

УДК 512.542

ЗАВИСИМОСТЬ ПРОИЗВОДНОЙ p -ДЛИНЫ p -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ ОТ ПОРЯДКА ЕЕ СИЛОВСКОЙ p -ПОДГРУППЫ

Д.В. Грицук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

DEPENDENCE OF THE DERIVED p -LENGTH OF A p -SOLVABLE GROUP ON THE ORDER OF ITS SYLOW p -SUBGROUP

D.V. Gritsuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Доказывается, что производная p -длина $l_p^a(G)$ p -разрешимой группы G с силовской p -подгруппой порядка p^n не превышает $1 + \frac{n}{2}$, а если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$.

Ключевые слова: конечная группа, p -разрешимая группа, силовская подгруппа, производная p -длина.

It is proved that the derived p -length $l_p^a(G)$ of the p -solvable group G in which the Sylow p -subgroup has order p^n is at most $1 + \frac{n}{2}$ and if $p \notin \{2, 3\}$ then $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$.

Keywords: finite group, p -solvable group, Sylow subgroup, derived p -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

В 1956 году Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] предложили понятие p -длины p -разрешимой группы и исследовали ее зависимость от некоторых инвариантов силовской p -подгруппы [2, VI.6.6]. В частности, p -длина p -разрешимой группы с силовской p -подгруппой порядка p^n не превышает n . Эта оценка существенно снижена Е.Г. Брюхановой [4], которая доказала, что p -длина p -разрешимой группы не превышает производной длины ее силовской p -подгруппы. А. Манн [5] установил, что производная длина разрешимой группы G порядка p^n не превышает наибольшего значения d , удовлетворяющего неравенству: $n \geq 2^{d-1} + 2d - 4$.

В.С. Моначов [6] предложил следующее определение производной p -длины p -разрешимой группы. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом,

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (0.1)$$

факторы которого являются либо p' -группами, либо абелевыми p -группами. Наименьшее число абелевых p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p -длиной группы G и обозначается через $l_p^a(G)$. Ясно, что производная p -длина p -группы совпадает с ее производной длиной. Некоторые

оценки производной p -длины получены в работах [7]–[9]. В частности, в [8] установлено, что производная p -длина конечной p -разрешимой группы G с бициклической силовской p -подгруппой не превышает 2 при $p \geq 3$ и $l_2^a(G) \leq 3$. Понятно, что

$$l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot d(G_p), \quad (0.2)$$

где $l_p(G)$ – p -длина p -разрешимой группы G , а $d(G_p)$ – производная длина ее силовской p -подгруппы. Из неравенства (0.2) и [4] получаем общую оценку производной p -длины p -разрешимой группы G :

$$l_p^a(G) \leq (d(G_p))^2. \quad (0.3)$$

Но эта оценка неточная. Из (0.3) для симметрической группы S_4 степени 4 получаем, что $l_2^a(S_4) \leq 4$, в то время как $l_2^a(S_4) = 2$. Соответствующие примеры можно привести для любого простого p .

В настоящей статье исследуется производная p -длина p -разрешимой группы G в зависимости от порядка p^n ее силовской p -подгруппы. Доказывается, что $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$, а если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$.

1 Используемые понятия и обозначения

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется

π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$.

Цепочку подгрупп (0.1) называют субнормальным рядом группы G , если подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i для каждого i . Фактор-группы G_i / G_{i+1} называют факторами ряда (0.1).

Группа называется p -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (0.1) факторы которого являются либо разрешимыми p -группами, либо p' -группами. Наименьшее число p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется p -длиной p -разрешимой группы G и обозначается через $l_p(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m , для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$.

2 Вспомогательные леммы

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

При $\pi = \{p\}$ из [7] получаем утверждения следующих двух лемм.

Лемма 2.1. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если H – подгруппа группы G , то $l_p^a(H) \leq l_p^a(G)$;
- 2) если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G), l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N)$;
- 3) если N – нормальная p' -подгруппа группы G , то $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$;
- 4) если G и V – p -разрешимые группы, то $l_p^a(G \times V) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\}$;
- 5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G , то $l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}$.

Лемма 2.2. Если N – нормальная p -подгруппа p -разрешимой группы G , то

$$l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + d(G_p).$$

Лемма 2.3 [9, Лемма 2.5]. Пусть G – p -разрешимая группа, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Тогда:

- 1) если G_p имеет порядок p или p^2 , то $l_p^a(G) \leq 1$;
- 2) если G_p имеет порядок p^3 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для всех p и $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$;
- 3) если G_p имеет порядок p^4 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \in \{2, 3\}$. Кроме того, $l_p(G) \leq 2$ для всех p .

Лемма 2.4 [5, Теорема 1]. Пусть G – p -группа порядка p^m и производной длины d . Тогда

$$m \geq 2^{d-1} + 2d - 4.$$

Через $O_{p'}(G)$ обозначается наибольшая нормальная p' -подгруппа группы G . Из [10, Лемма 2] при $\pi = \{p\}$ получаем следующую лемму.

Лемма 2.5. Если G – p -разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ и $O_p(G) = F(G)$.

Лемма 2.6. Если G – неединичная p -разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$.

Доказательство. Пусть G – неединичная p -разрешимая группа, $O_{p'}(G) = 1$ и $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини. Тогда фактор-группа $G/\Phi(G)$ – неединичная p -разрешимая группа. Пусть $N/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в фактор-группе $G/\Phi(G)$. Известно, что в этом случае $N/\Phi(G)$ либо элементарная абелева p -группа, либо p' -группа.

Если $N/\Phi(G)$ – элементарная абелева p -группа, то $N/\Phi(G)$ нильпотентна и N – нильпотентная группа по теореме Гашюца [1, Теорема 3.24]. Отсюда, $\Phi(G) < N \leq F(G)$ и лемма доказана.

Если $N/\Phi(G)$ – p' -группа, то $N = [\Phi(G)]K$ по [2], где K – p' -холлова подгруппа в N . K нормальной подгруппе N и p' -холловой подгруппе K можно применить лемму Фраттини:

$$G = N_G(K)N = N_G(K)\Phi(G) = N_G(K),$$

следовательно, K нормальна в G и $K \leq O_{p'}(G) = 1$, противоречие. Лемма доказана.

3 Оценка производной p -длины

Теорема 3.1. Пусть G – p -разрешимая группа, G_p – ее силовская p -подгруппа порядка p^n .

Если $p \notin \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$. Если $p \in \{2, 3\}$, то $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Если $n \leq 2$, то G_p абелева и по лемме 2.3 (1) $l_p^a(G) = 1 \leq \frac{n+1}{2}$. Далее считаем, что $n \geq 3$.

По лемме 2.1 (3) можно считать, что $O_{p'}(G) = 1$. Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть N_1 и N_2 – две минимальные нормальные подгруппы группы G . Так как $|G/N_i| < |G|$, $i = 1, 2$, то по предположению индукции $l_p^a(G/N_i) \leq \frac{n+1}{2}$. По лемме 2.1 (5) $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$. Итак, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N .

Так как группа G p -разрешима и $O_{p'}(G) = 1$, то подгруппа Фиттинга $F(G)$ является p -подгруппой, поэтому $F(G) = O_p(G)$. По лемме 2.5

$$C_G(F(G)) \subseteq F(G), \text{ т. е. } C_G(F(G)) = Z(F(G)).$$

Пусть $|F(G)| = p^m$, а $d(F(G)) = d$. Тогда по индукции $l_p^a(G/F(G)) \leq \frac{n-m+1}{2}$. По лемме 2.2

$$l_p^a(G) \leq d(F(G)) + l_p^a(G/F(G)) \leq d + \frac{n-m+1}{2} = \frac{n+1}{2} + d - \frac{m}{2}.$$

Ясно, что теорему надо доказывать в случае, когда $d - \frac{m}{2} > 0$, т. е. когда $2d > m$.

По лемме 2.4 $m \geq 2^{d-1} + 2d - 4$, поэтому $2d > m \geq 2^{d-1} + 2d - 4, 0 > 2^{d-1} - 4, d \in \{1, 2\}$.

При $d = 1$ из неравенства $2d > m$ получаем, что $|F(G)| = p$. Теперь $G/F(G)$ p' -группа как группа автоморфизмов группы $F(G)$ и $|G_p| = p$, противоречие.

Следовательно, $d = 2$, подгруппа $F(G)$ абелева, значит $m = 3$ и $C_G(F(G)) = Z(F(G)) = \Phi(F(G))$ – подгруппа порядка p . Поскольку $1 \neq \Phi(F(G)) \subseteq \Phi(G)$, то $\Phi(G) \neq 1$. По лемме 2.6 $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$, поэтому $|F(G) : \Phi(G)| = p$ или p^2 . Из [1, Теорема 4.24] имеем, что фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$. Так как $|F(G)/\Phi(G)| \leq p^2$, то число прямых сомножителей не более 2.

Пусть $F(G)/\Phi(G) = K_1/\Phi(G) \times K_2/\Phi(G)$, где $K_i/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Ясно, что $|K_i/\Phi(G)| = p$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому фактор-группа

$$(G/\Phi(G))/C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))$$

будет p' -группой. По [1, Лемма 2.33]

$$(G/\Phi(G))/\bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))$$

также будет p' -группой. Так как

$$\begin{aligned} & \bigcap_{i=1}^2 C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G)) = \\ & = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) \subseteq F(G)/\Phi(G), \end{aligned}$$

то $(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) \simeq G/F(G)$ будет p' -группой и $F(G) = G_p$ – имеет порядок p^3 . По лемме 2.3 (2) $l_p^a(G) \leq 2 \leq \frac{3+1}{2}$, т. е. теорема справедлива.

Остается случай, когда $F(G)/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/F(G)$. По [1, Теорема 2.8]

$$C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G),$$

$$G/\Phi(G)/C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = G/F(G)$$

будет группой автоморфизмов для $F(G)/\Phi(G)$.

Так как $|F(G)/\Phi(G)| = p$ или p^2 , то $G/F(G)$ будет p' -группой или изоморфна подгруппе группы $GL(2, p)$. В последней силовская p -подгруппа имеет простой порядок, поэтому $|G_p| = p^3$ или p^4 . Если $|G_p| = p^3$, то опять по лемме 2.3 (2) $l_p^a(G) \leq 2 \leq \frac{3+1}{2}$. Если $|G_p| = p^4$, то по лемме 2.3 (3) $l_p^a(G) \leq 2 \leq \frac{4+1}{2}$ для $p > 3$ и $l_p^a(G) \leq 3 \leq 1 + \frac{4}{2}$ для $p \in \{2, 3\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
- 2 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
- 3 Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
- 4 Брюханова, Е.Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы / Е.Г. Брюханова // Математические заметки. – 1981. – Т. 29, № 2. – С. 161–170.
- 5 Mann, A. The derived length of p -groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
- 6 Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
- 7 Грицук, Д.В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
- 8 Грицук, Д.В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 61–66.
- 9 Грицук, Д.В. Производная π -длина π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
- 10 Монахов, В.С. О нильпотентной π -длине максимальных подгрупп конечных π -разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.

Поступила в редакцию 15.08.14.