УДК 521.1; 524.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ШАРА

Г.Ю. Тюменков[1], Е.П. Ельников[2], Е.В. Фирагина[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*
[2]*Гомельский городской лицей № 1, Гомель, Беларусь*

MODELING OF THE RADIAL DENSITY FUNCTION OF A GRAVITATING GLOBE

G.Yu. Tyumenkov[1], E.P. El'nikov[2], E.V. Firagina[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*
[2]*Gomel City Lyceum №1, Gomel, Belarus*

В статье в приближении сферической симметрии и с учетом физически корректного радиального поведения проведено моделирование функции плотности в виде линейной, экспоненциальной и обратной функций. На этой основе предложена обобщенная форма функции плотности для слоистой структуры. Произведен расчет масс планет земной группы по усредненным характеристикам. Дана оценка возможности применения результатов моделирования.

Ключевые слова: *функция плотности, шаровой слой, гипергеометрическая функция, гамма-функция, функция Хэвисайда, планета земной группы.*

Using the approximation of spherical symmetry and correct physical radial behavior the density function is simulated in several analytical forms. On this basis the density function generalized form for layered structure is proposed. Masses of terrestrial planets are calculated with averaged characteristics. The possible application of simulation results is evaluated.

Keywords: *density function, spherical layer, hypergeometric function, gamma function, Heaviside step function, terrestrial planet.*

Введение

В теории внутреннего строения звезд и планет [1]–[4], существеннейшую роль играет функция плотности $\rho(r)$. Она, как правило, радиально-симметрична и определяет массу гравитирующего шара, задаваемую интегралом

$$M_R = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2dr. \qquad (0.1)$$

Кроме того, она фигурирует в уравнении равновесия

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho(r) \qquad (0.2)$$

и в ряде других важных уравнений теории. Поэтому моделированию функции плотности $\rho(r)$ и посвящена данная работа. Вполне понятна физически обусловленная тенденция увеличения плотности в направлении центра гравитирующего шара. Следовательно, моделирование функции $\rho(r)$ допускает использование убывающей линейной, экспоненциальной и обратной функций.

1 Модельные функции плотности

I. Приближение линейной функцией

Смоделируем функцию плотности с линейной зависимостью от расстояния до центра шара r, что ранее уже было предложено в работе [5], убывающую с ростом аргумента. В этом случае функция $\rho(r)$ задается выражением

$$\rho(r) = \rho_0 - \alpha r, \qquad (1.1)$$

где ρ_0 – плотность в центре шара. Коэффициент α здесь определяется на основе данных о плотностях в центре и у поверхности

$$\alpha = \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R}. \qquad (1.2)$$

На основе этого масса, заключенная внутри шара радиуса R, определяемая интегралом (0.1) оказывается равной

$$M(R) = 4\pi\int_0^R (\rho_0 - \alpha r)r^2dr = \frac{4\pi R^3}{3}\left[\rho_0 - \frac{3\alpha R}{4}\right]. \qquad (1.3)$$

II. Приближение экспоненциальной функцией

Рассмотрим функцию плотности с экспоненциальным поведением, также убывающую с ростом r. То есть определим $\rho(r)$ как

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta r}, \qquad (1.4)$$

где ρ_0 имеет прежний смысл, а коэффициент β из аналогичных соображений оказывается равным

$$\beta = \frac{1}{R}\ln\frac{\rho_0}{\rho(R)}. \qquad (1.5)$$

Подстановка формул (1.4) и (1.5) в (0.1) дает массу шара вида

$$M(R) = 4\pi\int_0^R \rho_0 e^{-\beta r} r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{\beta^3}\gamma(3;\beta R), \quad (1.6)$$

где $\gamma(3;\beta R)$ – нижняя неполная гамма-функция [6].

III. Приближение обратной функцией с размерным параметром

Введем плотность в виде обратной убывающей функции определенного вида [5], а именно, с размерным параметром

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+\gamma r}. \quad (1.7)$$

Размерный параметр γ в выражении (1.7) находится из условия

$$\gamma = \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R\rho(R)}. \quad (1.8)$$

Выражения (1.7) и (1.8) приводят к массе шара равной

$$M(R) = 4\pi\int_0^R \frac{\rho_0}{1+\gamma R} r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} F(1;3;4;-\gamma R), \quad (1.9)$$

где $F(1;3;4;-\gamma R)$ – гипергеометрическая функция [6], зависящая от радиуса R.

IV. Приближение обратной функцией с безразмерным параметром

Модифицируем функцию плотности и записываем ее в виде, отличном от первой убывающей обратной функции, введя безразмерный параметр

$$\rho(r) = \frac{\gamma\rho_0}{\gamma + \dfrac{r}{R}}, \quad (1.10)$$

который будет равен

$$\gamma = \frac{\rho(R)}{\rho_0 - \rho(R)}. \quad (1.11)$$

Используя (1.10) и (1.11), находим массу $M(R)$, которая в этом случае оказывается равной

$$M(R) = 4\pi\int_0^R \frac{\gamma\rho_0}{\gamma + \dfrac{r}{R}} r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} F\left(1;3;4;-\frac{1}{\gamma}\right), \quad (1.12)$$

где $F\left(1;3;4;-\dfrac{1}{\gamma}\right)$ – гипергеометрическая функция, независящая от радиуса шара.

2 Функция плотности для шара со слоистой структурой

Метод обобщения используемых функций плотности на случай слоистой структуры шара заключается в их суммировании по слоям с использованием обрезающей на границе слоя функции Хэвисайда. При этом обобщенная функция плотности принимает вид

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^{n} \Theta(r - r_k)\cdot\rho_{(j)k}(r)\cdot\Theta(r_{k+1} - r)\cdot A_{(j)k+1}, \quad (2.1)$$

где $\rho_{(j)k}(r)$ – функция плотности, присутствие у которой индекса j говорит о привязке к j-му приближению, а индекс k номерует слой; $A_{(j)k}$ – коэффициент сшивания, индексируемый аналогично (в данной работе все коэффициенты сшивания приняты равными единице); $\Theta(r)$ – функция Хэвисайда; $r_1 = 0$.

Следует заметить, что прямое интегрирование функции плотности (2.1) необязательно, так как его результат может быть представлен в виде суммы масс шаровых слоев, получаемых при использовании формул (1.3), (1.6), (1.9) и (1.12). Таким образом, массу шара, состоящего из n слоев, записываем в виде

$$M = \sum_{k=1}^{n}\mu_k, \quad (2.2)$$

где μ_k – масса k-го шарового слоя, которая выражается как разность масс шаров различных радиусов. Линейное приближение функции плотности дает

$$\mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k) = \frac{4\pi}{3}\left[\rho_0(r_{k+1}^3 - r_k^3) - \frac{3\alpha}{4}(r_{k+1}^4 - r_k^4)\right], \quad (2.3)$$

экспоненциальное приближение приводит к

$$\mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k) = \frac{4\pi\rho_0}{\beta^3}\left[\gamma(3;\beta(r_{k+1})) - \gamma(3;\beta(r_k))\right], \quad (2.4)$$

для обратного приближения с размерным коэффициентом получаем

$$\mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k) = \frac{4\pi\rho_0}{3}\left[r_{k+1}^3 F(1;3;4;-\gamma(r_{k+1})) - r_k^3 F(1;3;4;-\gamma(r_k))\right], \quad (2.5)$$

а для обратного приближения с безразмерным коэффициентом

$$\mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k) = \frac{4\pi\rho_0}{3} F\left(1;3;4;-\frac{1}{\gamma}\right)(r_{k+1}^3 - r_k^3). \quad (2.6)$$

3 Результаты модельных расчетов для планет земной группы

Используем наши модельные функции плотности для расчета масс планет земной группы на основе известных средних значений радиусов, плотностей слоев и прочих характеристик [7]–[8], и сравним результат с действительными массами. Важным информационным источником

Таблица 3.1 – Расчетная масса в приближении одного слоя

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)			
		Приближение			
		линейное I	экспоненциальное II	обратное III	обратное IV
Меркурий	$3{,}330\cdot10^{23}$	$3{,}724\cdot10^{23}$	$2{,}980\cdot10^{23}$	$3{,}453\cdot10^{23}$	$3{,}182\cdot10^{23}$
Венера	$4{,}869\cdot10^{24}$	$5{,}404\cdot10^{24}$	$4{,}359\cdot10^{24}$	$5{,}127\cdot10^{24}$	$4{,}622\cdot10^{24}$
Земля	$5{,}973\cdot10^{24}$	$6{,}848\cdot10^{24}$	$5{,}450\cdot10^{24}$	$6{,}382\cdot10^{24}$	$5{,}635\cdot10^{24}$
Марс	$6{,}419\cdot10^{23}$	$7{,}290\cdot10^{23}$	$5{,}770\cdot10^{23}$	$6{,}646\cdot10^{23}$	$6{,}292\cdot10^{23}$

Таблица 3.2 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)		
		I–III–IV	III–IV–II	IV–I–III
Меркурий	$3{,}330\cdot10^{23}$	$3{,}333\cdot10^{23}$	$3{,}340\cdot10^{23}$	$3{,}251\cdot10^{23}$
Венера	$4{,}869\cdot10^{24}$	$4{,}957\cdot10^{24}$	$4{,}879\cdot10^{24}$	$4{,}768\cdot10^{24}$
Марс	$6{,}419\cdot10^{23}$	$6{,}476\cdot10^{23}$	$6{,}627\cdot10^{23}$	$6{,}260\cdot10^{23}$
		IV–III–II–IV–I	IV–II–I–IV–III	II–III–I–IV–III
Земля	$5{,}973\cdot10^{24}$	$6{,}042\cdot10^{24}$	$5{,}976\cdot10^{24}$	$5{,}761\cdot10^{24}$

также является интернет-ресурс [9], содержащий необходимые астрофизические данные.

Рассмотрим возможность использования только одной из четырех функций плотности. Результаты расчетов приведены в Таблице 3.1.

Лучшие из результатов отклоняются от реальных масс следующим образом:

– на 3,7% выше у Меркурия (III);
– на 5,3% ниже у Венеры (IV);
– на 6,0% ниже у Земли (IV);
– на 2,0% ниже у Марса (IV).

Полученные отклонения достаточно значительны, поэтому однослойное моделирование для планет земной группы с исследуемыми функциями плотности можно рассматривать как оценочное. Однако, очевиден факт преимущества функции плотности с безразмерным параметром (IV).

Учтем общепризнанную внутреннюю структуру исследуемых планет [8]–[9], состоящую из пяти компонентов у Земли (кора, верхняя мантия, мантия, внешнее ядро, внутреннее ядро) и трех компонентов у Меркурия, Венеры и Марса (кора, мантия, ядро).

Расчеты будем производить на основе формул (2.1), (2.3)–(2.6), варьируя комбинации функций плотности для указанных чисел слоев, что дает около 150 комбинаций.

В Таблице 3.2 приведены три лучших результата расчета масс в рамках указанного подхода.

Теперь лучшие результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

– на 0,09% выше у Меркурия (I–III–IV);
– на 0,2% выше у Венеры (III–IV–II);
– на 0,05% выше у Земли (IV–II–I–IV–III);
– на 0,89% выше у Марса (I–III–IV).

Полученные результаты можно рассматривать как вполне удовлетворительные, может быть, за исключением Марса, а соответствующие функции плотности считать близкими к реальным и допускающими использование при решении соответствующих задач.

Заключение

Таким образом, в данной работе проведено моделирование функций плотности для массивного гравитирующего шара и на этой основе сделаны расчеты масс планет земной группы. При этом использовались простое однослойное приближение структуры и реальные многослойные. Расчеты показали, что предложенное поведение функций плотности является достаточно достоверным. Оно может быть использовано при проведении расчетов масс других планет, масс отдельных слоев внутренней структуры, решении уравнений динамического равновесия и прочих задач на их основе. Также несомненно, что к улучшению результатов моделирования может привести учет существующих малых, но физически существенных деформаций, связанных с центробежным эффектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carroll*, *B.W*. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.

2. *Choudhuri*, *A.R*. Astrophysics for Physicists / A.R. Choudhuri. – Cambridge University Press, 2010. – 471 p.

3. *Магницкий*, *В.А*. Внутреннее строение и физика Земли / В.А. Магницкий. – Москва : Наука, 2006. – 390 с.

4. *Уильям*, *Б*. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – Москва : Мир, 1987. – 328 с.

5. *Фирагина*, *Е.В*. Моделирование распределения плотности для планет земной группы /

Е.В. Фирагина / Актуальные вопросы физики и техники. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – Ч. 1. – С. 153–155.

6. *Кузнецов*, *Д.С.* Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 249 с.

7. *Anderson*, *D.L.* Theory of the Earth / D.L. Anderson. – Boston : Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

8. *Jordan*, *T.H.* Structural Geology of the Earth's Interior / T.H. Jordan / Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – Boston : HighWire Press, 2014. – Vol. 76, № 8. – P. 4192–4200.

9. *California Institute of Technology* (USA) [Electronic resource] / NASA's Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access : www.jpl.nasa.gov/solar-system/. – Date of access : 10.08.2014.

Поступила в редакцию 10.09.14.