$	$(4,6,3,5)$	$(4,1,1,7)$
6.10.	$(2,5,4,1)$	$(1,3,2,1)$	$(2,10,9,7)$
6.11.	$(2,2,-1,1)$	$(4,3,-1,2)$	$(3,5,-3,4)$
6.12.	$(2,3,11,5)$	$(1,1,5,2)$	$(2,1,3,2)$

	a_4	x
6.1.	$(1,2,3,-3)$	$(0,2,0,-1)$
6.2.	$(2,-3,1,-4)$	$(0,9,-3,2)$
6.3.	$(4,1,3,1)$	$(3,6,5,6)$
6.4.	$(1,1,2,-3)$	$(0,-5,5,3)$
6.5.	$(1,2,3,-1)$	$(3,4,4,-2)$
6.6.	$(3,5,-3,2)$	$(2,7,-2,-1)$
6.7.	$(0,1,5,-4)$	$(-1,-1,-4,2)$
6.8.	$(0,2,5,1)$	$(-4,-5,-2,-3)$
6.9.	$(2,-3,3,2)$	$(6,23,1,10)$
6.10.	$(3,1,9,2)$	$(-3,4,-4,4)$
6.11.	$(3,2,-2,2)$	$(-2,0,1,-1)$
6.12.	$(1,1,3,2)$	$(0,1,5,2)$

7. Линейная оболочка системы векторов a_1, a_2, a_3 из задания 3 является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений. Найдите эту систему уравнений.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

4.1. Элементы теории

Пусть V и W — линейные пространства над одним и тем же полем P. Отображение $f : V \to W$, удовлетворяющее условиям

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ для всех } x, y \in V, \tag{4.1}$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \text{ для всех } x \in V, \alpha \in P, \tag{4.2}$$

называется *линейным отображением пространства V в пространство W*. Условие (4.1) называется *условием аддитивности отображения f*. Условие (4.2) называется *условием однородности отображения f*.

Различают несколько типов линейных отображений линейных пространств: линейные операторы, изоморфизмы, линейные преобразования (автоморфизмы).

Линейным оператором пространства V называется линейное отображение пространства V в себя.

Взаимно однозначное линейное отображение линейного пространства V в пространство W называется *изоморфизмом* линейных пространств V и W.

Взаимно однозначное линейное отображение пространства V в себя называется *линейным преобразованием* или *автоморфизмом* линейного пространства V.

Чтобы избежать путаницы в терминах линейных отображений, полезно руководствоваться следующей таблицей.

Термин	Выделяющее свойство
Линейное отображение	$f : V \to W$
Линейный оператор	$f : V \to V$
Изоморфизм	$f : V \to W$ f — биекция
Линейное преобразование (автоморфизм)	$f : V \to V$ f — биекция

Лемма 4.1. *Пусть V и W — линейные пространства над полем P. Отображение $f : V \to W$ является линейным отображением пространства V в пространство W тогда и только тогда, когда*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для любых $x, y \in V$ и любых $\alpha, \beta \in P$.

Лемма 4.2. *Пусть V и W — линейные пространства над полем P, $f : V \to W$ — линейное отображение. Тогда:*

1) *если θ и θ' — нулевые векторы соответственно пространств V и W, то $f(\theta) = \theta'$;*

2) *$f(-x) = -f(x)$ при любом $x \in V$;*

3) *при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ и при любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n \in P$ имеет место равенство*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i);$$

4) *если система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пространства V линейно зависима, то линейно зависима и система векторов $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.*

Следующая теорема показывает, что для того, чтобы задать линейное отображение из V в W, достаточно задать образы векторов некоторого базиса пространства V, причем этими образами могут быть произвольные векторы пространства W.

Теорема 4.3. *Пусть даны линейные пространства V и W над полем P, базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V и произвольная система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства W. Тогда существует единственное линейное отображение $f : V \to W$, при котором $f(e_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Следствие. *Линейный оператор f линейного пространства V над полем P однозначно определяется векторами $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — некоторый базис V.*

Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис этого пространства. Тогда $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ — векторы из V. Разложим их по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}e_2 + \ldots + \lambda_{1n}e_n \\ f(e_2) = \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \ldots + \lambda_{2n}e_n \\ \quad \ldots \\ f(e_n) = \lambda_{n1}e_1 + \lambda_{n2}e_2 + \ldots + \lambda_{nn}e_n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Пусть $[e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Через $f([e])$ обозначим столбец $\begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \ldots \\ f(e_n) \end{pmatrix}$.

Тогда система равенств (4.3) равносильна матричному равенству $f([e]) = A[e]$.

Теорема 4.4. *Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, $x \in V$. Тогда координатная строка вектора $f(x)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равна координатной строке вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, умноженной на матрицу линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Следствие. *Если A — матрица линейного оператора f линейного пространства V_n, то*

$$(f(x)) = (x)A \tag{4.4}$$

для любого вектора $x \in V_n$.

Лемма 4.5. *Пусть A и B — $(n \times n)$-матрицы над полем P. Если $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)A = (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)B$ для любой строки $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$, $\alpha_i \in P$, то $A = B$.*

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах.

Теорема 4.6. *Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — базисы пространства V, T — матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Если A — матрица оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, B – матрица оператора f в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, то $B = TAT^{-1}$.*

Пусть f — линейное отображение пространства V в пространство W. Множество

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = \theta' \in W\}$$

называется *ядром линейного отображения f*. Множество

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) \in W \mid x \in V\}$$

называется *образом линейного отображения f*.

Если f — линейный оператор пространства V, то говорят о ядре и образе оператора.

Лемма 4.7. *Ядро и образ линейного оператора про-*

странства V являются линейными подпространствами пространства V.

На практике ядро и образ линейного оператора находится, как правило, с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.8. *Пусть f — линейный оператор пространства V_n, A — матрица оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда:*

1) $\mathrm{Im} f = L(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$;

2) вектор $x \in \mathrm{Ker} f$ тогда и только тогда, когда $(x)A = (00\ldots0)$.

Рангом линейного оператора f конечномерного линейного пространства V называется размерность подпространства $\mathrm{Im} f$. *Дефектом линейного оператора f* конечномерного пространства V называется размерность пространства $\mathrm{Ker} f$. Итак,

$$\mathrm{rank} f = \dim \mathrm{Im} f, \quad \mathrm{def} f = \dim \mathrm{Ker} f.$$

Теорема 4.9. *Сумма ранга и дефекта линейного оператора f конечномерного линейного пространства V равна размерности V: $\dim V = \mathrm{rank} f + \mathrm{def} f$.*

Пусть f, g — линейные операторы пространства V над полем P. *Суммой операторов f и g* называется отображение $f+g$ пространства V в себя, определяемое для каждого $x \in V$ формулой $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. *Произведением скаляра $\lambda \in P$ и линейного оператора f* называется отображение λf пространства V в себя, определяемое для каждого $x \in V$ формулой $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Лемма 4.10. *Если f, g — линейные операторы пространства V над полем P, $\lambda \in P$, то $f+g$ и λf — также линейные операторы пространства V.*

В дальнейшем множество всех линейных операторов пространства V над полем P будем обозначать через $\mathrm{Hom}_P V$ или $L(V)$. Проверка аксиом линейного пространства показывает, что множество $\mathrm{Hom}_P V$ является линейным пространством над полем P.

Лемма 4.11. *Пусть f, g — линейные операторы линейного пространства V_n над полем P, а A и B — матрицы операторов f и g в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда матрицами операторов $f+g$ и λf, $\lambda \in P$, в том же базисе являются матрицы $A+B$ и λA.*

Теорема 4.12. *Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем P. Тогда $\mathrm{Hom}_P V \cong M(n, P)$.*

Пусть f, g — линейные операторы пространства V. *Произведением операторов f и g* называется отображение fg пространства V в себя, определяемое для каждого $x \in V$ формулой $(fg)(x) = f(g(x))$.

Лемма 4.13. *Если $f, g \in \mathrm{Hom}_P V$, то $fg \in \mathrm{Hom}_P V$.*

Лемма 4.14. *Пусть f, g — линейные операторы пространства V_n, A, B — матрицы операторов f и g соответственно в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда BA — матрица оператора fg в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Линейный оператор f пространства V над полем P называется *обратимым*, если существует линейный оператор g пространства V такой, что $fg = gf = \varepsilon$, где ε — тождественный оператор пространства V. Оператор g называется *обратным* для оператора f и обозначается через f^{-1}. Отметим, что матрица обратного оператора для f равна обратной матрице к матрице оператора f.

Теорема 4.15. *Линейный оператор $f \in \mathrm{Hom}_P V$ обратим тогда и только тогда, когда f — линейное преобразование пространства V.*

Множество всех линейных преобразований линейного пространства V над полем P будем обозначать через $\mathrm{Aut}_P V$ или $GL(V)$.

Теорема 4.16. *Множество $\mathrm{Aut}_P V$ является группой относительно операции умножения линейных преобразований пространства V.*

4.2. Примеры решения задач

Пример 4.1. В линейном пространстве с базисом e_1, e_2 отображение φ переводит любой вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2$ в вектор $\varphi(x) = (3x_1 - 2x_2)e_1 + (2x_1 + x_2)e_2$. Докажите, что φ — линейный оператор и найдите его матрицу в базисе e_1, e_2.

□ Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2$ и $y = y_1e_1 + y_2e_2$ — произвольные векторы данного пространства. Тогда

$$\varphi(x+y) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + y_1e_1 + y_2e_2) = \varphi((x_1+y_1)e_1+$$
$$+(x_2+y_2)e_2) = (3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2))e_1 + (2(x_1+y_1)+$$
$$+(x_2+y_2))e_2 = (3x_1 - 2x_2)e_1 + (3y_1 - 2y_2)e_1 + (2x_1+$$
$$+x_2)e_2 + (2y_1+y_2)e_2 = ((3x_1 - 2x_2)e_1 + (2x_1+x_2)e_2)+$$
$$+((3y_1 - 2y_2)e_1 + (2y_1+y_2)e_2) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2)+$$
$$+\varphi(y_1e_1 + y_2e_2) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

т. е. выполняется условие аддитивности.

Пусть α — произвольный элемент поля. Тогда

$$\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha(x_1e_1 + x_2e_2)) = \varphi(\alpha x_1e_1 + \alpha x_2e_2) =$$
$$= (3\alpha x_1 - 2\alpha x_2)e_1 + (2\alpha x_1 + \alpha x_2)e_2 =$$
$$= \alpha(3x_1 - 2x_2)e_1 + \alpha(2x_1 + x_2)e_2 =$$
$$= \alpha((3x_1 - 2x_2)e_1 + (2x_1 + x_2)e_2) =$$
$$= \alpha\varphi(x_1e_1 + x_2e_2) = \alpha\varphi(x),$$

т. е. выполняется условие однородности. Значит, φ — линейное отображение. Поскольку φ отображает данное пространство в себя, то φ — линейный оператор.

Найдём разложение по векторам базиса e_1, e_2 векторов $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$.

$$\varphi(e_1) = \varphi(1e_1 + 0e_2) = (3\cdot 1 - 2\cdot 0)e_1 + (2\cdot 1 + 0)e_2 =$$
$$= 3e_1 + 2e_2. \quad \varphi(e_2) = \varphi(0\cdot e_1 + 1\cdot e_2) =$$
$$= (3\cdot 0 - 2\cdot 1)e_1 + (2\cdot 0 + 1)e_2 = -2e_1 + e_2.$$

Следовательно, матрица линейного оператора в базисе e_1, e_2 имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 4.2. Составьте матрицу линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 линейного пространства, если φ векторы $x_1 = e_1 - e_2$ и $x_2 = e_1 + e_2$ переводит, соответственно, в векторы $y_1 = e_1 + 2e_2$ и $y_2 = -e_1 + 3e_2$. Найдите образ вектора $z = -2e_1 + e_2$ под действием оператора φ.

□ Координаты векторов $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \varphi(x_1) \\ y_2 = \varphi(x_2). \end{cases}$$

Так как φ — линейный оператор, то

$$\varphi(x_1) = \varphi(e_1) - \varphi(e_2), \quad \varphi(x_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2).$$

Тогда

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = \varphi(e_1) - \varphi(e_2) \\ -e_1 + 3e_2 = \varphi(e_1) + \varphi(e_2). \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим $5e_2 = 2\varphi(e_1)$, откуда $\varphi(e_1) = (5/2)e_2$. Следовательно, координаты вектора $\varphi(e_1)$ равны 0 и 5/2. Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $2e_1 - e_2 = -2\varphi(e_2)$, откуда $\varphi(e_2) = -e_1 + (1/2)e_2$. Значит, координаты $\varphi(e_2)$ равны -1 и $1/2$. Следовательно, матрица линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Координатная строка вектора $\varphi(z)$ находится по правилу $(\varphi(z)) = (z)A$, где A — матрица линейного оператора. Тогда

$$(\varphi(z)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9/2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\varphi(z) = -e_1 - (9/2)e_2$. ⊠

Пример 4.3. В линейном пространстве с базисом e_1, e_2 даны векторы $a_1 = e_1 + 2e_2$, $a_2 = e_1 + 3e_2$, $b_1 = 3e_1 + 2e_2$,

$b_2 = e_1 + e_2$. Векторы a_1, a_2 и b_1, b_2 образуют базисы этого пространства. В базисе a_1, a_2 линейный оператор φ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Вычислите матрицу оператора φ в базисе b_1, b_2.

□ Матрицу линейного оператора φ в базисе b_1, b_2 найдем по формуле $B = TAT^{-1}$, где B — матрица оператора φ в базисе b_1, b_2, A — матрица оператора φ в базисе a_1, a_2, T — матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. Пусть матрица T имеет вид $T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$. Тогда

$$b_1 = \lambda_{11} a_1 + \lambda_{12} a_2, \quad b_2 = \lambda_{21} a_1 + \lambda_{22} a_2.$$

Из первого равенства получаем:

$$3e_1 + 2e_2 = \lambda_{11}(e_1 + 2e_2) + \lambda_{12}(e_1 + 3e_2).$$

Переходя к системе

$$\begin{cases} \lambda_{11} + \lambda_{12} = 3 \\ 2\lambda_{11} + 3\lambda_{12} = 2 \end{cases}$$

и решая её, находим $\lambda_{11} = 7$, $\lambda_{12} = -4$. Аналогично, из второго равенства $e_1 + e_2 = \lambda_{21}(e_1 + 2e_2) + \lambda_{22}(e_1 + 3e_2)$,

$$\begin{cases} \lambda_{21} + \lambda_{22} = 1 \\ 2\lambda_{21} + 3\lambda_{22} = 1, \end{cases} \quad \lambda_{21} = 2, \ \lambda_{22} = -1.$$

Итак, матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2 есть матрица $T = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Так как $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, то матрица оператора φ в базисе b_1, b_2 равна

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 68 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}. \qquad \boxtimes$$

Пример 4.4. В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ линейный оператор φ задан матрицей C в некотором базисе. Найдите базисы ядра и образа линейного оператора φ. Укажите

ранг и дефект оператора φ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

□ Пусть вектор $x = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}$ принадлежит ядру оператора $\mathrm{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi(x) = \theta$. Так как $(\varphi(x)) = (x)C$, то получаем равенство $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} C$, которое равносильно однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, ядро $\mathrm{Ker}\varphi$ оператора φ является пространством решений этой однородной системы. Найдем его.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $x_1 = -2x_2 + x_3$, x_2, x_3 — любые действительные числа. Пространство решений системы имеет вид

$$M = \{(-2\alpha + \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Найдем фундаментальную систему решений. Пусть $a = (-2\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ — произвольный вектор из M. Тогда

$$a = (-2\alpha + \beta, \alpha, \beta) = (-2\alpha, \alpha, 0) + (\beta, 0, \beta) = \\ = \alpha(-2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1).$$

Векторы $(-2, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$ являются векторами пространства M. Первый — при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, второй — при $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Итак, каждый вектор из M является линейной комбинацией векторов $(-2, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$. Так как

$$\alpha_1(-2, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0, \end{cases} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

то эти векторы $(-2, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$ линейно независимы. Следовательно, они образуют базис ядра $\mathrm{Ker}\varphi$ оператора φ. Значит, $\mathrm{def}\varphi = 2$. Образ $\mathrm{Im}\varphi$ оператора φ есть линейная оболочка $L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$, где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана матрица C. Тогда

$$\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_2 + e_3, \quad \varphi(e_2) = -2e_1 + 4e_2 + 2e_3,$$
$$\varphi(e_3) = e_1 - 2e_2 - e_3.$$

Так как $\varphi(e_1) \neq \theta$, то система из одного вектора $\varphi(e_1)$ линейно независима. Система из двух векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ линейно зависима, так как

$$\alpha_1(-e_1 + 2e_2 + e_3) + \alpha_2(-2e_1 + 4e_2 + 2e_3) = \theta,$$
$$\begin{cases} -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

$\alpha_1 = -2\alpha_2$, α_2 — любое число из $\mathbb{R}$. Добавляя к $\varphi(e_1)$ вектор $\varphi(e_3)$, также получим линейно зависимую систему. Значит, $\varphi(e_1)$ — базис образа $\mathrm{Im}\varphi$ оператора φ. Следовательно, $\mathrm{rank}\varphi = 1$. ⊠

4.3. Вопросы для самоконтроля

1. Классификация линейных отображений. Примеры линейных отображений.

1.1. На основании каких признаков осуществляется классификация линейных отображений линейных пространств?

1.2. Пусть линейное пространство V над полем P является прямой суммой подпространств U_1 и U_2. Докажите, что оператор p, который каждому вектору $x \in V$ с

разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$, ставит в соответствие вектор x_1 этого разложения, является линейным. Оператор p называется *оператором проектирования пространства V на U_1 параллельно U_2.*

1.3. Пусть $V = U_1 \oplus U_2$. Докажите, что оператор s, который каждому вектору $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$, ставит в соответствие вектор $s(x) = x_1 - x_2$, является линейным. Оператор s называется *симметрией относительно подпространства U_1 в направлении U_2.*

1.4. Докажите, что в одномерном линейном пространстве всякий линейный оператор имеет вид $x \longmapsto \alpha x$, где α — некоторый скаляр, x — вектор линейного пространства.

2. Свойства линейных отображений.

2.1. Как объединить условия аддитивности и однородности линейного отображения в одно условие?

2.2. Опираясь на свойства линейных отображений, докажите, что отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемое для каждого $x \in \mathbb{R}$ формулой $f(x) = 2x + 1$, не является линейным.

2.3. Верно ли, что линейный оператор переводит линейно независимую систему векторов в линейно независимую?

2.4. Докажите лемму 4.2.

3. Построение линейного отображения.

3.1. Докажите, что линейный оператор f линейного пространства V_n является нулевым элементом пространства $\mathrm{Hom}_P V_n$, если он все векторы некоторого базиса пространства V_n переводит в нулевой вектор.

3.2. Что можно сказать о линейном операторе f пространства V_n, если он все векторы некоторого базиса пространства V_n оставляет на месте?

3.3. Как задать линейный оператор конечномерного линейного пространства?

4. Матрица линейного оператора.

4. 1. Докажите, что линейные операторы f и g конечномерного линейного пространства V равны тогда и только тогда, когда они в некотором базисе пространства V имеют равные матрицы.

4. 2. Пусть линейное пространство V является прямой суммой подпространств U_1 и U_2 с базисами $e_1, e_2, \dots, e_k$ и $e_{k+1}, \dots, e_n$. Найдите матрицу оператора проектирования пространства V на U_1 параллельно U_2 в базисе $e_1, e_2, \dots$ $\dots, e_n$.

4. 3. Пусть линейное пространство V является прямой суммой подпространств U_1 и U_2 с базисами $e_1, e_2, \dots, e_k$ и $e_{k+1}, \dots, e_n$. Найдите матрицу оператора симметрии относительно подпространства U_1 в направлении U_2 в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

4. 4. Всегда ли обратима матрица линейного оператора?

5. Координаты образа вектора.

5. 1. Пусть H_α — оператор гомотетии пространства V_n над полем P, т. е. $H_\alpha : x \to \alpha x$, $x \in V_n$. Сравните координаты векторов x и $H_\alpha(x)$ в произвольном базисе пространства V_n.

5. 2. Запишите формулу (4.4) в координатной форме.

5. 3. Пусть f — линейный оператор пространства V_n, x и y — различные векторы пространства V_n. Всегда ли $(f(x)) \neq (f(y))$?

6. Изменение линейного оператора при замене базиса.

6. 1. Докажите, что матрицы $A, B \in M(n, P)$ равны, если для строки $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in P$, выполняется равенство:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} B.$$

6. 2. Как изменится матрица линейного оператора f трехмерного пространства V при переходе от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_2, e_1, e_3?

6. 3. Как найти матрицу линейного оператора в «старом» базисе, если известна матрица этого линейного оператора в «новом» базисе?

7. Ядро и образ линейного отображения.

7. 1. Сформулируйте определение ядра и образа линейного оператора пространства V.

7. 2. Найдите ядро и образ оператора проектирования пространства $V = U_1 \oplus U_2$ на U_1 параллельно U_2.

7. 3. Найдите ядро и образ оператора симметрии пространства $V = U_1 \oplus U_2$ относительно подпространства U_1 в направлении U_2.

7. 4. Что можно сказать об операторе f линейного пространства V, если $\mathrm{Ker} f = V$?

7. 5. Докажите, что подпространством пространства V является ядро линейного отображения $f : V \to W$.

7. 6. Докажите, что подпространством пространства W является образ линейного отображения $f : V \to W$.

7. 7. Докажите, что всякое подпространство линейного пространства является ядром некоторого линейного оператора.

7. 8. Докажите, что всякое подпространство линейного пространства является образом некоторого линейного оператора.

8. Вычисление ядра и образа линейного оператора.

8. 1. Опишите схему нахождения образа линейного оператора.

8. 2. Как найти координаты вектора $x \in \mathrm{Ker} f$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства, если известна матрица A линейного оператора f в этом базисе?

8. 3. Как найти базис образа линейного оператора?

9. Ранг и дефект линейного оператора.

9. 1. Как определяются ранг и дефект линейного оператора?

9. 2. Как связана размерность линейного пространства V с рангом и дефектом линейного оператора f этого пространства?

9. 3. Каким будет ядро линейного оператора f n-мерного пространства V, если $\mathrm{def} f = 0$?

9. 4. Каким будет ядро линейного оператора f n-мерного пространства V, если $\mathrm{def} f = n$?

9. 5. Каким будет образ линейного оператора f n-мерного линейного пространства, если $\mathrm{rang} f = 0$?

9. 6. Каким будет образ линейного оператора f n-мерного линейного пространства, если $\mathrm{rang} f = n$?

9. 7. Чему равны ранг и дефект оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ пространства $\mathbb{R}_n[x]$?

10. Сумма линейных операторов. Произведение скаляра поля и линейного оператора.

10. 1. Как определяется сумма двух линейных операторов линейного пространства?

10. 2. Как определяется произведение элемента поля P и линейного оператора пространства над полем P?

10. 3. Покажите, что $\mathrm{Hom}_P V$ — линейное пространство над полем P.

11. Строение линейного пространства $\mathrm{Hom}_P V$.

11. 1. Как найти матрицы линейных операторов $f+g$ и λf в некотором базисе, если известны матрицы линейных операторов f и g в этом базисе?

11. 2. Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем P. Как устанавливается изоморфизм между линейными пространствами $\mathrm{Hom}_P V$ и $M(n, P)$?

11. 3. Какова размерность пространства $\mathrm{Hom}_P V$, если пространство V n-мерно?

11. 4. Запишите базис линейного пространства $L(\mathbb{R}^2)$.

12. Произведение линейных операторов.

12. 1. Как определяется произведение двух линейных операторов линейного пространства?

12. 2. Как найти матрицу линейного оператора fg в некотором базисе, если известны матрицы линейных операторов f и g в этом базисе?

12. 3. Докажите, что оператор гомотетии n-мерного линейного пространства V перестановочен с любым линейным оператором пространства V.

12. 4. Пусть p — оператор проектирования пространства $V = U_1 \oplus U_2$ на U_1 параллельно U_2. Докажите, что $p^2 = p$.

12. 5. Пусть s — оператор симметрии пространства $U_1 \oplus U_2$ относительно подпространства U_1 в направлении U_2. Докажите, что $s^2 = \varepsilon$.

13. Обратимые линейные операторы.

13. 1. Как найти матрицу обратного для f линейного оператора в некотором базисе, если известна матрица линейного оператора f в этом базисе?

13. 2. Покажите, что $\mathrm{Aut}_P V$ — мультипликативная группа. Будет ли эта группа абелевой?

13. 3. Докажите, что линейный оператор f линейного пространства V является линейным преобразованием тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker} f = \{\theta\}$.

4.4. Индивидуальные задания

1. В трехмерном линейном пространстве с базисом e_1, e_2, e_3 отображение φ переводит произвольный вектор
$$c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$
в вектор
$$\varphi(c) = (ac_1 - bc_2)e_1 + (c_1 - ac_2)e_2 + (c_2 - bc_3)e_3.$$
Является ли это отображение линейным оператором? В случае положительного ответа:

1) запишите матрицу линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, e_3;

2) найдите ядро линейного оператора φ;

3) найдите ранг и дефект оператора φ.

	a	b		a	b
1. 1.	-1	2	1. 2.	2	1
1. 3.	1	-2	1. 4.	2	3
1. 5.	-2	3	1. 6.	3	-2
1. 7.	-1	3	1. 8.	3	-1
1. 9.	-3	-1	1. 10.	4	2
1. 11.	-1	4	1. 12.	3	4

2. Покажите, что отображение φ, состоящее в умножении всех матриц из $M(2,\mathbb{R})$ слева на матрицу A, будет линейным оператором $M(2,\mathbb{R})$. Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите $\operatorname{Ker}\varphi$.

2. 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. 2. 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. 2. 4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. 2. 6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. 7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 2. 8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2. 10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2. 12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Пусть φ — отображение пространства $\mathbb{R}_3[x]$ в себя, которое многочлену $f(x)$ ставит в соответствие многочлен

$$g(x) = f(x+a) - f(x-b),$$

где a и b — числа из задания 1. Покажите, что φ — линейный оператор $\mathbb{R}_3[x]$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $1, x, x^2, x^3$.

4. Составьте матрицу линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, e_3 действительного линейного пространства V, если φ векторы

$$x_1 = ae_1 - e_2 + e_3, \; x_2 = e_1 + be_2 - e_3, \; x_3 = e_1 - e_2 - ae_3$$

переводит соответственно в векторы

$$y_1 = e_1 + 2e_2 + be_3, \; y_2 = ae_2 + e_3, \; y_3 = e_1 + be_3,$$

где a, b — числа из задания 1. Найдите образ вектора $z = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ под действием оператора φ.

5. В базисе e_1, e_2, e_3 линейный оператор φ имеет матрицу B. Как изменится матрица оператора φ при переходе к базису e_1', e_2', e_3', если

$$e_1' = 2e_1 + e_2, \; e_2' = -e_1 + 2e_2 + 3e_3, \; e_3' = -e_1 + e_2 + e_3?$$

5. 1. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 5. 2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

5. 3. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 5. 4. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 5. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 5. 6. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. 7. $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 5. 8. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

5. 9. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 5. 10. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 11. $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 5. 12. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

6. В трехмерном линейном пространстве с базисом e_1, e_2, e_3 заданы векторы

$$u_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \; u_2 = e_1 + 3e_2 + 4e_3, \; u_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3,$$

$v_1 = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3,\ v_2 = e_1 + e_2 + e_3,\ v_3 = 4e_1 + 3e_2 + 4e_3.$

Докажите, что векторы u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 образуют базисы данного пространства. В базисе u_1, u_2, u_3 линейный оператор φ задан матрицей B из задания 5. Вычислите матрицу оператора φ в базисе v_1, v_2, v_3.

7. В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ линейный оператор φ задан матрицей C. Найдите базисы ядра и образа, ранг и дефект оператора φ.

7.1. $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. 7.2. $C = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

7.3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 7.4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

7.5. $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. 7.6. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

7.7. $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 8 & -6 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. 7.8. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7.9. $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 10 & -6 \end{pmatrix}$. 7.10. $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

7.11. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. 7.12. $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. В некотором базисе пространства $\mathbb{R}^3$ операторы f и g имеют матрицы B и C, где B — из задания 5, а C — из задания 7. Найдите матрицы операторов $f + g$, $5f$, fg. Обратимы ли операторы f и g?

5. СТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

5.1. Элементы теории

Две матрицы $A, B \in M(n, P)$ называются *подобными*, если существует невырожденная матрица $T \in M(n, P)$ такая, что $B = TAT^{-1}$.

Теорема 5.1. *Отношение подобия матриц на множестве $M(n, P)$ является отношением эквивалентности.*

Из теоремы 4.6, с. 55, следует, что матрицы одного линейного оператора n-мерного пространства V над полем P в разных базисах подобны, причем матрица T, связывающая эти матрицы отношением подобия, совпадает с матрицей перехода от «старого» базиса к «новому». Таким образом, каждому линейному оператору пространства V соответствует класс подобных между собой матриц из $M(n, P)$, эти матрицы представляют данный линейный оператор в различных базисах.

Из теоремы 5.1 следует, что множество $M(n, P)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы подобных матриц. Матрицы входят в один и тот же класс тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах.

В связи с указанными замечаниями очень важными в теории линейных операторов представляются две задачи.

1. Нахождение условий подобия матриц.

2. Приведение матрицы линейного оператора с помощью выбора базиса к наиболее простой форме.

Следующие три леммы связаны с решением первой задачи. В них предлагаются необходимые признаки подобия матриц.

Лемма 5.2. *Если матрицы $A, B \in M(n, P)$ подобны, то* $\det A = \det B$.

Лемма 5.2 дает возможность назвать определитель некоторой матрицы линейного оператора f *определителем линейного оператора* f.

Сумма всех элементов главной диагонали матрицы называется *следом матрицы* A и обозначается через $\mathrm{tr}A$.

Лемма 5.3. *Если матрицы $A, B \in M(n, P)$ подобны, то* $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$.

Основываясь на лемме 5.3, будем называть след некоторой матрицы $A \in M(n, P)$ линейного оператора f *следом линейного оператора* f.

Пусть $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матрица над полем P, λ — некоторая переменная. Матрица

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

называется *характеристической матрицей матрицы* A. Многочлен $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A.

Лемма 5.4. *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

Лемма 5.4 дает возможность называть характеристический многочлен некоторой матрицы линейного оператора f *характеристическим многочленом оператора* f.

Пусть f — линейный оператор линейного пространства V над полем P, x — ненулевой вектор пространства V. Если $f(x) = \lambda x, \lambda \in P$, то скаляр λ называется *собственным значением оператора* f, а вектор x — *собственным вектором линейного оператора* f, *принадлежащим собственному значению* λ. Находить собственные значения линейного оператора позволяет следующая теорема.

Теорема 5.5. *Собственными значениями линейного оператора f конечномерного линейного пространства V над полем P являются все, принадлежащие полю P, корни характеристического многочлена этого оператора и*

только они.

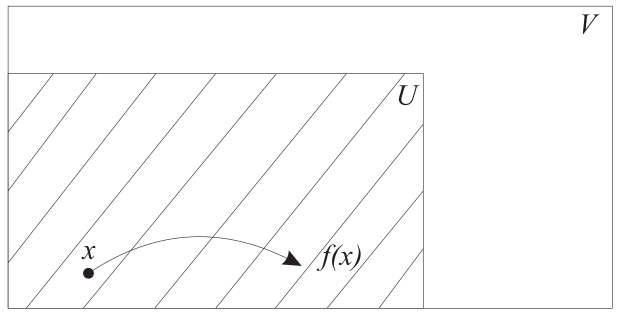
Пусть x — собственный вектор линейного оператора f, принадлежащий собственному значению λ. Из теоремы 5.5 следует, что координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где A — матрица линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \dots$ $\dots, e_n$. Решая систему (5.1), находим координаты собственных векторов оператора f, принадлежащих собственному значению λ.

Пусть f — линейный оператор линейного пространства V над полем P. Подпространство U пространства V называется *инвариантным относительно оператора* f, если $f(x) \in U$ для любого вектора $x \in U$.

Следующая схема иллюстрирует введенное понятие



Лемма 5.6. *Для любого линейного оператора f пространства V подпространства $\mathrm{Ker}f$ и $\mathrm{Im}f$ инвариантны относительно* f.

Лемма 5.7. *Пусть f — линейный оператор линейного пространства V. Сумма и пересечение инвариантных относительно f подпространств пространства V являются инвариантными относительно f подпространствами.*

Посмотрим, как влияет на матрицу линейного оператора f пространства V наличие в V нетривиального инвариантного относительно f подпространства.

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} & c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

называется *полураспавшейся.* Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

называется *распавшейся* или *клеточно–диагональной.*

Схематично полураспавшуюся и распавшуюся матрицы можно изобразить следующим образом

$$\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline B & C \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & C \end{array}\right).$$

Теорема 5.8. *Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P. Матрица оператора f в некотором базисе пространства V является полураспавшейся тогда и только тогда, когда в пространстве V существует нетривиальное инвариантное относительно f подпространство.*

Теорема 5.9. *Пусть f — линейный оператор пространства V_n. Матрица оператора f в некотором базисе пространства V_n является распавшейся тогда и только тогда, когда пространство V_n представимо в виде прямой суммы двух своих инвариантных относительно f подпространств.*

Линейный оператор f n-мерного линейного пространства V называется *диагонализируемым*, если в некотором базисе пространства V матрица оператора f имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.10. *Линейный оператор f конечномерного пространства V диагонализируем тогда и только тогда, когда пространство V является прямой суммой одномерных инвариантных относительно f подпространств.*

На основании теоремы 5.10 вопрос определения диагонализируемости линейного оператора предполагает ответ на следующие три вопроса.

1. Каким условиям должен удовлетворять линейный оператор f пространства V_n, чтобы в этом пространстве существовали одномерные инвариантные относительно f подпространства?

2. Как найти одномерные инвариантные относительно f подпространства пространства V_n?

3. В каких случаях пространство V_n разлагается в прямую сумму одномерных инвариантных относительно f подпространств?

Следующие результаты, отвечая на поставленные вопросы, дают удобные критерии диагонализируемости линейного оператора.

Лемма 5.11. *Одномерное подпространство U линейного пространства V инвариантно относительно линейного оператора f тогда и только тогда, когда $U = L(x)$, где x — собственный вектор оператора f.*

Таким образом, лемма 5.11 сводит задачу нахождения одномерных инвариантных относительно f подпространств пространства V_n к задаче нахождения собственных векторов оператора f. Из теоремы 5.5 следует, что в конечномерном линейном пространстве V тогда и только тогда существуют одномерные инвариантные относительно линейного оператора f подпространства, когда f имеет собственные значения, принадлежащие полю P.

Теорема 5.12. *Пусть f — линейный оператор n-мерного пространства V над полем P. Оператор f диагонализируем тогда и только тогда, когда в V есть n линейно независимых собственных векторов оператора f.*

Лемма 5.13. *Собственные векторы линейного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, образуют линейно независимую систему.*

Теорема 5.14. *Пусть f — линейный оператор n-мерного линейного пространства V над полем P. Если все корни характеристического многочлена оператора f принадлежат полю P и различны, то f диагонализируем.*

Существует несколько вариантов решения задачи приведения матрицы линейного оператора к наиболее простой форме. Наиболее предпочтительным является приведение матрицы оператора к диагональному виду. Однако такой подход не всегда осуществим, так как не всякая матрица подобна диагональной. Другой вариант решения указанной задачи состоит в приведении матрицы линейного оператора к так называемой жордановой нормальной форме.

Пусть P — некоторое поле, $a \in P$. *Клеткой Жордана порядка n* называется $n \times n$-матрица, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Обозначается клетка Жордана порядка n через $J_n(a)$.

Клеточно–диагональная матрица

$$\left(\begin{array}{c|cccc} J_{k_1}(a) & 0\ \ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{1}{|c|}{J_{k_2}(b)} & \dots & 0 & 0 \\ \cline{2-2} & & \dots & & \\ \cline{5-5} 0\ \ 0 & 0\ \ 0 & \dots & & \multicolumn{1}{|c}{J_{k_t}(c)} \end{array}\right), k_1+k_2+\ldots+k_t = n,$$

с клетками Жордана на главной диагонали называется *жордановой матрицей* или *матрицей Жордана.*

Если A — произвольная квадратная матрица над полем P и J — подобная ей матрица Жордана над полем P, то J называется *жордановой нормальной формой матрицы A над полем P.*

Теорема 5.15. *Для существования жордановой нормальной формы $n \times n$-матрицы над полем P необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен этой матрицы имел n корней (с учетом их кратности), принадлежащих полю P.*

Теорема 5.16. *Две матрицы подобны тогда и только тогда, когда их жордановы нормальные формы состоят из одних и тех же клеток Жордана и различаются лишь расположением клеток Жордана на главной диагонали.*

Изложим теперь *алгоритм приведения $n \times n$-матрицы A к жордановой нормальной форме J над полем P.*

1-й шаг. Находим все корни характеристического многочлена матрицы A и их кратности. Если хотя бы один корень не принадлежит полю P, то ввиду теоремы 5.15 задача решения не имеет.

2-й шаг. Пусть λ — один из корней характеристического многочлена матрицы A и пусть k — его кратность. Определяем по формуле $l(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda E)$ общее число $l(\lambda)$ клеток Жордана вида $J_t(\lambda), t = 1, 2, .., k$, в матрице J. Затем определяем для $t = 1, 2, \dots, k$ по формуле
$l_t(\lambda) = \operatorname{rang}(A - \lambda E)^{t+1} - 2\operatorname{rang}(A - \lambda E)^t + \operatorname{rang}(A - \lambda E)^{t-1}$
общее число $l_t(\lambda)$ клеток Жордана порядка t с элементом λ на главной диагонали, входящих в матрицу J (по опре-

делению $(A-\lambda E)^0 = E$).

3-й шаг. Повторяем 2-й шаг для всех корней характеристического многочлена матрицы A.

4-й шаг. Расставляем клетки Жордана на главной диагонали матрицы J. Ввиду теоремы 5.16 порядок расстановки клеток Жордана на главной диагонали матрицы J значения не имеет.

5.2. Примеры решения задач

Пример 5.1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, заданного в базисе e_1, e_2, e_3 действительного линейного пространства V матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

☐ Составим характеристический многочлен:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2(1-\lambda) + 6 - 6 - 2\lambda + 2\lambda - 9(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = -\lambda^2(\lambda-1) + 9(\lambda-1) =$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-1).$$

Характеристический многочлен матрицы A имеет корни $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, которые ввиду теоремы 5.5 являются собственными значениями линейного оператора f.

Найдем все собственные векторы линейного оператора f, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = -3$. Для этого методом Гаусса решим однородную систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} (A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} -10x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при x_1 и x_3

$$\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

то можно выбрать x_1 и x_3 главными неизвестными. Тогда $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$, x_2 — любое действительное число.

Итак, координатная строка собственного вектора x, принадлежащего собственному значению $\lambda_1 = -3$, имеет вид $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, α — любое ненулевое действительное число. Сам вектор x в базисе e_1, e_2, e_3 имеет разложение

$$x = -\alpha e_1 + \alpha e_2, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0.$$

Придавая α любые ненулевые значения, получим все собственные векторы оператора f, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = -3$.

Аналогично показывается, что собственными векторами оператора f, принадлежащими собственным значениям $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, будут ненулевые векторы вида

$$x = (-\alpha/2)e_1 + (\alpha/2)e_2 + \alpha e_3,$$

$$x = (2/3)\alpha e_1 + (4/3)\alpha e_2 + \alpha e_3,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. ☒

Пример 5.2. Докажите, что оператор f действительного пространства V, имеющий в базисе e_1, e_2, e_3 матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

диагонализируем. Найдите базис пространства V, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид. Укажите этот вид.

☐ Корнями характеристического многочлена оператора f являются числа: $-3, 1, 3$. По теореме 5.14 оператор f, диагонализируем. Как показано в примере 5.1, векторы

$$a_1 = -e_1 + e_2,\ a_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3,\ a_3 = 2e_1 + 4e_2 + 3e_3$$

являются собственными векторами оператора f, принадлежащими собственным значениям $-3, 1, 3$, соответственно. Ввиду леммы 5.13 векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис пространства V. Так как

$$f(a_1) = -3a_1 = -3a_1 + 0a_2 + 0a_3,$$
$$f(a_2) = 1a_2 = 0a_1 + 1a_2 + 0a_3,$$
$$f(a_3) = 3a_3 = 0a_1 + 0a_2 + 3a_3,$$

то матрица

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

является матрицей оператора f в базисе a_1, a_2, a_3. ⊠

Пример 5.3. Выясните, приводится ли матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

к жордановой нормальной форме над полем $\mathbb{R}$?

☐ Составляем характеристический многочлен матрицы A и находим его корни.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -14 & -5 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 7).$$

Следовательно, многочлен $|A - \lambda E|$ имеет корень 1 кратности 2 и два однократных корня $2 \pm \sqrt{3}i$. Так как среди корней характеристического многочлена есть комплексные, то виду теоремы 5.15 данная матрица не приводится над полем $\mathbb{R}$ к жордановой нормальной форме. ⊠

Пример 5.4. Над полем действительных чисел найдите жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

☐ Составим характеристический многочлен матрицы A и найдем его корни.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -6-\lambda & 0 & 7-\lambda \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & 7-\lambda \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)(-6-\lambda)(4-\lambda)+4(1-\lambda)(7-\lambda))+$$
$$+3(-2(1-\lambda)(4-\lambda)+(1-\lambda)(7-\lambda)) =$$
$$= (1-\lambda)^2(\lambda^2-2\lambda+4)+3(1-\lambda)(\lambda-1) =$$
$$= (1-\lambda)^2(\lambda^2-2\lambda+4-3) = (\lambda-1)^4.$$

Итак, характеристический многочлен матрицы A имеет корень $\lambda_1 = 1$ кратности $k = 4$.

Определим число клеток Жордана, соответствующих корню $\lambda_1 = 1$. Для этого вычислим ранг матрицы $A - 1E$.

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\mathrm{rang}(A - 1E) = 2$. Отсюда
$$l(1) = 4 - \mathrm{rang}(A - 1E) = 2.$$

Следовательно, жорданова нормальная форма матрицы A состоит из двух клеток Жордана. Логически возможны случаи: обе эти клетки имеют порядок 2; одна клетка имеет порядок 1 и одна клетка имеет порядок 3.

Определим по формуле
$$l_1(1) = \mathrm{rang}(A-1E)^2 - 2\mathrm{rang}(A-1E)^1 + \mathrm{rang}(A-1E)^0$$
число клеток Жордана первого порядка, соответствующих корню $\lambda_1 = 1$. По определению $(A-1E)^0 = E$. Значит, $\mathrm{rang}(A-1E)^0 = 4$. Как показано выше, $\mathrm{rang}(A-1E)^1 = 2$. Вычислим

$$(A-1E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\mathrm{rang}(A-1E)^2 = 1$. Теперь $l_1(1) = 1^2-2\cdot2+4 = 1$. Это означает, что жорданова нормальная форма матрицы A содержит одну жорданову клетку вида $J_1(1)$. Поэтому имеет место второй случай. Таким образом, матрица

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

является жордановой нормальной формой матрицы A. ☒

5.3. Вопросы для самоконтроля

1. Отношение подобия матриц.

1.1. Докажите, что матрица $\alpha E, \alpha \in P$, подобна только себе.

1.2. Пусть $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & O \\ \hline O & B_2 \end{array}\right)$, причем матрицы A_i и B_i подобны, $i = 1, 2$. Докажите, что матрицы A и B подобны.

1.3. Пусть $A, B \in M(n, P)$. Докажите, что если A — невырожденная матрица, то матрицы AB и BA подобны.

1.4. Пусть A, B — подобные матрицы. Докажите, что подобны матрицы A^2 и B^2.

1.5. Докажите, что отношение подобия матриц на множестве $M(n, P)$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1.6. Докажите, что матрицы линейного оператора пространства V_n в различных базисах подобны.

2. Определитель и след линейного оператора.

2. 1. Вычислите определитель и след оператора гомотетии H_α пространства V над полем P.

2. 2. Вычислите определитель и след оператора дифференцирования пространства $\mathbb{R}_n[x]$.

2. 3. Докажите, что $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ для любых матриц A, B из $M(n, P)$.

2. 4. Докажите, что для линейных операторов f и g справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{tr}(f+g) = \mathrm{tr}f \cdot \mathrm{tr}g, \quad \mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf).$$

2. 5. Допускают ли леммы 5.2 и 5.3 обращение?

3. Характеристический многочлен оператора.

3. 1. Как определяется характеристический многочлен линейного оператора?

3. 2. Запишите характеристический многочлен оператора гомотетии H_α линейного пространства V_n.

3. 3. Запишите характеристический многочлен оператора дифференцирования пространства $\mathbb{R}_n[x]$.

3. 4. Докажите, что квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда нуль не является корнем ее характеристического многочлена.

3. 5. Допускает ли лемма 5.4 обращение?

4. Собственные значения и собственные векторы.

4. 1. Может ли собственный вектор быть нулевым?

4. 2. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора гомотетии пространства V_n над полем P.

4. 3. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора дифференцирования пространства $\mathbb{R}_n[x]$.

4. 4. Всегда ли линейный оператор имеет собственные значения и собственные векторы?

4. 5. Опишите процедуру нахождения собственных векторов линейного оператора, принадлежащих заданному собственному значению.

4. 6. Докажите, что собственные векторы линейного оператора, соответствующие собственному значению нуль, и только они, являются ненулевыми векторами ядра этого оператора.

4. 7. Существует ли в действительном линейном пространстве нечетной размерности линейный оператор, не имеющий собственных векторов?

4. 8. Сколько собственных значений имеет линейный оператор в n-мерном комплексном пространстве?

5. Инвариантные подпространства.

5. 1. Пусть U — инвариантное относительно линейного оператора f подпространство пространства V. Докажите, что в этом случае f — линейный оператор подпространства U.

5. 2. Докажите, что подпространство $V_\lambda(f)$, состоящее из всех собственных векторов оператора f, принадлежащих собственному значению λ, и нулевого вектора, инвариантно относительно любого линейного оператора g, перестановочного с f.

5. 3. Докажите леммы 5.6 и 5.7.

6. Линейный оператор с полураспавшейся матрицей.

6. 1. Приведите пример линейных операторов с полураспавшейся матрицей.

6. 2. Как влияет на матрицу линейного оператора f пространства V наличие в V нетривиального инвариантного относительно f подпространства?

7. Линейный оператор с клеточно–диагональной матрицей.

7. 1. Приведите примеры линейных операторов с распавшейся матрицей.

7. 2. Какой оператор называется диагонализируемым?

7. 3. Какой вид имеет матрица линейного оператора f пространства V_n, если V_n — прямая сумма трех инвариантных относительно f подпространств?

7. 4. Докажите теорему 5.10.

8. Собственные векторы и одномерные инвариантные подпространства.

8. 1. Какова связь между собственными векторами ли-

нейного оператора f линейного пространства V и одномерными инвариантными относительно f подпространствами пространства V?

8.2. Всегда ли линейное пространство V имеет одномерные инвариантные относительно линейного оператора f подпространства?

8.3. Докажите, что в n-мерном комплексном линейном пространстве обязательно существуют одномерные инвариантные относительно произвольного линейного оператора подпространства.

8.4. Докажите, что линейный оператор f конечномерного линейного пространства V диагонализируем тогда и только тогда, когда в V найдется базис, составленный из собственных векторов оператора f.

9. Собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям.

9.1. Допускает ли теорема 5.14 обращение?

9.2. Может ли собственному значению λ_0 линейного оператора f принадлежать система из двух и более линейно независимых собственных векторов оператора f?

10. Жорданова нормальная форма матрицы.

10.1. Запишите клетки Жордана $J_1(a), J_2(b), J_3(c)$.

10.2. У всякой ли матрицы $A \in M(n, \mathbb{R})$ существует жорданова нормальная форма?

10.3. У всякой ли матрицы $A \in M(n, \mathbb{C})$ существует жорданова нормальная форма?

10.4. Сколько жордановых нормальных форм может быть у $n \times n$-матрицы.

11. Алгоритм приведения матрицы к жордановой нормальной форме.

11.1. Пусть λ — корень характеристического многочлена матрицы A, k — его кратность. Сколько клеток Жордана вида $J_t(\lambda)$ содержит жорданова нормальная форма матрицы A? Каких порядков могут быть эти клетки?

11.2. Чему равна сумма порядков всех клеток Жордана, соответствующих собственному значению λ?

11.3. В каком порядке расставляются клетки Жордана на главной диагонали жордановой нормальной формы матрицы?

5.4. Индивидуальные задания

1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе линейного пространства над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$ следующими матрицами.

$$1.1.\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.4.\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$1.5.\ A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.6.\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.7.\ A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

1.9. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

1.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

1.12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

2.1. - 2.6. Пусть f — линейный оператор пространства V над полем P. Докажите следующие утверждения.

2.1. Если L_1 и L_2 — подпространства V, инвариантные относительно f, то $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$ инвариантны относительно f.

2.2. Линейная оболочка любой системы собственных векторов оператора f инвариантна относительно f.

2.3. Если L — инвариантное относительно f подпространство, то L инвариантно относительно оператора $g = f - H_\alpha$, где H_α — оператор гомотетии.

2.4. Если подпространство L инвариантно относительно оператора f, то L инвариантно относительно оператора $g = f^2 - f$.

2.5. Любое подпространство L, инвариантное относительно невырожденного линейного оператора f, инвариантно относительно f^{-1}.

2.6. Образ $f(L)$ подпространства L, инвариантного относительно невырожденного линейного оператора f, инвариантен относительно f^{-1}.

2.7. - 2.11. В пространстве $\mathbb{C}_{[a,b]}$ задана линейная оболочка L нескольких векторов. Выясните, является ли подпространство L инвариантным относительно оператора дифференцирования.

2.7. $L = L(1, \cos t, \sin t, t)$.

2.8. $L = L(1, \cos^2 t, \sin^2 t, \cos 2t)$.

2.9. $L = L(1, \cos^2 t, \sin^2 t, \sin 2t)$.

2.10. $L = L(1, t, t^2, t^3)$.

2.11. $L = L(1, e^{2t}, e^{3t}, e^{4t})$.

2.12. Пусть линейный оператор f, действующий в некотором линейном пространстве V_3, имеет в некотором базисе e_1, e_2, e_3 диагональную матрицу с различными элементами на диагонали. Найдите все линейные подпространства, инвариантные относительно f.

3. Какие из матриц линейных операторов в пространстве V над $\mathbb{R}$ можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису? Найдите этот базис и соответствующую диагональную матрицу.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix},$

$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

3. 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

3. 5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 7. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. 9. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

3. 11. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Найдите жорданову нормальную форму матриц.

4.1. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$

4.3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

4.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

4.5. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$

4.7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$

4.8. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

4.9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

4.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

4.11. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

4.12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

6.1. Элементы теории

Пусть V — действительное линейное пространство. Говорят, что на V задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $a, b \in V$ поставлено в соответствие действительное число (a, b), причем выполняются следующие аксиомы:

1) $(a, b) = (b, a)$ для любых $a, b \in V$;

2) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ для любых $a, b, c \in V$;

3) $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$ для любых $a, b \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

4) $(a, a) > 0$ для любого ненулевого вектора $a \in V$.

Действительное линейное пространство с определенным на нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. Приведем несколько важных примеров евклидовых пространств.

1. Скалярное произведение векторов на V^3 определим как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Тогда V^3 — евклидово пространство.

2. Для любых двух функций $f, g \in C_{[a,b]}$ положим

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{6.1}$$

Эта формула задает скалярное произведение на $C_{[a,b]}$. Значит, $C_{[a,b]}$ — евклидово пространство.

3. Скалярное произведение для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определим формулой

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \tag{6.2}$$

Тогда $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство.

Теорема 6.1. *Любое конечномерное действительное линейное пространство можно превратить в евклидово пространство.*

Длиной вектора x в евклидовом пространстве V называют число $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Введенное определение в пространстве V^3 согласуется с обычным определением длины вектора.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ выражается формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

В пространстве $C_{[a,b]}$ длина вектора выражается формулой

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Величину $\|f\|$ называют *нормой функции* f.

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным.* Умножение ненулевого вектора на число, обратное его длине, называется *нормированием вектора.*

Следующая теорема устанавливает связь между скалярным произведением векторов и их длинами.

Теорема 6.2. *Для любых двух векторов* a, b *евклидова пространства выполняется неравенство:*

$$|\,(a,b)\,| \leq \|\, a \,\| \cdot \|\, b \,\|\,. \tag{6.3}$$

Неравенство (6.3) называется *неравенством Коши-Буняковского.*

В силу неравенства Коши–Буняковского,

$$-1 \leq \frac{(a,b)}{\|\, a \,\| \cdot \|\, b \,\|} \leq 1$$

для любых ненулевых векторов a, b евклидова пространства V. Поэтому существует единственный угол φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$, такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|\, a \,\| \cdot \|\, b \,\|}.$$

Этот угол называется *углом между векторами* a *и* b.

Теорема 6.3. *В евклидовом пространстве* V *для любых векторов* a *и* b *справедливы следующие утверждения:*

1) $\|\, a+b \,\|^2 = \|\, a \,\|^2 + \|\, b \,\|^2 + 2 \,\|\, a \,\| \cdot \|\, b \,\| \cdot \cos(\widehat{ab})$;

2) $\|\, a+b \,\| \leq \|\, a \,\| + \|\, b \,\|$.

Первое утверждение теоремы 6.3 называется *теоремой косинусов*, второе — *неравенством треугольника.*

Векторы a, b евклидова пространства V называются *ортогональными*, если $(a,b) = 0$. Будем писать в этом случае $a \perp b$.

Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ евклидова пространства V называется *ортогональной*, если любая пара векторов этой системы ортогональна, т. е. $e_i \perp e_j$ для всех $i \neq j$. Будем полагать, что система, состоящая из одного вектора, ортогональна. Ортогональная система нормированных векторов евклидова пространства называется *ортонормированной.*

Теорема 6.4. *Ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.*

Ввиду теоремы 6.4 ортогональные системы играют в евклидовых пространствах фундаментальную роль. Процесс перехода к ортогональной системе векторов называется *процессом ортогонализации.* Процесс ортогонализации, описанный ниже, называется *процессом ортогонализации Грамма–Шмидта.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — линейно независимая система векторов евклидова пространства V. По векторам этой системы будем последовательно строить ортогональную систему ненулевых векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Полагаем $b_1 = a_1$. Если векторы $b_1, b_2, \ldots, b_{l-1}$ уже построены, то вектор b_l находится по формуле

$$b_l = a_l + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_{l-1} b_{l-1}, \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{(a_l,b_1)}{(b_1,b_1)} \\ \lambda_2 = -\frac{(a_l,b_2)}{(b_2,b_2)} \\ \quad \dots \\ \lambda_{l-1} = -\frac{(a_l,b_{l-1})}{(b_{l-1},b_{l-1})}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Теорема 6.5. *В ненулевом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Пусть евклидовы пространства V и V' изоморфны как линейные пространства, т. е. существует взаимно однозначное линейное отображение f пространства V на пространство V'. Если при этом отображении сохраняется скалярное произведение, т. е. $(f(x), f(y)) = (x, y)$ для любых $x, y \in V$, то отображение f называется *евклидовым изоморфизмом пространств* V и V'. Сами пространства V и V' называются в этом случае *евклидово изоморфными пространствами.*

Теорема 6.6. *Два конечномерных евклидовых пространства евклидово изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Следствие. *Каждое n-мерное евклидово пространство евклидово изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$.*

6.2. Примеры решения задач

Пример 6.1. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Является ли функция

$$F(x, y) = (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$$

скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$? Если нет, то укажите, какие из свойств скалярного произведения нарушаются.

☐ Очевидно, $F(x, y) = F(y, x)$. Значит, первое свойство скалярного произведения выполняется. Положим $z = (z_1, \dots, z_n)$. Тогда

$$F(x + y, z) = ((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n))(z_1 + \dots + z_n) =$$
$$= ((x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n))(z_1 + \dots + z_n) =$$
$$= (x_1 + \dots + x_n)(z_1 + \dots + z_n) + (y_1 + \dots + y_n)(z_1 + \dots + z_n) =$$
$$= F(x, z) + F(y, z).$$

Значит, второе свойство скалярного произведения выполняется. Так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$F(\lambda x, y) = (\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n)(y_1 + \dots + y_n) =$$
$$= \lambda(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n) = \lambda F(x, y),$$

то третье свойство скалярного произведения выполняется. Положим $x = (-1, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$F(x, x) = (-1 + 1)(-1 + 1) = 0.$$

Значит, четвертое свойство скалярного произведения не выполняется. ☒

Пример 6.2. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис евклидова пространства V и

$$\| e_1 \| = 2,\ \| e_2 \| = 1,\ \| e_3 \| = 3.$$

Найдите угол φ между векторами

$$a = e_1 + e_2 - e_3,\ b = e_1 + e_2 + e_3.$$

☐ Так как векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис V, то $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0$. Поэтому

$$(a, a) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) + (e_3, e_3) =$$
$$= \| e_1 \|^2 + \| e_2 \|^2 + \| e_3 \|^2 = 4 + 1 + 9 = 14,$$

$$(b, b) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) + (e_3, e_3) = 14,$$

$$(a, b) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) - (e_3, e_3) = 4 + 1 - 9 = -4.$$

Теперь

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{\| a \| \cdot \| b \|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{2}{7},$$

и угол $\varphi = \arccos(-2/7)$. ☒

Пример 6.3. Применяя процесс ортогонализации Грамма–Шмидта, по заданному базису

$$x_1 = (1, -2, 2),\ x_2 = (-1, 0, -1),\ x_3 = (5, -3, -7)$$

постройте в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис.

□ Построим сначала ортогональный базис a_1, a_2, a_3 пространства $\mathbb{R}^3$. Положим $a_1 = x_1$. Ввиду (6.4) и (6.5) имеем $a_2 = x_2 + \alpha a_1$, где

$$\alpha = -\frac{(a_1, x_2)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-1)}{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$a_2 = (-1, 0, -1) + (1/3)(1, -2, 2) = (-2/3, -2/3, -1/3).$$

Снова ввиду (6.4) и (6.5) имеем $a_3 = x_3 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, где

$$\lambda_1 = -\frac{(a_1, x_3)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1 \cdot 5 + (-2)(-3) + 2 \cdot (-7)}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\lambda_2 = -\frac{(a_2, x_3)}{(a_2, a_2)} = -\frac{(-\frac{2}{3}) \cdot 5 + (-\frac{2}{3}) \cdot (-3) + (-\frac{1}{3}) \cdot (-7)}{(-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} = -1.$$

Тогда $a_3 = (5, -3, -7) + (1/3)(1, -2, 2) - (-2/3, -2/3, -1/3) = (6, -3, -6)$. Пронормируем векторы a_1, a_2, a_3. Для этого найдем их длины:

$$\| a_1 \| = \sqrt{(a_1, a_1)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$\| a_2 \| = \sqrt{(a_2, a_2)} = \sqrt{(-2/3)^2 + (-2/3)^2 + (-1/3)^2} = 1,$$

$$\| a_3 \| = \sqrt{(a_3, a_3)} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 9.$$

Теперь векторы

$$y_1 = (1/3)a_1 = (1/3, -2/3, 2/3),$$

$$y_2 = a_2 = (-2/3, -2/3, -1/3),$$

$$y_3 = (1/9)a_3 = (2/3, -1/3, -2/3)$$

образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. ⊠

6.3. Вопросы для самоконтроля

1. Определение евклидова пространства. Примеры.

1.1. Как задать евклидово пространство?

1.2. Докажите, что для вектора a евклидова пространства V имеет место равенство $(a, \theta) = (\theta, a) = 0$.

1.3. Докажите, что формула (6.1) определяет скалярное произведение в пространстве $C_{[a,b]}$.

1.4. Докажите, что формула (6.2) определяет скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

1.5. Докажите, что в евклидовом пространстве V при любых $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m \in V,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n,\ \beta_1, \ldots, \beta_m \in \in \mathbb{R}$, выполняется равенство

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j).$$

1.6. Как превратить конечномерное действительное линейное пространство в евклидово?

2. Неравенство Коши–Буняковского.

2.1. Как определяется длина вектора в евклидовом пространстве?

2.2. Как вычислить длину вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$?

2.3. Как вычислить норму функции $f \in C_{[a,b]}$?

2.4. Пусть a, b — векторы евклидова пространства V, $\xi \in \mathbb{R}$. Докажите, что квадратный трехчлен $(\xi a + b, \xi a + b)$ неотрицателен тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен.

2.5. Докажите, что неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

2.6. Какой вид принимает неравенство Коши-Буняковского в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{C}_{[a,b]}$?

2.7. Докажите, что в евклидовом пространстве V для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого $a \in V$ выполняется равенство: $\| \lambda a \| = |\lambda| \, \| a \|$.

3. Угол между векторами.

3.1. Как определяется угол между векторами в евклидовом пространстве?

3.2. Пусть a, b — ненулевые векторы евклидова пространства V, φ — угол между ними. Докажите следующие утверждения.

3.2.1. Угол φ не меняется при умножении обоих векторов на одно и тоже число.

3.2.2. Угол φ равен нулю или π тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

3.3. Докажите теорему косинусов.

3.4. Выведите неравенство треугольника.

3.5. Какой вид принимает неравенство треугольника в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{C}_{[a,b]}$?

4. Ортогональная система векторов.

4.1. Сформулируйте определение ортогональной системы векторов евклидова пространства.

4.2. Какая система векторов евклидова пространства называется ортонормированной?

4.3. Докажите, что в евклидовом пространстве V справедливы следующие утверждения.

4.3.1. Тогда и только тогда $a \perp a$, $a \in V$, когда $a = \theta$.

4.3.2. Нулевой вектор и только он ортогонален любому вектору из V.

4.3.3. Если вектор a ортогонален каждому из векторов $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$, то он ортогонален любой их линейной комбинации.

4.4. Докажите, что два вектора a, b евклидова пространства V ортогональны тогда и только тогда, когда $\| a + b \|^2 = \| a \|^2 + \| b \|^2$ (теорема Пифагора).

4.5. Докажите, что ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.

5. Процесс ортогонализации Грамма–Шмидта.

5.1. Изложите сущность процесса ортогонализации Грамма–Шмидта.

5.2. Как перейти от ортогонального базиса евклидова пространства к ортонормированному базису?

5.3. Докажите, что любая ортонормированная система векторов евклидова пространства V либо является базисом V, либо может быть дополнена до ортонормированного базиса пространства V.

6. Изоморфизм евклидовых пространств.

6.1. Сформулируйте определение евклидова изоморфизма.

6.2. Покажите, что при евклидовом изоморфизме евклидовых пространств справедливы следующие утверждения.

6.2.1. Ортонормированный базис переходит в ортонормированный базис;

6.2.2. Длины векторов сохраняются.

6.3. Как строится евклидов изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности?

6.4. Индивидуальные задания

1. Пусть a и b — векторы действительного линейного пространства V. Является ли функция $F(a, b)$ скалярным произведением? Если нет, то укажите какие из аксиом скалярного произведения нарушаются.

1.1. $V = \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$,
$$F(a, b) = 2a_1b_1 + 3a_2b_2.$$

1.2. $V = C_{[\alpha,\beta]}$, $a = u(x)$, $b = v(x)$,
$$F(a, b) = \int_\alpha^\beta x^2 u(x)v(x)dx.$$

1.3. $M = (2, \mathbb{R})$, $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,
$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i.$$

1. 4. $V=\mathbb{R}[x]$, $a=m(x)$, $b=n(x)$,
$$F(a,b)=\deg(m(x)\cdot n(x)).$$
1. 5. $V=\mathbb{R}^3$, $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$,
$$F(a,b)=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3.$$
1. 6. $V=\mathbb{C}$, $F(a,b)=\mid ab\mid$.
1. 7. $V=C_{[\alpha,\beta]}$, $a=u(x)$, $b=v(x)$,
$$F(a,b)=\int_\alpha^\beta u(x)v'(x)dx.$$
1. 8. $V=\mathbb{R}^2$, $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2)$,
$$F(a,b)=2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2.$$
1. 9. $V=\mathbb{R}_n[x]$, $a=f(x)$, $b=g(x)$, $F(a,b)=(fg)(0)$.
1. 10. $V=M(n,\mathbb{R})$, $F(a,b)=\mathrm{tr}(a\cdot b)$.
1. 11. $V=\mathbb{R}^3$, $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$,
$$F(a,b)=a_1b_2+a_2b_1+a_3b_2+a_2b_3.$$
1. 12. $V=M(n,\mathbb{R})$, $F(a,b)=\det(ab)$.

2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите скалярное произведение векторов a,b и угол между ними.

	a	b
2. 1.	$(1,1,1,1)$	$(3,5,1,1)$
2. 2.	$(1,0,1,2)$	$(3,-5,1,0)$
2. 3.	$(2,-1,0,3)$	$(-1,0,-1,1)$
2. 4.	$(2,2,-1,0)$	$(1,1,-1,-1)$
2. 5.	$(-3,1,0,2)$	$(-1,1,0,4)$
2. 6.	$(1,-2,-3,1)$	$(1,2,3,4)$
2. 7.	$(4,-2,1,2)$	$(1,1,0,3)$
2. 8.	$(5,3,-4,3)$	$(-1,-5,0,4)$
2. 9.	$(1,0,0,4)$	$(1,2,-3,-7)$
2. 10.	$(-3,-2,1,1)$	$(1,2,7,-5)$
2. 11.	$(1,0,-2,1)$	$(3,-2,0,1)$
2. 12.	$(2,-1,-1,1)$	$(-1,2,1,0)$

3. В евклидовом пространстве $C_{[1,2]}$ найдите норму функции f и скалярное произведение f и g.

	f	g		f	g
3. 1.	x^{-2}	$1+\sqrt{x}$	3. 2.	$\sin x$	$\cos x$
3. 3.	x	$\cos x$	3. 4.	x	e^x
3. 5.	$\sin x$	x	3. 6.	$x+1$	$3x$
3. 7.	x^{-1}	x^2+2x	3. 8.	$\cos 3x$	4
3. 9.	x	$\sin(x^2)$	3. 10.	$\sin x$	$(\cos x)^{-2}$
3. 11.	x^2+1	3	3. 12.	$2x-1$	$x+2$

4. Найдите нормированный вектор евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ортогональный векторам a_1,a_2.

	a_1	a_2
4. 1.	$(1,1,1)$	$(1,-1,1)$
4. 2.	$(1,-1,0)$	$(-2,1,2)$
4. 3.	$(2,-1,1)$	$(-3,1,-1)$
4. 4.	$(0,-3,4)$	$(1,2,3)$
4. 5.	$(1,1,2)$	$(0,4,-3)$
4. 6.	$(-1,2,3)$	$(3,4,-1)$
4. 7.	$(-3,1,2)$	$(2,2,0)$
4. 8.	$(0,1,5)$	$(-1,-1,0)$
4. 9.	$(0,2,1)$	$(-1,1,0)$
4. 10.	$(1,0,2)$	$(-3,4,-1)$
4. 11.	$(1,-1,-1)$	$(0,3,1)$
4. 12.	$(2,1,1)$	$(1,1,0)$

5. Дополните до ортонормированного базиса евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ систему векторов a_1,a_2.

	a	b
5. 1.	$(1,-2,2,-3)$	$(2,-3,2,4)$
5. 2.	$(1,1,1,2)$	$(1,2,3,-3)$
5. 3.	$(1,-1,1,-1)$	$(1,1,1,1)$
5. 4.	$(1,-1,-1,3)$	$(1,1,-3,-1)$
5. 5.	$(1,1,2,1)$	$(1,-1,-1,-2)$

	a	b
5. 6.	$(0,1,2,3)$	$(1,2,-1,0)$
5. 7.	$(1,2,0,3)$	$(2,-1,2,0)$
5. 8.	$(-1,1,1,2)$	$(-2,0,2,-2)$
5. 9.	$(3,1,0,2)$	$(0,-2,4,1)$
5. 10.	$(1,-1,2,0)$	$(3,-1,-2,3)$
5. 11.	$(0,3,2,0)$	$(1,-2,-3,2)$
5. 12.	$(2,0,1,3)$	$(-1,3,-1,1)$

6. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, по заданному базису b_1, b_2, b_3 пространства $\mathbb{R}^3$ постройте ортонормированный базис. Сделайте проверку.

	b_1	b_2	b_3
6. 1.	$(1,1,1)$	$(1,2,3)$	$(1,1,2)$
6. 2.	$(2,-1,3)$	$(3,2,-5)$	$(1,-1,1)$
6. 3.	$(1,2,1)$	$(2,3,3)$	$(3,8,2)$
6. 4.	$(-1,3,7)$	$(0,2,-1)$	$(1,-2,-8)$
6. 5.	$(2,0,1)$	$(-1,2,3)$	$(-1,1,1)$
6. 6.	$(0,1,-2)$	$(1,-1,1)$	$(-2,0,3)$
6. 7.	$(1,0,2)$	$(3,-1,4)$	$(2,-2,1)$
6. 8.	$(-2,3,1)$	$(0,2,1)$	$(1,2,1)$
6. 9.	$(-3,0,1)$	$(0,2,3)$	$(-1,-1,-1)$
6. 10.	$(3,1,-1)$	$(-2,0,1)$	$(2,7,3)$
6. 11.	$(2,4,3)$	$(3,-1,4)$	$(1,5,-1)$
6. 12.	$(4,1,3)$	$(0,7,-2)$	$(4,8,0)$

7. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, постройте ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов a_1, a_2, a_3 евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

	a_1	a_2	a_3
7. 1.	$(1,2,2,-1)$	$(1,-1,0,3)$	$(0,3,2,-4)$
7. 2.	$(1,1,-1,-2)$	$(3,0,-1,2)$	$(2,-1,0,4)$
7. 3.	$(2,1,3,-1)$	$(1,1,-3,2)$	$(3,2,0,1)$

	a_1	a_2	a_3
7. 4.	$(-1,0,1,1)$	$(2,0,-1,3)$	$(1,0,0,4)$
7. 5.	$(3,2,1,1)$	$(-1,2,1,-1)$	$(2,4,2,0)$
7. 6.	$(1,1,2,3)$	$(1,1,-6,2)$	$(2,2,-4,5)$
7. 7.	$(0,2,3,1)$	$(2,-1,-1,3)$	$(2,-3,-4,2)$
7. 8.	$(2,1,2,2)$	$(-1,1,3,-3)$	$(1,2,5,-1)$
7. 9.	$(-2,0,3,1)$	$(1,-2,-2,1)$	$(3,-2,-5,0)$
7. 10.	$(1,4,-1,2)$	$(2,2,1,0)$	$(1,-2,2,-2)$
7. 11.	$(0,1,1,-1)$	$(3,1,2,0)$	$(-3,0,-1,-1)$
7. 12.	$(1,1,2,1)$	$(3,2,-1,1)$	$(4,3,1,2)$

8. Скалярное произведение в $\mathbb{R}_1[x]$ определено равенством $(f(x),g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Применяя процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, по базису f_1, f_2 пространства $\mathbb{R}_1[x]$ постройте ортонормированный базис.

	f	g		f	g
8. 1.	$x+1$	3	8. 2.	$2x-1$	x
8. 3.	$3x$	$x-1$	8. 4.	$x-2$	-1
8. 5.	$2x$	$x+1$	8. 6.	$-x$	$x-2$
8. 7.	$2x-1$	$3x$	8. 8.	$-2x$	$x+2$
8. 9.	$2x-2$	x	8. 10.	$x+3$	1
8. 11.	$-x+1$	$2x$	8. 12.	$-x$	$2x+3$

9. Докажите, что евклидовы пространства E и E' евклидово изоморфны.

9. 1. $E = \mathbb{R}^2$, $(a,b) = a_1b_1 + a_2b_2$, $a, b \in E$;
$E' = \mathbb{R}^2$, $(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$, $x, y \in E'$.

9. 2. $E = \mathbb{R}^2$, $(a,b) = 2a_1b_1 + 3a_2b_2$, $a, b \in E$;
$E' = \mathbb{R}^2$, $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$, $x, y \in E'$.

9. 3. $E = M(2,\mathbb{R})$, $(A,B) = \sum_{i=1}^4 a_ib_i$,
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in E$;
$E' = \mathbb{R}_3[x]$, $(f(x),g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,

$f(x), g(x) \in E'$.

9.4. $E = \mathbb{R}_3[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E$;
$E' = M(2, \mathbb{R})$, $(A, B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$,
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in E'$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in E'$.

9.5. $E = \mathbb{R}^3$, $(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$, $a, b \in E$;
$E' = \mathbb{R}_2[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 x^2 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E'$.

9.6. $E = \mathbb{R}_2[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 x^2 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E$;
$E' = \mathbb{R}^3$, $(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$, $a, b \in E'$.

9.7. $E = \mathbb{R}_3[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 x^4 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E$;
$E' = M(2, \mathbb{R})$, $(A, B) = \sum_{i=1}^n i a_i b_i$,
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in E'$.

9.8. $E = M(2, \mathbb{R})$, $(A, B) = \sum_{i=1}^n i a_i b_i$,
$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in E$;
$E' = \mathbb{R}_3[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 x^4 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E'$.

9.9. $E = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$,
$a, b \in E$;
$E' = \mathbb{R}_1[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E'$.

9.10. $E = \mathbb{R}_1[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E$;
$E' = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$,
$a, b \in E'$.

9.11. $E = \mathbb{R}_1[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E$;

$E' = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2$, $a, b \in E'$.

9.12. $E = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2$, $a, b \in E$;
$E' = \mathbb{R}_1[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,
$f(x), g(x) \in E'$.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

7.1. Элементы теории

Пусть f — линейный оператор евклидова пространства V. Линейный оператор f^* называется *сопряженным* к оператору f, если для любых двух векторов $x, y \in V$ выполняется равенство

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)). \qquad (7.1)$$

Теорема 7.1. *Для любого линейного оператора f конечномерного евклидова пространства V существует единственный сопряженный оператор f^*. При этом матрица оператора f^* в ортонормированном базисе будет транспонированной по отношению к матрице оператора f в этом базисе.*

Линейный оператор f евклидова пространства V называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. если для любых $x, y \in V$ выполняется равенство:

$$(f(x), f(y)) = (x, y). \qquad (7.2)$$

Теорема 7.2. (Первый критерий ортогональности линейного оператора) *Линейный оператор f евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.*

Теорема 7.3. (Второй критерий ортогональности линейного оператора) *Для того, чтобы линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V был ортогональным необходимо и достаточно, чтобы оператор f переводил ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис.*

Матрица $A \in M(n, \mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если $A^T A = AA^T = E$. Здесь через A^T обозначается транспонированная матрица.

Теорема 7.4. (Третий критерий ортогональности линейного оператора) *Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда ортогональна матрица оператора f в некотором ортонормированном базисе.*

Линейный оператор f евклидова пространства V называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*. Из определения следует, что если оператор f является самосопряженным, то для всех $x, y \in V$ выполняется равенство $(f(x), y) = (x, f(y))$.

Квадратная матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется *симметрической*, если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для любых i, j. Очевидно, что матрица A является симметрической тогда и только тогда, когда она совпадает со своей транспонированной матрицей.

Теорема 7.5. *Линейный оператор f евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе пространства V является симметрической.*

На важную роль ортогональных и самосопряженных операторов в общей теории линейных операторов евклидовых пространств указывает следующая теорема.

Теорема 7.6. 1. *Любой линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V можно представить в виде $f = hg$, где h — ортогональный оператор, g — самосопряженный оператор пространства V.*

2. *Любую действительную квадратную матрицу можно представить в виде произведения ортогональной и симметрической матриц.*

Представление оператора f, указанное в пункте 1 теоремы 7.6, называется *полярным разложением.*

Ортогональным дополнением подпространства W евклидова пространства V называется множество $W^\perp$ всех векторов из V, каждый из которых ортогонален любому вектору из W: $W^\perp = \{x \in V \mid x \perp y \text{ для любого } y \in W\}$.

Теорема 7.7. 1. *Для любого подпространства W ев-*

клидова пространства V множество $W^\perp$ является подпространством.

2. *Если пространство V конечномерно, то*
$$V = W \oplus W^\perp.$$

3. *Если W — подпространство конечномерного евклидова пространства V, то*
$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W.$$

Лемма 7.8. *Пусть f — самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства V, W — подпространство V. Если подпространство W инвариантно относительно оператора f, то и подпространство $W^\perp$ инвариантно относительно f.*

Лемма 7.9. *Собственные значения самосопряженного оператора в евклидовом или унитарном пространстве являются действительными числами.*

Теорема 7.10. 1. *Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора f.*

2. *Самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства является диагонализируемым оператором.*

Лемма 7.11. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональна.*

Теорема 7.12. *Для любой симметрической матрицы $A \in M(n, \mathbb{R})$ существует такая ортогональная матрица T, что TAT^{-1} — диагональная матрица.*

7.2. Примеры решения задач

Пример 7.1. Матрица линейного оператора f в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 евклидова пространства V имеет вид:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Найдите матрицу сопряженного оператора в базисе
$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\ e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2.$$

☐ Выпишем матрицу
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Пусть B — матрица оператора f в базисе e_1', e_2'. Тогда
$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Так как $(e_1', e_2') = 0$, $\| e_1' \| = \| e_2' \| = 1$, то e_1', e_2' — ортонормированный базис евклидова пространства V. По теореме 7.1 матрица
$$B^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$
будет матрицей оператора f^* в базисе e_1', e_2'. ☒

Пример 7.2. Будет ли оператор g, действующий для каждого $x \in V^3$ по формуле $g(x) = x \times a$, ортогональным оператором пространства V^3? Здесь a — фиксированный вектор V^3, $x \times a$ — векторное произведение.

☐ Ввиду теоремы 7.2 оператор f ортогонален тогда и только тогда, когда $\|x\| = \|f(x)\|$ для любого $x \in V$. В нашем случае равенство примет вид $\|x\| = \|x \times a\|$. Отсюда следует, что
$$\|x\| = \|x\|\,\|a\| \sin \widehat{(x, a)}$$

для любого $x \in V^3$, что невозможно. Значит, оператор g не является ортогональным. $\boxtimes$

Пример 7.3. Найдите в $\mathbb{R}^4$ базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов

$$M = \{(1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,0,-1,0)\}.$$

$\square$ Обозначим $W = L(M)$,

$$a_1 = (1,-1,1,-1),\ a_2 = (1,1,1,1),\ a_3 = (1,0,-1,0).$$

Тогда произвольный вектор $y \in W$ можно записать в виде

$$y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — произвольный вектор из $W^\perp$. Очевидно, что $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $x \perp a_1$, $x \perp a_2$, $x \perp a_3$. Значит, координаты вектора x удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\lambda,\ x_3 = 0,\ x_4 = \lambda,$$

где λ — произвольное действительное число. Таким образом, $W^\perp = \{(0,-\lambda,0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(0,-1,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Значит, базис пространства $W^\perp$ состоит из одного вектора $(0,-1,0,1)$. $\boxtimes$

Пример 7.4. Для матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

найдите такую ортогональную матрицу B, чтобы матрица BCB^{-1} была диагональной. Сделайте проверку.

$\square$ Пусть f — линейный оператор пространства $\mathbb{R}^3$, имеющий в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ матрицу C. Найдем собственные значения оператора f.

Решая уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Найдем все собственные векторы линейного оператора f, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = -5$. Решая систему

$$(x_1 x_2 x_3)\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = (000),\ \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 9x_3 &= 0, \end{cases}$$

получим $x_1 = -\alpha/2$, $x_2 = \alpha, x_3 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Значит, собственными векторами оператора f, принадлежащими собственному значению $\lambda_1 = -5$, будут векторы $(-\alpha/2, \alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Один из них, например, $(-1,2,0)$ обозначим через a_1. Аналогично находим собственные векторы a_2 и a_3 оператора f, принадлежащие собственным значениям $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = 5$ соответственно: $a_2 = (0,0,1)$, $a_3 = (2,1,0)$. Векторы a_1, a_2, a_3 попарно ортогональны. Пронормировав их, получим векторы

$$e_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ e_2' = (0,0,1),\ e_3' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right),$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. В этом базисе матрица A оператора f имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица A и C связаны соотношением $A = BCB^{-1}$, где B — матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'. Строками этой матрицы являются, очевидно, координаты векторов e_1', e_2', e_3', т. е.

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}.$$

По лемме 7.11 матрица B ортогональна. Сделаем проверку. Так как $B \cdot B^T =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

то матрица B ортогональна и поэтому

$$B^{-1} = B^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{10}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ \frac{10}{\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Итак, B — ортогональная матрица, а BCB^{-1} — диагональная матрица. ⊠

7.3. Вопросы для самоконтроля

1. Сопряженный оператор.

1.1. Пусть ε — тождественный оператор евклидова пространства V. Найдите ε^*.

1.2. Пусть A — матрица линейного оператора f евклидова пространства V в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, A^T — матрица оператора g в этом базисе. Всегда ли $g = f^*$?

1.3. Пусть f — произвольный оператор одномерного евклидова пространства V. Найдите f^*.

2. Первый критерий ортогональности оператора.

2.1. Докажите, что тождественный оператор евклидова пространства ортогонален.

2.2. Докажите, что каждое собственное значение ортогонального оператора по модулю равно единице.

2.3. Докажите, что ортогональный оператор сохраняет угол между векторами.

2.4. Докажите, что ядро ортогонального оператора нулевое.

3. Второй критерий ортогональности оператора.

3.1. Докажите, что евклидов изоморфизм евклидова пространства V в себя является ортогональным оператором. Верно ли обратное?

3.2. Опишите все ортогональные операторы, действующие в одномерном евклидовом пространстве.

3.3. Докажите, что если два вектора x, y евклидова пространства имеют одинаковую длину, то существует ортогональный оператор f, переводящий x в y.

3.4. Пусть φ — ортогональный оператор евклидова пространства V. Будет ли оператор $(-\varphi)$ ортогональным?

4. Третий критерий ортогональности оператора.

4.1. Чему равен определитель любой ортогональной матрицы?

4.2. Может ли вырожденная матрица быть ортогональной матрицей?

4.3. Пусть матрицы A и B ортогональны. Являются ли ортогональными матрицы AB и A^{-1}?

4.4. Докажите, что множество всех ортогональных операторов конечномерного евклидова пространства образует мультипликативную группу.

4.5. Какому условию должны удовлетворять действительные числа α и β, чтобы ортогональной была матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}?$$

4.6. Может ли матрица ортогонального оператора в некотором базисе быть неортогональной?

5. Самосопряженный оператор.

5.1. Докажите, что оператор гомотетии H_α евклидова пространства является самосопряженным.

5.2. Может ли матрица самосопряженного линейного оператора в некотором базисе быть несимметрической?

5.3. Опишите все самосопряженные линейные операторы, действующие в одномерном евклидовом пространстве.

5.4. Что можно сказать о самосопряженном операторе f, если $(f(x), x) = 0$ для всех векторов x?

6. Свойства самосопряженного оператора.

6.1. Дайте определение ортогонального дополнения подпространства.

6.2. Докажите, что ортогональное дополнение подпространства само является подпространством.

6.3. Докажите, что для любого подпространства W конечномерного евклидова пространства V справедливо равенство $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

6.4. Покажите, что каждый самосопряженный оператор любого евклидова пространства обладает собственными значениями.

7. Критерий самосопряженности линейного оператора.

7.1. Существует ли базис, составленный из неортогональных собственных векторов самосопряженного оператора?

7.2. Покажите, что всякий самосопряженный оператор конечномерного евклидова пространства является диагонализируемым оператором.

7.3. Покажите, что всякая симметрическая матрица подобна диагональной матрице.

8. Диагонализируемость симметрических матриц.

8.1. Будет ли ортогональной матрица перехода от одного ортогонального базиса евклидова пространства к другому ортогональному базису?

8.2. Как найти ортогональную матрицу, диагонализирующую симметрическую матрицу?

7.4. Индивидуальные задания

1. Докажите следующие свойства сопряженных линейных операторов евклидова пространства.

1.1. $(f^*)^* = f$.

1.2. $(f+g)^* = f^* + g^*$.

1.3. $(fg)^* = g^* f^*$.

1.4. $(\alpha f)^* = \alpha f^*$.

1.5. $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$, если оператор f обратим.

1.6. $(f^n)^* = (f^*)^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Если операторы f и g перестановочны, то перестановочны и операторы f^* и g^*.

1.8. Если подпространство W конечномерного евклидова пространства V инвариантно относительно линейного оператора f, то его ортогональное дополнение $W^\perp$ инвариантно относительно f^*.

1.9. Ядро оператора f^* совпадает с ортогональным дополнением к образу оператора f.

1.10. $\mathrm{Ker}(ff^*) = \mathrm{Ker} f$.

1.11. Если x — общий собственный вектор операторов f и f^*, то соответствующие вектору x собственные значения λ и μ операторов f и f^* равны.

1.12. Операторы f и f^* имеют одинаковые спектры.

2. В пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ задано скалярное произведение: $(f,g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, где $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Пусть F — такой линейный оператор пространства $\mathbb{R}_2[x]$, что $F(f(x)) = f(x-a) - f(x-b)$. Найдите матрицу сопряженного оператора F^* в базисе $1, x, x^2$.

	a	b		a	b		a	b
2.1.	-1	2	2.2.	2	1	2.3.	1	-2
2.4.	2	3	2.5.	-2	3	2.6.	3	-2
2.7.	-1	3	2.8.	3	-1	2.9.	-3	1
2.10.	4	2	2.11.	-1	4	2.12.	3	4

3. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис евклидова

пространства V, A — матрица линейного оператора f в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$. Найдите матрицу оператора f^* в базисе e_1', e_2'.

	A		A		A
3.1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	3.2.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	3.3.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
3.4.	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$	3.5.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$	3.6.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
3.7.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	3.8.	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	3.9.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
3.10.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	3.11.	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	3.12.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. Найдите матрицу линейного оператора f^* в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если f переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно. Координаты всех векторов заданы в базисе e_1, e_2, e_3.

	a_1	a_2	a_3
4.1.	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$	$(1,1,1)$
4.2.	$(2,3,5)$	$(0,1,2)$	$(1,0,0)$
4.3.	$(2,0,3)$	$(4,1,5)$	$(3,1,2)$
4.4.	$(1,1,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,2)$
4.5.	$(2,1,-3)$	$(3,2,-5)$	$(1,-1,1)$
4.6.	$(2,0,1)$	$(-1,2,3)$	$(-1,1,1)$
4.7.	$(1,0,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
4.8.	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$
4.9.	$(-1,1,0)$	$(0,-1,2)$	$(0,0,-1)$
4.10.	$(-2,1,0)$	$(0,1,3)$	$(1,0,1)$
4.11.	$(1,1,1)$	$(0,0,-1)$	$(0,1,1)$
4.12.	$(-1,0,0)$	$(0,1,2)$	$(-2,-3,-5)$

	b_1	b_2	b_3
4.1.	$(1,2,1)$	$(3,1,2)$	$(7,-1,4)$
4.2.	$(1,1,1)$	$(1,1,-1)$	$(2,1,2)$
4.3.	$(1,2,-1)$	$(4,5,-2)$	$(1,-1,1)$
4.4.	$(1,1,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,1)$
4.5.	$(0,1,-2)$	$(-2,0,3)$	$(1,-1,1)$
4.6.	$(-3,0,1)$	$(0,2,3)$	$(1,1,1)$
4.7.	$(-1,-1,-1)$	$(-1,-1,1)$	$(0,1,0)$
4.8.	$(1,1,0)$	$(1,2,-1)$	$(0,1,3)$
4.9.	$(0,0,1)$	$(0,1,2)$	$(1,1,1)$
4.10.	$(1,0,1)$	$(2,1,0)$	$(1,0,3)$
4.11.	$(7,-1,4)$	$(-1,-2,-1)$	$(3,1,2)$
4.12.	$(-2,-1,-2)$	$(1,1,-1)$	$(-1,-1,-1)$

5. Определите, является ли ортогональным линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, действующий на векторы ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ по следующим формулам.

5.1. $n = 2$, $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_2$.

5.2. $n = 2$, $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$.

5.3. $n = 2$, $\varphi(e_1) = (1/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$,
$\varphi(e_2) = (1/\sqrt{2})(e_1 - e_2)$.

5.4. $n = 2$, $\varphi(e_1) = (1/13)(5e_1 - 12e_2)$,
$\varphi(e_2) = (1/13)(12e_1 + 5e_2)$.

5.5. $n = 2$, $\varphi(e_1) = (1/5)(3e_1 + 4e_2)$,
$\varphi(e_2) = (1/5)(4e_1 + 3e_2)$.

5.6. $n = 3$, $\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$,
$\varphi(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

5.7. $n = 3$, $\varphi(e_1) = (1/3)(2e_1 + e_2 - 2e_3)$,
$\varphi(e_2) = (1/\sqrt{2})(e_1 + e_3)$,
$\varphi(e_3) = (1/3\sqrt{2})(-e_1 + 4e_2 + e_3)$.

5.8. $n = 3$, $\varphi(e_1) = (1/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$,
$\varphi(e_2) = (1/2)(e_2 + \sqrt{3}e_3)$, $\varphi(e_3) = (1/\sqrt{3})(e_1 - e_3)$.

5.9. $n = 3$, $\varphi(e_1) = (1/5\sqrt{2})(5e_1 + 4e_2 - 3e_3)$,
$\varphi(e_2) = (1/5\sqrt{2})(5e_1 - 4e_2 + 3e_3)$,
$\varphi(e_3) = (1/5)(3e_1 + 4e_3)$.

5.10. $n = 2$, $\varphi(e_1) = (1/3\sqrt{5})(-5e_1 + 3e_2)$,
$\varphi(e_2) = (1/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$.

5.11. $n = 2$, $\varphi(e_1) = 2e_1 - \sqrt{3}e_2$, $\varphi(e_2) = -e_1 + e_2$.

5.12. $n = 2$, $\varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(e_2) = (1/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$.

6. В ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ линейный оператор задан матрицей B. Будет ли этот оператор ортогональным?

6.1. $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.2. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

6.3. $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.4. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

6.5. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6.6. $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.7. $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6.8. $B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.9. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.10. $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.11. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

6.12. $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$.

7. Докажите следующие свойства самосопряженных линейных операторов евклидова пространства.

7.1. Для любого линейного оператора f евклидова пространства оператор $f + f^*$ является самосопряженным.

7.2. Для любого линейного оператора f евклидова пространства операторы ff^* и f^*f являются самосопряженными.

7.3. Если f и g — самосопряженные операторы, то оператор $f + g$ является самосопряженным.

7.4. Если f и g — самосопряженные операторы и $fg = gf$, то fg — самосопряженный оператор.

7.5. Если f и g — самосопряженные операторы, то $fg + gf$ — самосопряженный оператор.

7.6. Если f — самосопряженный оператор, то αf — самосопряженный оператор для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

7.7. Если f — самосопряженный оператор, то $ff^* = f^*f$.

7.8. Если самосопряженный оператор f обратим, то f^{-1} — самосопряженный оператор.

7.9. Если f — самосопряженный оператор, то f^n — самосопряженный оператор для любого $n \in \mathbb{N}$.

7.10. Линейная комбинация с действительными коэффициентами самосопряженных операторов является самосопряженным оператором.

7.11. Множество всех самосопряженных линейных операторов евклидова пространства образует аддитивную группу.

7.12. В линейном пространстве $Hom_{\mathbb{R}}V$ множество всех самосопряженных линейных операторов является линейным подпространством. Здесь V — произвольное конечномерное евклидово пространство.

8. Найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов M из $\mathbb{R}^4$.

8.1. $M = \{(1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1)\}$.

8.2. $M = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$.

8.3. $M = \{(2, 1, 1, -1), (1, 1, 3, 0), (1, 2, 8, 1)\}$.

8.4. $M = \{(1, 2, 2, 2), (2, 0, 2, 1), (1, -2, 0, -1)\}$.

8. 5. $M = \{(1,1,1,1), (-1,1,1,-1), (2,0,2,0)\}$.

8. 6. $M = \{(1,-1,1,-1), (1,1,1,0), (0,1,0,-1)\}$.

8. 7. $M = \{(1,-1,-1,1), (2,1,1,3), (0,1,-1,0)\}$.

8. 8. $M = \{(0,1,-1,2), (2,-1,1,0), (0,0,1,1)\}$.

8. 9. $M = \{(1,-1,1,0), (0,2,1,-1), (-1,-1,0,0)\}$.

8. 10. $M = \{(-2,1,1,-1), (0,1,1,0), (-1,2,0,-1)\}$.

8. 11. $M = \{(1,1,0,0), (1,2,1,-1), (0,1,0,1)\}$.

8. 12. $M = \{(-1,2,0,1), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}$.

9. Для данной матрицы C найдите такую ортогональную матрицу T, что TCT^{-1} — диагональная матрица. Сделайте проверку.

9. 1. $C = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. 9. 2. $C = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

9. 3. $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. 9. 4. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9. 5. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 9. 6. $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9. 7. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 9. 8. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. 9. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 9. 10. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. 11. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 9. 12. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найдите собственные значения и ортонормированный базис e'_1, e'_2 из собственных векторов самосопряженного линейного оператора φ, заданного в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 матрицей D. Найдите матрицу оператора φ в базисе e'_1, e'_2.

	D		D
10. 1.	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$	10. 2.	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
10. 3.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	10. 4.	$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$
10. 5.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	10. 6.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
10. 7.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	10. 8.	$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}$
10. 9.	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	10. 10.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
10. 11.	$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$	10. 12.	$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8.1. Элементы теории

В дальнейшем будем рассматривать поле P, характеристика которого не равна 2.

Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *над полем* P называется многочлен от этих переменных с коэффициентами из поля P, каждое слагаемое которого имеет вторую степень. Каждая квадратичная форма может быть записана в следующем симметричном виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots \\ \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2, \qquad (8.1)$$

где коэффициенты $a_{ij} \in P$ удовлетворяют условию:

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (8.2)$$

Если в первоначальной записи квадратичной формы коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i различны, то можно сложить их и, разделив сумму на 2, получить равные.

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, записанной в симметричном виде (8.1), называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ранг матрицы A называется *рангом квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Из условия (8.2) следует, что матрица квадратичной формы является симметрической матрицей.

Квадратичную форму удобно записывать в матричной форме. Для этого введём в рассмотрение строку переменных $X = (x_1x_2\ldots x_n)$. Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = XAX^T$, где A — матрица квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Напомним, что X^T — транспонированная матрица по отношению к матрице X.

Линейным преобразованием переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *над полем* P называется переход от них к переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (8.3)$$

где $\alpha_{ij} \in P$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *матрицей линейного преобразования* (8.3). Линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей называется *невырожденным*.

Если $X = (x_1x_2\ldots x_n)$, $Y = (y_1y_2\ldots y_n)$, то система равенств (8.3) в матричной форме принимает вид: $X^T = AY^T$. Если (8.3) — невырожденное линейное преобразование переменных, то можно выразить переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$Y^T = A^{-1}X^T. \qquad (8.4)$$

Линейное преобразование (8.4) переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется *обратным* к преобразованию (8.3).

Под *произведением* двух линейных преобразований переменных понимается их последовательное выполнение. Матрица произведения линейных преобразований переменных равна произведению матриц этих преобразований.

Квадратичная форма называется *канонической*, если она не содержит произведений различных переменных. *Каноническим видом* квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется любая каноническая квадратичная форма $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, в которую превращается форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в результате применения к входящим в неё переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ невырожденного линейного преобразования.

Теорема 8.1. *Всякую квадратичную форму над полем* P *можно с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования её переменных привести к канониче-*

скому виду.

Теорема 8.2. *Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы над полем P не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду и равно рангу квадратичной формы.*

Теорема 8.2 позволяет ввести следующее определение. Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется *индексом инерции* этой квадратичной формы.

Одним из наиболее простых способов приведения квадратичной формы к каноническому виду является так называемый метод Лагранжа. Он подробно описан в учебниках по линейной алгебре. В следующей теореме предлагается другой способ приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду.

Теорема 8.3. *Для любой действительной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с ортогональной матрицей, приводящее эту форму к каноническому виду. При этом коэффициентами при квадратах переменных будут корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Нормальным видом комплексной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такой её канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны 1.

Теорема 8.4. *Всякая комплексная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных к нормальному виду.*

Нормальным видом действительной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такой её канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо (-1).

Теорема 8.5. *Всякая действительная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных к нормальному виду.*

Следующая теорема показывает, что нормальный вид действительной квадратичной формы определён однозначно с точностью до обозначения переменных, а число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде являются инвариантами квадратичной формы.

Теорема 8.6. *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.*

Число положительных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы называется *положительным индексом инерции* этой квадратичной формы, а число отрицательных коэффициентов — её *отрицательным индексом инерции.*

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определённой*, если для любых n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет место неравенство

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0.$$

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *отрицательно определённой*, если для любых n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет место неравенство

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0.$$

Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы называются *знакоопределенными.*

Лемма 8.7. *Если к переменным положительно определённой квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет положительно определённой.*

Лемма 8.8. *Если к переменным отрицательно определённой квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет отрицательно определённой.*

На следующих двух теоремах основаны способы распознавания характера определённости действительной квадратичной формы путём приведения её к каноническому виду.

Теорема 8.9. *Для того, чтобы действительная квадратичная форма от n переменных была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы положительный индекс инерции этой квадратичной формы был равен n.*

Теорема 8.10. *Для того, чтобы действительная квадратичная форма от n переменных была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы отрицательный индекс инерции этой квадратичной формы был равен n.*

Главными минорами квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются миноры:

$$\triangle_1 = | \, a_{11} \, |, \; \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \dots,$$

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е миноры, расположенные в левом верхнем углу матрицы A.

Лемма 8.11. *Знак определителя матрицы действительной квадратичной формы не меняется при применении к этой форме невырожденного линейного преобразования переменных.*

Следствие. *Определитель матрицы положительно определённой квадратичной формы является положительным числом.*

Теорема 8.12. *Действительная квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны. Действительная квадратичная форма является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка её матрицы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.*

Способ распознавания характера определённости квадратичной формы, основанный на теореме 8.12, называется *критерием Сильвестра.*

8.2. Примеры решения задач

Пример 8.1. Запишите в симметричном виде и найдите ранг квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3x_1 - 3x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

☐ В результате приведения подобных форма примет вид: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 3x_2x_3$. Запишем её в симметричном виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_1 + \\ + x_2^2 - (3/2)x_2x_3 + x_3x_1 - (3/2)x_3x_2 + 0 \cdot x_3^2.$$

Матрицей квадратичной формы f будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A имеет ранг 3, то ранг квадратичной формы f равен 3. $\boxtimes$

Пример 8.2. С помощью метода Лагранжа приведите квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ к нормальному виду над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Укажите линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду.

$\square$ Приведём квадратичную форму f к каноническому виду методом Лагранжа. Так как в f нет квадратов переменных, то сделаем замену переменных $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$f(y_1,y_2,y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 4y_2y_3.$$

Теперь сделаем ещё одно линейное преобразование переменных $z_1 = 2y_1 - 2y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$ или $y_1 = (1/2)z_1 + z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$f(z_1,z_2,z_3) = (1/2)z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 4z_2z_3.$$

Наконец, преобразование переменных $t_1 = z_1$, $t_2 = -2z_2 - 2z_3$, $t_3 = z_3$ или $z_1 = t_1$, $z_2 = -(1/2)t_2 - t_3$, $z_3 = t_3$ с матрицей преобразования

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$f(t_1,t_2,t_3) = (1/2)t_1^2 - (1/2)t_2^2.$$

Найдём нормальный вид квадратичной формы f над полем $\mathbb{R}$. Для этого сделаем замену переменных $u_1 = (1/\sqrt{2})t_1$, $u_2 = (1/\sqrt{2})t_2$, $u_3 = t_3$ или $t_1 = \sqrt{2}u_1$, $t_2 = \sqrt{2}u_2$, $t_3 = u_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы f над полем $\mathbb{R}$: $f(u_1,u_2,u_3) = u_1^2 - u_2^2$. Матрицей линейного преобразования переменных будет матрица

$$T = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невырожденное линейное преобразование переменных x_1, x_2, x_3, приводящее к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$, следующее: $x_1 = (1/\sqrt{2})u_1 + (1/\sqrt{2})u_2 + 2u_3$, $x_2 = (1/\sqrt{2})u_1 - (1/\sqrt{2})u_2$, $x_3 = u_3$. Нетрудно проверить, что при этом преобразовании форма $f(x_1,x_2,x_3)$ примет вид формы $f(u_1,u_2,u_3)$.

Для нахождения нормального вида квадратичной формы f над полем $\mathbb{C}$ сделаем замену переменных $v_1 = (1/\sqrt{2})t_1$, $v_2 = (1/\sqrt{-2})t_2$, $v_3 = t_3$ или $t_1 = \sqrt{2}v_1$, $t_2 = i\sqrt{2}v_2$, $t_3 = v_3$ с матрицей линейного преобразования

$$B_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы f над полем $\mathbb{C}$: $f(v_1,v_2,v_3) = v_1^2 + v_2^2$. Матрицей линейного преобразования переменных x_1, x_2, x_3 будет матрица

$$T_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot B_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование переменных x_1, x_2, x_3, приводящее к нормальному виду над $\mathbb{C}$, имеет вид: $x_1 = (1/\sqrt{2})v_1 +$

$+\, i(1/\sqrt{2})v_2 + 2v_3$, $x_2 = (1/\sqrt{2})v_1 - i(1/\sqrt{2})v_2$, $x_3 = v_3$. ⊠

Пример 8.3. При каких значениях λ квадратичная форма $f(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$ является отрицательно определённой?

☐ Составим матрицу квадратичной формы f:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет два главных минора

$$\triangle_1 = |\, \lambda \,| = \lambda, \ \triangle_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4,$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма f является отрицательно определённой, если

$$\begin{cases} \triangle_1 < & 0 \\ \triangle_2 > & 0, \end{cases} \begin{cases} \lambda < & 0 \\ \lambda^2 + 3\lambda - 4 > & 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $\lambda \in (-\infty; -4)$. Итак, квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ является отрицательно определённой при $\lambda \in (-\infty; -4)$. ⊠

8.3. Вопросы для самоконтроля

1. Определение квадратичной формы.

1.1. Запишите в симметричном виде квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_2x_1 - 4x_2x_3$.

1.2. Запишите квадратичную форму, если её матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 21 \\ 2 & -3 & 3 \\ 21 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3. Каким свойством обладает матрица квадратичной формы?

1.4. Запишите квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в матричном виде.

2. Линейные преобразования переменных.

2.1. Запишите линейное преобразование переменных в матричном виде.

2.2. Всякое ли линейное преобразование переменных имеет обратное?

2.3. Найдите произведение линейных преобразований

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_1 + 3y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -z_1 + z_2 \\ y_2 = 2z_1 - 4z_2. \end{cases}$$

2.4. Найдите линейное преобразование переменных, обратное преобразованию

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = -y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = -2y_1 + y_3. \end{cases}$$

3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода Лагранжа.

3.1. Какой вид имеет матрица канонической квадратичной формы?

3.2. На примере квадратичной формы $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ покажите, что одна и та же квадратичная форма с помощью различных линейных невырожденных преобразований переменных может быть приведена к различным каноническим видам.

3.3. Изложите сущность метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

3.4. Как находится невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду?

4. Индекс инерции квадратичной формы.

4.1. Как изменяется матрица квадратичной формы при линейном преобразовании переменных?

4.2. Не приводя квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_2x_3$$

к каноническому виду, определите число нулевых коэффициентов в её каноническом виде.

4.3. Как определить индекс инерции квадратичной формы?

5. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.

5.1. Какое линейное преобразование переменных называется ортогональным?

5.2. Как построить ортогональное преобразование переменных, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду?

5.3. Как определить канонические коэффициенты квадратичной формы, приведенной к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных?

6. Нормальный вид комплексной квадратичной формы.

6.1. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ к нормальному виду над полем комплексных чисел.

6.2. Как по каноническому виду комплексной квадратичной формы построить её нормальный вид?

6.3. Как определить число ненулевых коэффициентов в нормальном виде комплексной квадратичной формы, не приводя эту форму к каноническому виду?

7. Нормальный вид действительной квадратичной формы.

7.1. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$ к нормальному виду над полем действительных чисел.

7.2. Как по каноническому виду действительной квадратичной формы построить нормальный вид?

8. Закон инерции действительных квадратичных форм.

8.1. Зависит ли число положительных коэффициентов в каноническом виде действительной квадратичной формы от выбора преобразования переменных, приводящего квадратичную форму к каноническому виду?

8.2. Как связаны между собой положительный индекс инерции, отрицательный индекс инерции и ранг матрицы действительной квадратичной формы?

9. Знакоопределенные квадратичные формы.

9.1. Приведите примеры знакоопределенных квадратичных форм.

9.2. Докажите, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда форма $(-f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ является положительно определённой.

9.3. Зависит ли характер определённости квадратичной формы от выбора невырожденного линейного преобразования переменных?

9.4. Докажите лемму 8.8.

10. Критерии определённости квадратичной формы.

10.1. Чему равен ранг матрицы положительно определённой квадратичной формы?

10.2. Чему равен ранг матрицы отрицательно определённой квадратичной формы?

10.3. Докажите, что матрица положительно определённой квадратичной формы является невырожденной.

10.4. Докажите, что матрица отрицательно определённой квадратичной формы является невырожденной.

10.5. Докажите теорему 8.10.

10.6. Докажите, что квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда в её каноническом виде все коэффициенты положительны.

11. Критерий Сильвестра.

11.1. Как определить характер определённости квадратичной формы, не применяя критерия Сильвестра?

11.2. Какие миноры квадратной матрицы называются главными?

11.3. Докажите критерий Сильвестра отрицательно определённых квадратичных форм, опираясь на критерий Сильвестра для положительно определённых квадратичных форм.

8.4. Индивидуальные задания

1. Запишите матрицы квадратичных форм F_1, F_2. Вычислите ранги этих квадратичных форм.

1. 1. $F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - 4x_2x_4$.

1. 2. $F_1(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2z^2 + 4yz + 5z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$.

1. 3. $F_1(x,y,z) = x^2 - 4xy + 2xz + 4y^2 + z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3$.

1. 4. $F_1(x,y,z) = 2x^2 + 9y^2 - 3z^2 + 8xy - 4xz - 10yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.

1. 5. $F_1(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4xy - 2xz + z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + x_1x_3 + x_4^2$.

1. 6. $F_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 2xz - 4yz - z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_3x_4 + x_4^2$.

1. 7. $F_1(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

1. 8. $F_1(x,y,z) = y^2 + 2xy + 4xz + 2yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.

1. 9. $F_1(x,y,z) = xy + xz + yz + z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 9x_1^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4$.

1. 10. $F_1(x,y,z) = x^2 + z^2 - 2y^2 + 4xy - 10xz + 4yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_4$.

1. 11. $F_1(x,y,z) = 3x^2 + xy - 2yz + 4xz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_4 + 2x_3x_4$.

1. 12. $F_1(x,y,z) = z^2 - y^2 + 2x^2 + 3xy - 2yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + x_1x_2 - 2x_2x_3$.

2. Методом Лагранжа приведите квадратичные формы G_1 и G_2 к каноническому виду. Укажите невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду. Сделайте проверку.

2. 1. $G_1 = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
$G_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

2. 2. $G_1 = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
$G_2 = 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

2. 3. $G_1 = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
$G_2 = 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2. 4. $G_1 = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_2$;
$G_2 = -4x_1x_2 + 2x_1x_3$.

2. 5. $G_1 = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
$G_2 = x_1x_2 - 4x_2x_3 + 6x_1x_3$.

2. 6. $G_1 = x_1x_4 + x_1x_3 + 4x_2x_3$;
$G_2 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$.

2. 7. $G_1 = 2x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3$;
$G_2 = x_2x_3 - 2x_1x_3$.

2. 8. $G_1 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
$G_2 = x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2. 9. $G_1 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x - x_2x_3$;
$G_2 = 2x_1x_3 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.

2. 10. $G_1 = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3$;
$G_2 = 6x_2x_3 - x_1x_2$.

2. 11. $G_1 = x_1x_2 + x_2x_3$;
$G_2 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

2. 12. $G_1 = -2x_3^2 + 2x_1x_3 - 6x_1x_2 + x_1^2$;
$G_2 = 6x_2x_3 - 4x_1x_2 + x_1x_3$.

3. Определите индекс инерции квадратичных форм F_1, G_1, F_2, G_2 из заданий 1 и 2.

4. Найдите ортогональную матрицу T такую, что TAT^{-1} — диагональная матрица, где A — матрица квадратичной формы F. Сделайте проверку.

4. 1. $F = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

4. 2. $F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

4. 3. $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. 4. $F = x_2^2 + 2x_1x_3$.

4. 5. $F = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4. 6. $F = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

4. 7. $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4. 8. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4.9. $F = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
4.10. $F = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2$.
4.11. $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2$.
4.12. $F = x_1^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + x_2^2$.

5. Найдите ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду.

5.1. $F = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2$.
5.2. $F = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.
5.3. $F = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
5.4. $F = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
5.5. $F = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
5.6. $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.
5.7. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
5.8. $F = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
5.9. $F = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
5.10. $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.
5.11. $F = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
5.12. $F = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2$.

6. Найдите нормальный вид над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$, а также невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду, для квадратичных форм F из заданий 4 и 5.

7. Вычислите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичных форм G_1, G_2 из задания 2. Являются ли эти формы положительно определенными (отрицательно определенными)?

8. При каких значениях λ квадратичная форма F является положительно (отрицательно) определенной?

8.1. $F = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
8.2. $F = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.
8.3. $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
8.4. $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.
8.5. $F = x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3$.
8.6. $F = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

8.7. $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.
8.8. $F = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 8\lambda x_1x_3 - 12x_2x_3 + x_2^2$.
8.9. $F = \lambda x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1 + x_2^2 + 4x_1^2$.
8.10. $F = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3$.
8.11. $F = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2$.
8.12. $F = x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

Литература

1. *Бузланов, А. В.* Лабораторные работы по курсу «Алгебра и теория чисел» (раздел «Линейная алгебра», часть 1, часть 2, часть 3) для студентов математического факультета / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, А. П. Кармазин — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 1990-1991.
2. *Бузланов, А. В.* Алгебра и теория чисел: практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, В. С. Монахов. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2006.
3. *Бурдун, А. А.* Сборник задач по алгебре и геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. — Минск: Университетское, 1999.
4. *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру: в 3 ч. / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2001.
5. *Лельчук, М. П.* Практические занятия по алгебре и теории чисел / М. П. Лельчук, И. И. Полевченко, А. М. Радьков, Б. Д. Чеботаревский. — Минск: Вышэйш. шк., 1986.
6. *Милованов, М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск: Амалфея, 2001.
7. *Монахов, В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск: Вышэйш. шк., 2006.
8. *Монахов, В. С.* Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
9. *Радьков, А. М.* Алгебра и теория чисел / А. М. Радьков, Б. Д. Чеботаревский. — Минск: Вышэйш. шк., 1992.
10. Сборник задач по алгебре / под ред. Кострикина А.И. — М.: Физматлит. 2001.
11. *Шнеперман, Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1982.
12. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987.

Учебное издание

Бузланов Александр Васильевич
Каморников Сергей Федорович
Монахов Виктор Степанович

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать Формат 60 × 84 1/16.
Бумага писчая № 1. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. Тираж 150 экз. Заказ №

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104