

прычём функцыі $\gamma_\varepsilon^\pm$ атрымваюцца з дапамогай прымянення аператараў $P^\pm = \frac{1}{2}[I \pm S]$ (тут S ёсць сінгулярны інтэгральны аператар Кошы) праектавання на верхнюю і ніжнюю паўплоскасці к гладкай функцыі

$$\gamma_\varepsilon(x) = -f^+(x+i\varepsilon)g^-(x-i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)g^+(x+i\varepsilon).$$

Для распаўсюджванняў f і g , у якіх у аналітычным прадставленні функцыі $f^\pm$, $g^\pm$ з'яўляюцца рацыянальнымі, дзеянне аператараў $P^\pm$ выписваецца ў яўным выглядзе, што дазваляе апісаць паводзіны здабытку распаўсюджванняў у алгебры мнемофункцый, пры гэтым выдзяліць усе выпадкі, калі гэта здабытак будзе мець прадзел у прасторанстве распаўсюджванняў пры $\varepsilon \rightarrow 0$ [1]. У такіх выпадках здабытку распаўсюджванняў можна паставіць у адпаведнасць класіфікацыю распаўсюджванняў, болей таго такое распаўсюджванне будзе мець выгляд лінейнай камбінацыі дэльта-функцыі, яе прадзводных і $P(x^{-n})$.

Для распаўсюджванняў, у якіх у аналітычным прадставленні функцыі $f^\pm$, $g^\pm$ маюць ступенныя асаблівасці дробнага парадка, дзеянне аператараў праектавання на здабытак мнемофункцый $f_\varepsilon g_\varepsilon$ ў яўным выглядзе не ўдаецца выпісаць, аднак атрыманы некаторыя заканамернасці, калі здабытак $f_\varepsilon g_\varepsilon$ мае прадзел у прасторанстве распаўсюджванняў. Заўважым, што распаўсюджванні з асаблівасцямі дробнага парадка прадставімы ў выглядзе лінейных камбінацый распаўсюджванняў x_+^α і x_-^β [2]. У рабоце [3] апісаны здабыткі распаўсюджванняў x_+^α і x_-^β з паказатэлямі α і β толькі спецыяльнага віду, аднак аўрамамі разглядаецца іншы спосаб апроксимацыі распаўсюджванняў. У данай рабоце атрыманы адпаведныя вынікі з дапамогай апроксимацый, атрычаных аналітычным прадставленнем распаўсюджванняў.

Літаратура

1. Шагова Т.Г. Рацыянальныя мнемофункцыі на $\mathbb{R}$ // Журнал Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта. Матэматыка. Інфарматыка, 2019. № 2. С. 6–17.
2. Гельфанд І.М., Шілов Г.Е. Абагуленыя функцыі і дзеянні над імі. Т.1. М: Гос. изд-во фізіка-мат. літ-ры, 1959.
3. Мітэва М., Ёўлевска-Тунеска Б., Атанасова-Пачемска Т. Вынікі аб здабытку Колумба абагуленай функцыі $x_+^{-r-1/2}$ і абагуленых функцый $x_-^{-k-1/2}$ і $x_-^{k-1/2}$ // Функцыянальны аналіз і яго прымяненні, 2018. Т. 52, вып. 1. С. 13-25.

ON A CLASS OF INTEGRAL μ -HANKEL OPERATORS ON THE UNIT DISC

E. Yu. Kuzmenkova¹, and A. R. Mirotin²

¹ F. Skorina Gomel State University, Belarus katuha66@tut.by

² F. Skorina Gomel State University, Belarus amirotin@yandex.ru

The general class of μ -Hankel operators was introduced in [1]. The talk is devoted to some applications of the general theory to a class of integral operators in the Hardy space on the unit disc.

Let $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$, and σ is a bounded measure on the closed unit disc $\overline{\mathbb{D}}$ in complex plane. In the case $|\mu| < 1$, we will assume that σ is concentrated on the set $\{|\zeta| \leq |\mu|\}$. Consider the operator

$$\Gamma_{\mu,\sigma}f(z) := \mu \int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{f(\zeta)}{\mu - \zeta z} d\sigma(\zeta) \quad (|z| < 1)$$

and the sequence of moments of the measure σ

$$\gamma_n := \int_{\overline{\mathbb{D}}} \zeta^n d\sigma(\zeta) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Theorem. For the operator $\Gamma_{\mu,\sigma}$ to be bounded in the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$, the condition

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\gamma_{k+j}}{\mu^j} \right|^2 < \infty \quad (1)$$

is necessary. Under this condition, this operator is μ -Hankel in $H^2(\mathbb{D})$, has the matrix $(\gamma_{k+j}/\mu^j)_{k,j \in \mathbb{Z}_+}$ with respect to the standard basis of this space, and the following statements are true.

1) Let $|\mu| < 1$. Then the operator $\Gamma_{\mu,\sigma}$ is nuclear and

$$\mathrm{tr} \Gamma_{\mu,\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{2n}}{\mu^n} = \mu \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{\mu - \zeta^2}. \quad (2)$$

2) Let $|\mu| > 1$. Then the operator $\Gamma_{\mu,\sigma}$ is bounded if and only if $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Moreover, it is nuclear, and its trace is expressed by the formula (2).

3) Let $|\mu| = 1$. Operator $\Gamma_{\mu,\sigma}$ is bounded if and only if there is such function $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, that $\gamma_n = \widehat{\psi}(n)$ for $n \in \mathbb{Z}_+$. Moreover

$$\|\Gamma_{\mu,\sigma}\| = \inf\{\|\psi\|_{L^\infty} : \psi \in L^\infty(\mathbb{T}), \gamma_n = \widehat{\psi}(n) \forall n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

For $|\mu| = 1$, the sufficient boundedness condition gives the next

Corollary 1. Let $|\mu| = 1$. If the function

$$\varphi_\sigma(\zeta) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} d\sigma(z) \quad (\zeta \in \mathbb{T})$$

belongs to $L^\infty(\mathbb{T})$, the operator $\Gamma_{\mu,\sigma}$ is bounded in $H^2(\mathbb{D})$ and

$$\|\Gamma_{\mu,\sigma}\| \leq \|\varphi_\sigma\|_{L^\infty}.$$

Corollary 2. Let the condition (1) be satisfied. The operator $\Gamma_{\mu,\sigma}$ has finite rank if and only if the function $\Gamma_{\mu,\sigma}1$ is rational. In this case $\mathrm{rank} \Gamma_{\mu,\sigma} = \deg(z(\Gamma_{\mu,\sigma}1)(z))$.

References

1. A. R. Mirotin, E. Yu. Kuzmenkova, μ -Hankel operators on Hilbert spaces, Opuscula Math., 2021, Vol. 41, no 6 (to appear).

HAUSDORFF OPERATORS ON LEBESGUE SPACES AND HARDY SPACES

A. R. Mirotin

¹Francisk Skorina Gomel State University, Belarus
amirotin@yandex.ru

The Hausdorff operator on the group $\mathbb{R}^n$ has the form

$$(\mathcal{H}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(u) f(A(u)x) du, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $A(u) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

The one-dimensional Hausdorff operators were introduced by Garabedian and independently by Rogosinski as a continuous analog of Hausdorff means (see, e.g., [1, Chapter XI]). The n -dimensional definition is due to Brown-Moricz and Liflyand-Lerner (see, e.g., [2]).