МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

В.Н. Тютянов[1], **Т.В. Тихоненко**[2]

[1]*Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь*
[2]*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь*

ON FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEM OF SYLOW SUBGROUPS

V.N. Tyutyanov[1], **T.V. Tihonenko**[2]

[1]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus*
[2]*P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus*

В работе доказана разрешимость конечной группы, у которой любая силовская подгруппа либо $\mathbb{P}$-субнормальна, либо абнормальна.

***Ключевые слова**: силовская подгруппа, простая неабелева группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа, абнормальная подгруппа.*

The solvability of the finite group in which any Sylow subgroup is either $\mathbb{P}$-subnormal or abnormal, was proved.

***Keywords**: Sylow subgroup, simple non-abelian group, $\mathbb{P}$-subnormal subgroup, abnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Строение группы в значительной мере связано со свойствами ее силовских подгрупп и, в частности, со способами их вложения в группу.

Подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. В работе [1] введено понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через H $\mathbb{P}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

В работе [1] было установлено строение групп с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами. В частности, показано, что они являются дисперсивными по Оре. В настоящей статье рассматриваются конечные группы, силовские подгруппы которых либо абнормальны, либо $\mathbb{P}$-субнормальны во всей группе.

С использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G – конечная группа, у которой любая силовская подгруппа либо $\mathbb{P}$-субнормальна, либо абнормальна в G. Тогда группа G разрешима.*

Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н. поставили следующую задачу [2, вопрос 4]: *описать группы G, у которых любая подгруппа либо $\mathbb{P}$-субнормальна, либо абнормальна в G.*

Из теоремы следует, что группы, удовлетворяющие условиям вопроса 4 из работы [2], являются разрешимыми.

1 Обозначения и предварительные результаты

Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [3]–[5]. Приведем некоторые из них для удобства чтения:

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G;

$Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;

$[R]S$ – полупрямое произведение подгрупп R и S, где R является нормальной подгруппой в $[R]S$;

H $\mathbb{P}$-sn G – подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G;

R^n – прямое произведение n экземпляров групп, изоморфных R.

Лемма 1.1. *Пусть H – подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа в группе G. Тогда, если H $\mathbb{P}$-sn G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn N и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N.*

Доказательство. Следует из пунктов 1 и 2 леммы 2.1 в [2].

Из теоремы 6 [6] следует, что если единичная подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то простые неабелевы факторы группы G принадлежат списку: $SL_3(3)$, $SL_3(5)$, $PSL_2(q)$ для подходящего значения параметра $q \geq 4$. Мы несколько уточним данный результат.

Лемма 1.2. *Пусть G – простая неабелева группа и* $1\ \mathbb{P}$*-sn G. Тогда* $G \in \{SL_3(3),\ SL_3(5),\ PSL_2(7),\ PSL_2(11),\ SL_2(2^n)$, *где* $2^n+1 = p$ *– простое число Ферма*$\}$.

Доказательство. Из [3] следует, что если $G \cong SL_3(3)$ или $G \cong SL_3(5)$, то $1\ \mathbb{P}\text{-}sn\ G$. Рассмотрим случай, когда $G \cong PSL_2(q)$. По теореме II.8.27 [5] максимальными подгруппами M простого индекса в G могут быть A_4, S_4, A_5 и борелевская подгруппа порядка $\varepsilon^{-1}q(q-1)$, где $\varepsilon = (2, q-1)$.

Если $M \cong A_4$, то $|G| = 2^2{\cdot}3{\cdot}t$, где t – простое число и $t \notin \{2,3\}$. Так как $|\pi(G)| = 3$, то из [4, с. 20] следует, что $G \in \{PSL_2(2^2),\ PSL_2(3^2),\ PSL_2(7),\ PSL_2(2^3),\ PSL_2(17)\}$. Очевидно, что только группа $PSL_2(2^2)$ имеет максимальную подгруппу простого индекса, изоморфную A_4. Так как $2^2 + 1 = 5$ – простое число Ферма, то $PSL_2(2^2)$ содержится в списке групп леммы 1.2. Ясно, что $1\ \mathbb{P}\text{-}sn\ PSL_2(2^2)$.

Если $M \cong S_4$, то как и в предыдущем пункте показывается, что $G \cong PSL_2(7)$. Очевидно, что $1\ \mathbb{P}\text{-}sn\ PSL_2(7)$.

Пусть $M \cong A_5$. Так как простая неабелева группа не содержит подгрупп индекса 2 и 3, то $|G| \in \{2^2{\cdot}3{\cdot}5^2,\ 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}t$, где t – простое число и $t \notin \{2,3,5\}\}$. Из [4, с. 20] следует, что не существует простых неабелевых групп порядка $2^2{\cdot}3{\cdot}5^2$. Значит $|G| = |PSL_2(q)| = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}t$ и $G \cong PSL_2(t)$. Поэтому $\frac{1}{2}t\,(t^2 - 1) = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}t$ и $t = 11$. Следовательно, $G \cong PSL_2(11)$ и, очевидно, $1\ \mathbb{P}\text{-}sn\ PSL_2(11)$.

Пусть M – борелевская подгруппа. Тогда $|G : M| = q + 1$ – простое число. Поэтому $q = 2^n$ и $G \cong PSL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма. При этом $1\ \mathbb{P}\text{-}sn\ PSL_2(2^n)$. Лемма 1.2 доказана.

2 Доказательство основного результата

Теорема 2.1. *Пусть G – конечная группа, у которой любая силовская подгруппа либо $\mathbb{P}$-субнормальна, либо абнормальна в G. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Будем считать, что G – минимальный контрпример к теореме. Сначала покажем, что G не является простой неабелевой группой. Если все силовские подгруппы в G абнормальны, то, очевидно, они самонормализуемы. По теореме 4.119 [4] группа G не является простой. Следовательно, существует силовская подгруппа группы G, которая $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Поэтому группа G имеет подгруппу H простого индекса r. Обозначим через Ω множество всех правых смежных классов группы G по подгруппе H и для всякого $g \in G$ определим отображение $f_g : \Omega \mapsto \Omega$ по правилу: $(H\,x)\,f_g = Hxg$. Очевидно, что отображение f_g является биекцией на множестве Ω.

Пусть $S(\Omega)$ – группа подстановок на множестве Ω. Очевидно, что $S(\Omega) \cong S_r$ и отображение $f{:}g \mapsto f_g$ является нетривиальным гомоморфизмом групп G и $S(\Omega)$. Так как G – простая неабелева группа, то ядро f тривиально. Поэтому G изоморфно вкладывается в S_r и $r = max\ \pi(G)$. Пусть $R \in Syl_r(G)$. Очевидно, что $G = HR$. Если $H \cap R \neq 1$, то $|R : H \cap R| = r$ и $H \cap R \lhd R$. По лемме Чунихина группа G не проста. Значит, $H \cap R = 1$ и $|R| = r$. Если R абнормальна в G, то $N_G(R) = C_G(R) = R$ и группа G имеет нормальное r-дополнение по теореме Бернсайда (теорема 14.3.1 [7]). Последнее невозможно. Таким образом, подгруппа R является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. Значит, группа G имеет подгруппу простого индекса $p \neq r$. Как и выше показывается, что $p = max\ \pi(G)$. Противоречие с тем, что $r = max\ \pi(G)$. Следовательно, G не является простой неабелевой группой.

Пусть $L \lhd G$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G / L$. Если подгруппа $Q \in Syl_q(\mathrm{G})$ абнормальна в G, то для всех $g \in G$ имеет место включение $g \in \langle Q, Q^g \rangle$, а значит $\overline{g} \in \langle \overline{Q}, \overline{Q}^{\overline{g}} \rangle$ и подгруппа $\overline{Q}$ является абнормальной в $\overline{G}$. Если Q $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то по лемме 1.1 $\overline{Q}\ \mathbb{P}\text{-}sn\ \overline{G}$. Поэтому условия теоремы выполняются для фактор-группы $\overline{G}$. Так как G – минимальный контрпример к теореме, то $\overline{G}$ – разрешимая группа. Отсюда следует, что в группе G имеется нормальная подгруппа R такая, что $|G : R| = p$ – простое число. При этом всякая силовская q-подгруппа Q $(q \neq p)$ содержится в подгруппе R. По лемме Фраттини $G = RN_G(Q)$ и подгруппа Q не самонормализуема в G. Следовательно, подгруппа Q $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

Таким образом, все силовские q-подгруппы при $q \neq p$ являются $\mathbb{P}$-субнормальными в G. Если силовская p-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то по теореме 2.3 [1] группа G будет разрешимой. Поэтому силовские p-подгруппы группы G являются абнормальными в G.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Тогда $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Если $(|N|, p) = 1$, то по лемме 1.1 любая силовская подгруппа группы N будет $\mathbb{P}$-субнормальной в N. По теореме 2.3 [1] N – разрешимая группа, что невозможно. Следовательно, $(|N|, p) = p$ и для всех $r \in \pi(N) \setminus \{p\}$ силовские r-подгруппы из группы N $\mathbb{P}$-субнормальны в N. Так как $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, то по лемме 1.1 все силовские r-подгруппы в N_1 для $r \in \pi(N_1) \setminus \{p\}$ являются $\mathbb{P}$-субнормальными в N_1, $p = \max\ \pi(N_1)$, силовская p-подгруппа группы N_1 имеет порядок p и не $\mathbb{P}$-субнормальна в N_1. Отметим также, что любая $\mathbb{P}$-субнормальная в N_1 силовская подгруппа содержится в максимальной подгруппе индекса p в N_1.

Поскольку 1 $\mathbb{P}$-*sn* N_1, то по лемме 1.2 $N_1 \in \{SL_3(3)$, $SL_3(5)$, $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$, $SL_2(2^n)$, *где* $2^n+1 = p$ *– простое число Ферма*$\}$. Последовательно рассмотрим все случаи.

(1) $N_1 \cong SL_3(3)$, $p = 13$. Из [3] следует, что группа $SL_3(3)$ содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 13, изоморфных $3^2{:}2S_4$ и силовская 2-подгруппа группы $3^2{:}2S_4$ не $\mathbb{P}$-субнормальная в $3^2{:}2S_4$. Последнее невозможно.

(2) $N_1 \cong SL_3(5)$, $p = 31$. Из [3] следует, что группа $SL_3(5)$ содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 31, изоморфных $5^2{:}GL_2(5)$ и силовская 2-подгруппа группы $5^2 : GL_2(5)$ не $\mathbb{P}$-субнормальна в $5^2 : GL_2(5)$, что невозможно.

(3) $N_1 \cong PSL_2(7)$, $p = 7$. Из [3] следует, что группа $PSL_2(7)$ содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 7, изоморфных S_4 и силовская 3-подгруппа группы S_4 не $\mathbb{P}$-субнормальна в S_4. Последнее невозможно.

(4) $N_1 \cong PSL_2(11)$, $p = 11$. Из [3] следует, что группа $PSL_2(11)$ содержит два класса несопряженных подгрупп индекса 11, изоморфных A_5 и силовская 5-подгруппа группы A_5 не $\mathbb{P}$-субнормальна в A_5, что невозможно.

(5) $N_1 \cong SL_2(2^n)$, $p = 2^n + 1$. В группе G только подгруппа Бореля $B = [U]H \cong \left[Z_2^n\right]Z_{2^n-1}$ имеет индекс p. Так как $|G| = 2^n(2^n-1)(2^n+1)$ и $n \geq 2$, то подгруппа Картана $H \neq 1$ и является холловой подгруппой нечетного порядка в G. Борелевская подгруппа B является группой Фробениуса с ядром U и дополнительным множителем H. Отсюда легко заключить, что любая силовская подгруппа в H не $\mathbb{P}$-субнормальна в B. Последнее невозможно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

2. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

3. *Conway*, *J.H.* Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon, 1985. – 252 p.

4. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн // М. : Мир, 1985.

5. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Hupper. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.

6. *Казарин*, *Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, №1. – С. 26–29.

7. *Холл*, *М.* Теория групп / М. Холл. – М. : ИЛ, 1962.

Поступила в редакцию 24.06.14.