

УДК 517.977

НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО ПРИНЦИПУ РАЗМЫКАЕМОГО КОНТУРА

Р. Габасов¹, Ф.М. Кириллова², Во Тхи Тань Ха¹

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

OBSERVATION OF LINEAR SYSTEMS ON THE PRINCIPLE OF DISCLOSABLE LOOP

R. Gabasov¹, F.M. Kirillova², Vo Thi Thanh Ha¹

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Рассматривается задача оптимального наблюдения нестационарного и стационарного объектов с использованием многомерных сигналов импульсного и дискретного измерительных устройств. Вводятся понятия априорного и текущего распределений начального состояния. Описывается метод реализации позиционного решения задачи оптимального наблюдения по принципу замыкаемого контура. С целью ускорения вычислений предлагается их распараллеливание. Для стационарного объекта дополнительное ускорение вычислений достигается с помощью рекуррентных уравнений, параллельных вычислений и метода «разновесов». Результаты иллюстрируются на примере динамического объекта 4-го порядка.

Ключевые слова: стационарный объект, нестационарный объект, импульсное измерительное устройство, дискретное измерительное устройство, наблюдение по принципу замыкаемого контура, наблюдение в реальном времени, реализация позиционного решения, распараллеливание вычислений, метод «разновесов».

By the use of multidimensional signals of impulse and discrete measuring devices an optimal observation problem for stationary and nonstationary objects is considered. Concepts of a priori and current distributions of the initial state are introduced. A realization method of positional solving of the optimal observation problem is presented on the base of disclosing loop. To accelerate the numerical computations it is suggested to use a parallelizing procedure. For the stationary objects additional accelerations of computations are achieved by recurrent equations, parallelizing procedures and the “set of weights” method. The results are illustrated by the examples of the 4th order dynamical object.

Keywords: stationary object, nonstationary object, impulse measuring devices, discrete measuring devices, observation on the principle of openable loop, on-line observation, positional solution, parallel computing, “set of weight” method.

Введение

Проблема наблюдения динамических объектов возникает при управлении ими в условиях неопределённости. Различают два типа неопределённости: стохастическая и множественная. Стохастическое управление и наблюдение (фльтрация) исследованы достаточно глубоко [1]. В случае множественной неопределённости проблемы наблюдения и управления менее разработаны. При управлении и наблюдении в условиях неопределённости исследуются: 1) управление и наблюдение по разомкнутому контуру (программное управление и априорное наблюдение), когда для формирования управляющих воздействий используется только априорная информация; 2) управление и наблюдение по замыкаемому контуру (апостериорные наблюдение и управление), когда для формирования текущих управляющих воздействий и оценок неопределённости используется информация, доступная к текущему моменту, но игнорируется информация о том, что подобные операции будут выполняться и в некоторые последующие моменты времени; 3) управление и наблюдение по замыкаемому

контуру (препостериорные наблюдение и управление), когда для формирования управляющих воздействий и оценок неопределённости кроме информации, доступной к текущему моменту, используется информация о том, что процедура наблюдения и управления будет использоваться в некоторые последующие моменты времени; 4) управление и наблюдение по замкнутому контуру представляет управление и наблюдение по замыкаемому контуру, когда учитывается, что эти действия будут осуществляться в каждый текущий и во все будущие моменты времени.

В классической теории управления по замкнутому контуру использовались детерминированные модели и прямые, обратные, комбинированные связи. Эти связи реализовывались с помощью существовавшей тогда аналоговой техники. Такой подход трудно реализуем для сложных систем управления в условиях множественной неопределённости и он не в полной мере учитывает возможности цифровой вычислительной техники и современные конструктивные методы решения экстремальных задач.

В работе описываются принципиальные алгоритмы построения реализаций позиционных решений задачи наблюдения по размыкаемому контуру. Они опираются на цифровую вычислительную технику и эффективные численные методы решения в реальном времени специальных экстремальных задач.

Структура работы. Во Введении приводятся краткие сведения о сути вопросов, рассмотренных в работе. В пункте 1 даётся постановка задачи наблюдения линейных динамических объектов с помощью импульсных измерительных устройств. Центральным понятием подхода является понятие «распределение неопределённости». Оно под другим названием введено в работе [2]. Из множества возможных задач наблюдения выбрана задача вычисления линейных оценок неопределённости, которая сопровождает задачу оптимального управления линейным объектом по принципу размыкаемого контура. Рассматриваемая задача наблюдения по принципу размыкаемого контура является, с одной стороны, двойственной к задаче управления в условиях неопределённости по размыкаемому контуру, а с другой – представляет простейшую задачу позиционного наблюдения.

Цель работы – синтез цифровых систем наблюдения в реальном времени. Конструкции метода наблюдения в реальном времени излагаются в пункте 2. Задачи наблюдения сводятся к задачам линейного программирования (ЛП). Реализация позиционного решения получается путём последовательной коррекции текущих опор. При этом коррекция проводится двойственным методом ЛП, который проявил себя эффективным методом решения подобных задач. В пункте 3 излагаются методы распараллеливания вычислений, которые существенно сокращают время коррекции за счёт небольшого увеличения оперативной памяти.

Эффективность предлагаемого метода наблюдения существенно повышается при наблюдении линейных стационарных систем (пункт 4). В этом случае в процессе наблюдения удаётся, с одной стороны, избавиться от интегрирования дифференциальных уравнений, а с другой – упростить операции распараллеливания. Дополнительно излагается метод разновесов.

Пункт 6 посвящён описанию метода наблюдения динамической системы с помощью дискретного измерительного устройства. Упомянутые выше конструкции переносятся на новый тип измерительных устройств. Полученные результаты иллюстрируются на примере задачи наблюдения системы 4-го порядка (четвертная модель автомобиля). Примеры показывают, что в процессе наблюдения коррекция опор осуществляется за небольшое число итераций двойственного метода.

В Приложении вынесен вспомогательный материал по сведению задачи наблюдения к задаче ЛП и по описанию основных операций использованного в основной части работы двойственного метода.

1 Наблюдение с помощью импульсного измерительного устройства

Пусть $T = [t_*, t^*]$ – конечный промежуток времени; $T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^*\}$, $T_h^+ = \{t_* + h, t_* + 2h, \dots, t^*\}$, $h = (t^* - t_*) / N$ – период квантования времени ($N > 1$ – натуральное число); $T^\tau = [t_*, \tau]$;

$$T_h^\tau = T^\tau \cap T_h, \tau \in T_h; T_h^{\tau+} = T^\tau \cap T_h^+, \tau \in T_h^+;$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, – кусочно-непрерывная функция; $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $t \in T$, – непрерывная функция; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – постоянные матрицы;

$$X_* = \{x \in \mathbb{R}^n : d_* \leq x \leq d^*\};$$

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^r : \xi_* \leq \xi \leq \xi^*\};$$

$\xi_*, \xi^* \in \mathbb{R}^r$; $d_*, d^* \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы; $I = \{1, 2, \dots, r\}$; $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $A_h = \exp Ah$, $A_{-h} = \exp(-Ah)$, $\overline{A}_h = \int_0^h \exp As ds$.

Рассмотрим динамический объект, поведение которого описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x, t \in T, \quad (1.1)$$

где $x = x(t) = (x_j(t), j \in J) \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта в момент времени t .

Начальное состояние $x(t_*) = x_0$ объекта не задано, но известно, что оно принадлежит ограниченному множеству $X_* : x_0 \in X_*$. Множество X_* характеризует априорную неопределённость начального состояния. Назовем его априорным распределением начального состояния x_0 .

Для уменьшения априорной неопределённости будем вести наблюдение за поведением объекта (1.1), записывая сигналы импульсного измерительного устройства

$$y(\theta) = C(\theta)x(\theta) + \xi(\theta), \quad (1.2)$$

$$\xi(\theta) \in \Xi, \theta \in T_h,$$

где $C(t)x(t)$, $t \in T$, – наблюдаемый выходной сигнал объекта (1.1), $\xi(\theta) = (\xi_i(\theta), i \in I)$, $\theta \in T_h$, – неизвестные погрешности (ошибки) измерений.

Предположим, что процесс наблюдения осуществлён до момента $\tau \in T_h$ и получены сигналы $y_\tau(\cdot) = (y(\theta), \theta \in T_h^\tau)$.

Определение 1.1. Множество $X_*(\tau, y_\tau(\cdot))$ – текущее распределение начального состояния x_0 в позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$, если оно состоит из таких и только таких $x \in X_*$, которые способны вместе с некоторыми возможными $\xi_\tau(\cdot)$ получить $y_\tau(\cdot)$.

В задачах оптимального гарантирующего управления по размыкаемому контуру [3], [4] используются оценки неопределенности

$$\alpha = \alpha(X_*) = \max p'x, x \in X_*; \quad (1.3)$$

$$\alpha(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max p'x, x \in X_*(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad (1.4)$$

которые характеризуют протяженность множеств X_* , $X_*(\tau, y_\tau(\cdot))$ в направлении $p \in \mathbb{R}^n$, $\|p\|=1$. Вычисление оценки (1.3) назовем задачей априорного наблюдения или задачей наблюдения по разомкнутому контуру. Последняя задача представляет двойственный аналог программного управления (управление по разомкнутому контуру [1]).

Задача (1.4) в подробной записи (см. Приложение 1) имеет вид

$$p'x \rightarrow \max_x, \\ \xi_*(\theta) \leq D(\theta)x \leq \xi^*(\theta), \theta \in T_h^r; \quad (1.5) \\ d_* \leq x \leq d^*,$$

где $\xi_*(\theta) = \xi_* - y(\theta)$, $\xi^*(\theta) = \xi^* - y(\theta)$,

$$D(\theta) = -C(\theta)F(\theta) = \begin{pmatrix} d_{ij}(\theta), & j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}, \theta \in T_h;$$

$F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, – фундаментальная матрица решений:

$$\dot{F} = A(t)F, F(t_*) = E. \quad (1.6)$$

Вычисление оценки (1.4) для фиксированной позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$ называется текущей задачей наблюдения по принципу размыкаемого контура.

Пусть $Y_\tau(\cdot)$ – множество всех сигналов $y_\tau(\cdot)$, которые могут быть записаны устройством (1.2) к моменту времени τ .

Определение 1.2. Функцию

$$\alpha(\tau, y_\tau(\cdot)), y_\tau(\cdot) \in Y_\tau(\cdot), \tau \in T_h, \quad (1.7)$$

будем называть позиционным решением задачи наблюдения (1.4) по принципу размыкаемого контура, а ее построение – синтезом системы наблюдения с размыкаемым контуром (двойственный аналог синтеза системы управления с размыкаемым контуром [4], [5]).

Проблема априорного наблюдения (1.3) решается просто. Для решения задачи позиционного наблюдения (1.7) очевидны два метода – до начала процесса наблюдения: 1) построить функцию (1.7) в явном виде, 2) затабулировать её с необходимой точностью. При использовании этих методов основная работа выполняется до начала процесса наблюдения. В процессе наблюдения никакая вычислительная работа не осуществляется. Оба метода пригодны только для решения простейших задач. Опишем метод реализации позиционного решения (1.7) с помощью наблюдения в реальном времени.

При известной функции (1.7) наблюдение осуществляется следующим образом. Процесс наблюдения начинается в момент $t = t_*$, когда

поступает первый сигнал $y^*(t_*)$. По этому сигналу находится оценка $\alpha(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$, которая подается в управляющий орган в момент $t_* + s(t_*)$, где $s(t_*)$ – время поиска значения $\alpha(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$. Продолжая процесс наблюдения, получаем последовательность

$$\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \tau \in T_h, \quad (1.8)$$

которая называется реализацией позиционного решения (1.7) в конкретном процессе наблюдения. Если для каждого момента $\tau \in T_h$ продолжительность $s(\tau)$ поиска значения $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq s(\tau) < h$, то можно говорить, что наблюдение ведется в режиме реального времени.

Цель данной работы – описать методы построения реализации (1.8) позиционного решения (1.7) без знания функции (1.7), позволяющий для каждой текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ вычислять значение $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ за время $s(\tau) < h$. Он основан на двойственном методе (см. Приложение 2) и на распараллеливании вычислений.

2 Наблюдение в реальном времени

Простейший метод наблюдения в реальном времени линейной системы состоит в следующем. В каждый момент $\tau \in T_h$ для текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ решается задача (1.4) и получается оценка $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$. При использовании достаточно мощной вычислительной техники время вычисления оценки $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ будет меньше h . Такой подход не учитывает специфики задачи (1.4), полученной из динамической задачи наблюдения.

Предлагается специальный метод наблюдения в реальном времени. До начала процесса наблюдения выполняется подготовительная работа. Множество

$Y_{t_*} = \{y \in \mathbb{R}^r : y = C(t_*)x_0 + \xi(t_*), x_0 \in X_*, \xi(t_*) \in \Xi\}$ покрывается ε -сетью $Y_{t_*}^\varepsilon$. Для каждого узла y^l сети решается задача

$$p'x \rightarrow \max; \\ y^l - \xi^* \leq C(t_*)x \leq y^l - \xi_*; \\ d_* \leq x \leq d^*.$$

Вычисляются и запоминаются:

- 1) $K_{\text{он}}^{l0} = \{S_{\text{он}}^{l0}, J_{\text{он}}^{l0}\}$;
- 2) $D_{(\text{он})}^{l0} = \begin{pmatrix} d_{ij}(\theta), & j \in J \\ \{i, \theta\} \in S_{\text{он}}^{l0} \end{pmatrix}$;
- 3) $F(t_* + h)$;
- 4) \varkappa^{l0} ;
- 5) $\zeta^{l0}(t_*)$.

Параметр ε выбирается так, чтобы для каждой точки $y \in Y_{t_*}$ существовал такой узел $y^l \in Y_{t_*}^\varepsilon$, что время коррекции оптимальной опоры $K_{\text{он}}^{l0}$ до оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(y)$ для точки y , не превосходило h .

Процесс наблюдения начинается в момент $t = t_*$, когда поступает первый сигнал $y^*(t_*)$. Двойственным методом решается задача

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_*(t_*) \leq D(t_*)x \leq \xi^*(t_*),$$

$$d_* \leq x \leq d^*.$$

При этом в качестве начальной опоры $K_{\text{он}}(t_*)$ берется оптимальная опора $K_{\text{он}}^{l0}$ того узла y^l , для которого время коррекции $s(t_*)$ не превосходит h . Оценка $\alpha^*(t_*) = \alpha(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$ подается в управляющий орган в момент $t_* + s(t_*)$.

Пусть процесс наблюдения осуществлен на промежутке $[t_*, \tau - h]$, $\tau > t_*$, $\tau \in T_h$, и для позиции $(\tau - h, y_{\tau-h}^*(\cdot))$ сформирована и получена текущая оперативная информация $O(\tau - h)$:

- 1) $K_{\text{он}}^0(\tau - h) = \{S_{\text{он}}^0(\tau - h), J_{\text{он}}^0(\tau - h)\}$;
- 2) $D_{(\text{он})}^0(\tau - h) = \left\{ \begin{matrix} d_{ij}(\theta), & j \in J \\ \{i, \theta\} \in S_{\text{он}}^0(\tau - h) \end{matrix} \right\}$;
- 3) $F(\tau)$;
- 4) $\alpha^0(\tau - h)$;
- 5) $\zeta^0(\theta | \tau - h)$, $\theta \in T_h^{\tau-h}$.

В момент τ поступает сигнал $y^*(\tau)$. Используя оперативную информацию $O(\tau - h)$, вычисляется $\zeta(\tau | \tau) = y^*(\tau) - C(\tau)F(\tau)\alpha^0(\tau - h)$.

Возможны два случая: 1) $\zeta(\tau | \tau) \in \Xi$, 2) $\zeta(\tau | \tau) \notin \Xi$.

В случае 1) оптимальная опора для момента $\tau - h$ остаётся оптимальной и для момента τ : $K_{\text{он}}^0(\tau) = K_{\text{он}}^0(\tau - h)$. В момент $\tau + s(\tau)$ в управляющий орган подается оценка $\alpha^*(\tau) = p'\alpha^0(\tau)$, $\alpha^0(\tau) = \alpha^0(\tau - h)$. В этом случае для формирования $O(\tau)$ достаточно вычислить значение $F(\tau + h)$ интегрированием уравнения (1.6) на отрезке $[\tau, \tau + h]$ с начальным условием $F(\tau)$ из $O(\tau - h)$.

В случае 2) осуществляется коррекция опоры $K_{\text{он}}^0(\tau - h)$ до оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(\tau)$ с помощью двойственного метода (см. Приложение 2). В этом случае на каждой итерации требуется 2 раза проинтегрировать уравнение (1.6) на промежутке $[t_*, \tau]$.

3 Ускорение построения реализации позиционного решения

До начала процесса наблюдения к подготовительной работе, описанной в пункте 2, добавляется новая. Выбираются моменты $\tau_l \in T_h$, $l = \overline{1, l^*} : t_* = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{l^*} = t^*$. Вычисляются и запоминаются значения

$$F(\tau_l) \in \mathbb{R}^n, l = \overline{1, l^*}. \quad (3.1)$$

Для ускорения коррекции опор процесс вычисления функции $F(\theta)$, $\theta \in T_h$, распараллеливается на l^* процессов вычислений на промежутках $T^l = [\tau_{l-1}, \tau_l]$, $l = \overline{1, l^*}$. Пусть $q(\tau)$ – количество итераций двойственного метода по коррекции оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(\tau) = K_{\text{он}}^0(\tau - h)$ до оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(\tau)$; $s(l)$ – время интегрирования дифференциального уравнения $\dot{F} = A(t)F$ на промежутке T^l . Тогда $s(\tau) \approx 2q(\tau) \max_l s(l)$. Величина $q(\tau)$ зависит от значения h и используемого метода коррекции опор. Величиной $\max_l s(l)$ можно управлять, выбирая точки τ_l , $l = \overline{1, l^*}$. В данной работе для коррекции опор применяется двойственный метод с длинным шагом [8]. Численные эксперименты показывают, что метод весьма эффективен (см., в частности, примеры в пунктах 5, 7).

4 Наблюдение стационарного объекта

Поведение динамического стационарного объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in T = [0, t^*].$$

Записываются сигналы импульсного измерительного устройства

$$y(\theta) = Cx(\theta) + \xi(\theta), \quad \xi(\theta) \in \Xi, \quad \theta \in T_h.$$

Использование рекуррентных уравнений и параллельных вычислений. Для стационарного объекта функция $F(\theta)$, $\theta \in T_h$, удовлетворяет рекуррентным уравнениям:

– прямому

$$F(\theta + h) = A_h F(\theta), \quad F(0) = E, \quad \theta \in T_h; \quad (4.1)$$

– обратному

$$F(\theta - h) = A_{-h} F(\theta), \quad F(t^*) = A_h^N, \quad \theta \in T_h. \quad (4.2)$$

Поэтому в процессе наблюдения стационарного объекта отпадает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений.

Ускорение вычислений функции $F(\theta)$, $\theta \in T_h$, с помощью параллельных вычислений осуществляется следующим образом. До начала процесса наблюдения выбираются произвольные моменты

$$\theta_q \in T_h, \quad q \in Q = \{1, 2, \dots, q^*\} :$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{q^*} = t^*.$$

Множество T_h разбивается на подмножества

$$\{0, h, \dots, \theta_1 - h\}, \{\theta_1, \theta_1 + h, \dots, \theta_2 - h\}, \dots, \\ \{\theta_{q^* - 1}, \theta_{q^* - 1} + h, \dots, \theta_{q^*}\}.$$

По формуле (4.1) или (4.2) вычисляются и запоминаются значения $\bar{F}(\theta_q), q \in Q$. В процессе наблюдения значения функции $F(\vartheta), \vartheta \in T_h$, вычисляются по формуле (4.1) или (4.2) параллельно на всех подмножествах с начальными условиями $\bar{F}(\theta_q), q \in Q$.

Метод «разновесов». В случае стационарного объекта ускорения вычислений функции $F(\theta), \theta \in T_h$, можно добиться с помощью метода «разновесов». Положим

$$\Delta_1 = \theta_1 - \theta_0, \Delta_2 = \theta_2 - \theta_1, \dots, \Delta_{q^*} = \theta_{q^*} - \theta_{q^* - 1}.$$

Пусть $\Delta_q, q \in Q$, – такой набор чисел, что для каждого $\theta \in T_h$ найдется поднабор $Q(\theta) \subset Q$, при котором $\theta = \sum_{q \in Q(\theta)} \Delta_q$. Имеет место формула

$$F(\theta) = \prod_{q \in Q(\theta)} F(\Delta_q). \quad (4.3)$$

Метод «разновесов» для вычисления функции $F(\theta), \theta \in T_h$, состоит в следующем. До начала процесса наблюдения выбирается набор $\Delta_q, q \in Q$. Для каждого $\theta \in T_h$ строится поднабор $Q(\theta) \subset Q$. Вычисляются и запоминаются значения $F(\Delta_q), q \in Q(\theta)$. В процессе наблюдения значения функции $F(\theta), \theta \in T_h$, вычисляются по формуле (4.3).

Процесс наблюдения стационарного объекта осуществляется по алгоритму, описанному в пункте 2. Дополнительно можно использовать метод «разновесов» и параллельные вычисления.

5 Пример 1

Рассматривается четвертная модель автомобиля (рисунок 5.1):

$$\dot{x}_1 = x_3; \quad \dot{x}_2 = x_4; \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{k_1}{m_1} x_2; \quad \dot{x}_4 = \frac{k_1}{m_2} x_1 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} x_2.$$

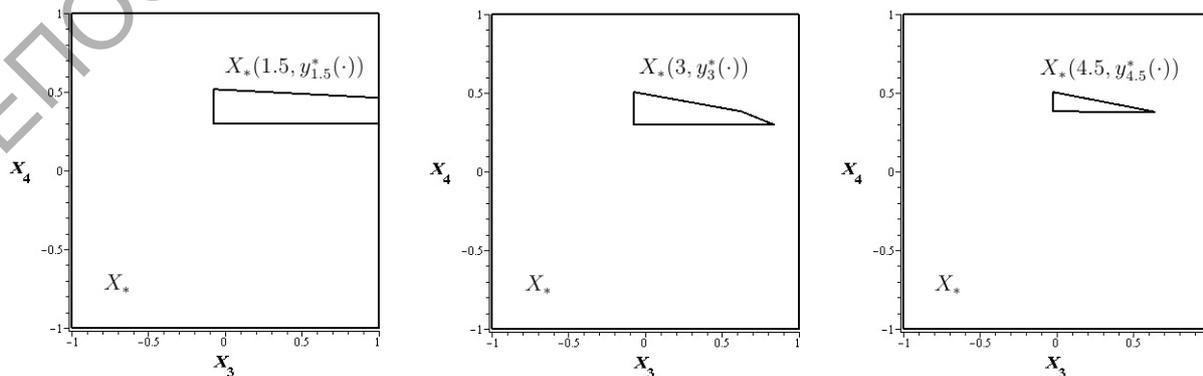


Рисунок 5.2 – Внешние аппроксимации текущих распределений начального состояния

Объект наблюдается на промежутке $T = [0; 4, 5]$ при следующих значениях параметров: $k_1 = 1; k_2 = 10; m_1 = 1; m_2 = 10$. Пусть $h = 0, 1; d_* = (0; 0; -1; -1); d^* = (0; 0; 1; 1); \xi_* = (-0, 15; -0, 1); \xi^* = (0, 15; 0, 1)$.

Используется импульсное измерительное устройство

$$y_1(\theta) = 0, 1x_1(\theta) + \xi_1(\theta);$$

$$y_2(\theta) = 0, 1x_2(\theta) + \xi_2(\theta), \theta \in T_h.$$

Неизвестные начальное состояние и ошибки измерения имеют вид: $x_0 = (0; 0; 0; 0, 5);$

$$\xi_1(t) = 0, 15 \cos t; \xi_2(t) = 0, 1 \cos(2t).$$

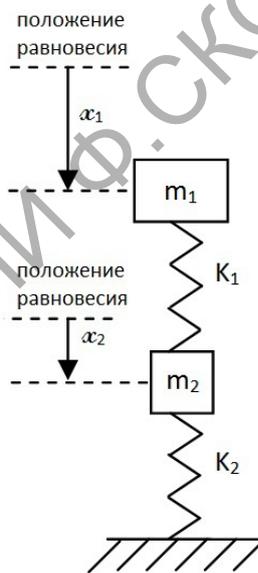


Рисунок 5.1 – Четвертная модель автомобиля

На рисунке 5.2 представлены внешние аппроксимации текущих распределений начального состояния, полученные с помощью направлений $p = (0; 0; \cos \frac{2k\pi}{20}; \sin \frac{2k\pi}{20}), k = \overline{1; 20}$; на рисунке 5.3 – изменение оценки неопределенности в некоторых направлениях.

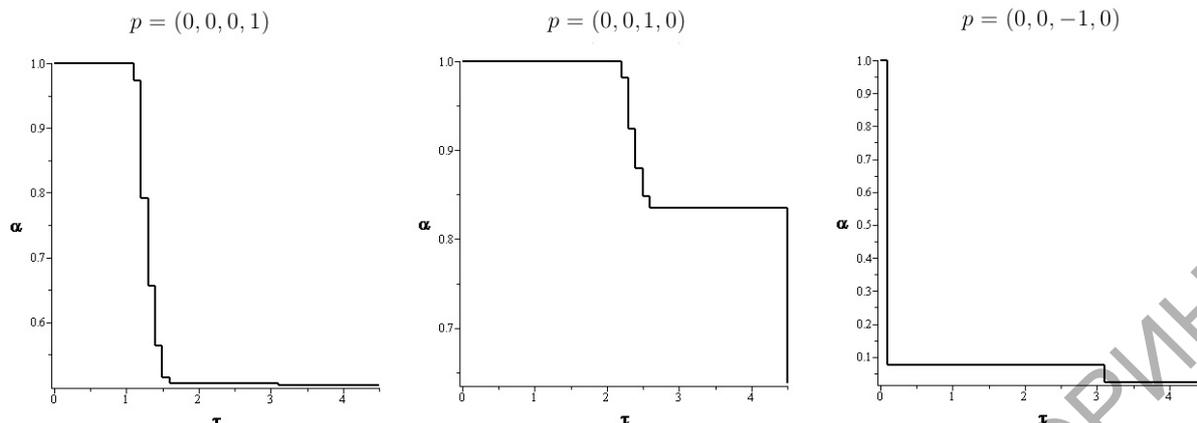


Рисунок 5.3 – Изменение оценки неопределенности

Таблица 5.1 – Количество итераций двойственного метода

$k \setminus \tau$	0	0.5	1	1.5	2	2.5
1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (1)	2 (1)
6	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
7	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
8	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
9	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
10	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	1 (0)
11	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
12	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
13	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
14	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
15	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)
16	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)
17	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)
18	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)
19	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)
20	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Таблица 5.1 содержит информацию о количестве итераций двойственного метода (при $t^* = 2,5; h = 0,5$). Числа, записанные в скобках (), соответствуют примеру 2 (см. пункт 7). В левую колонку помещена информация о количестве итераций в случае использования пустой опоры в качестве начальной. Правая колонка содержит информацию о количестве итераций в случае использования предыдущей оптимальной опоры в качестве начальной.

6 Наблюдение с помощью дискретного измерительного устройства

Заменим импульсное измерительное устройство (1.2) на дискретное

$$y(\theta) = C(\theta) \int_{\theta-h}^{\theta} x(s) ds + \xi(\theta), \quad (6.1)$$

$$\xi(\theta) \in \Xi, \theta \in T_h^+$$

Новая задача наблюдения сводится к задаче (см. Приложение 1)

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_*(\theta) \leq \bar{D}(\theta)x \leq \xi^*(\theta), \theta \in T_h^{t^*+}; \quad (6.2)$$

$$d_* \leq x \leq d^*,$$

где $\xi_*(\theta) = \xi_* - y(\theta), \xi^*(\theta) = \xi^* - y(\theta),$

$$\bar{D}(\theta) = -C(\theta) \int_{\theta-h}^{\theta} F(s) ds = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{ij}(\theta), & j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}, \theta \in T_h^+.$$

До начала процесса наблюдения выполняется подготовительная работа. Множество

$$Y_{(t_*, h)} = \left\{ y \in \mathbb{R}^r : \right.$$

$$y = C(t_* + h) \int_{t_*}^{t_*+h} F(s) ds x_0 + \xi(t_* + h),$$

$$\left. x_0 \in X_*, \xi(t_* + h) \in \Xi \right\}$$

покрывается ε -сетью $Y_{(t_*, h)}^\varepsilon$. Для каждого узла

y^l сети решается задача

$$p'x \rightarrow \max;$$

$$y^l - \xi^* \leq C(t_* + h) \int_{t_*}^{t_*+h} F(s) ds x \leq y^l - \xi_*;$$

$$d_* \leq x \leq d^*.$$

Вычисляются и запоминаются:

1) $K_{\text{он}}^{l0} = \{S_{\text{он}}^{l0}, J_{\text{он}}^{l0}\};$

2) $\tilde{D}_{(\text{он})}^{l0};$

3) $F(t_* + 2h);$

4) $\alpha^{l0};$

5) $\zeta^{l0}(t_* + h)$. Параметр ε выбирается так, чтобы для каждой точки $y \in Y_{(t_*, t_*+h)}$ существовал такой узел $y^l \in Y_{(t_*, t_*+h)}^\varepsilon$, что время коррекции оптимальной опоры $K_{\text{он}}^{l0}$ до оптимальной $K_{\text{он}}^0(y)$ для точки y не превосходило h .

В момент t_* в управляющий орган подается априорная оценка неопределенности $\alpha^*(t_*) = \alpha$, в момент $t_* + h$ становится известным сигнал $y^*(t_* + h)$, для которого решается задача

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_*(t_* + h) \leq \tilde{D}(t_* + h)x \leq \xi^*(t_* + h),$$

$$d_* \leq x \leq d^*.$$

В качестве начальной опоры берется оптимальная опора $K_{\text{он}}^{l0}$ того узла y^l , для которого $s(t_* + h) < h$. Процесс наблюдения продолжается по методу, описанному в пункте 2.

Рассмотрим стационарную задачу наблюдения с помощью дискретного измерительного устройства

$$y(\theta) = C \int_{\theta-h}^{\theta} x(s) ds + \xi(\theta), \xi(\theta) \in \Xi, \theta \in T_h^+.$$

Обозначим

$$\Phi_h(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} F(s) ds, \Phi_h(\theta + h) = \int_{\theta}^{\theta+h} F(s) ds, \theta \in T_h^+.$$

Используя замену переменного $t = s - h$, получим

$$\Phi_h(\theta + h) = \int_{\theta-h}^{\theta} F(t + h) dt = A_h \int_{\theta-h}^{\theta} F(t) dt = A_h \Phi_h(\theta),$$

т. е. функция $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, удовлетворяет рекуррентным уравнениям:

– прямому

$$\Phi_h(\theta + h) = A_h \Phi_h(\theta),$$

$$\Phi_h(h) = \bar{A}_h, \theta \in T_h^+; \tag{6.3}$$

– обратному

$$\Phi_h(\theta - h) = A_{-h} \Phi_h(\theta),$$

$$\Phi_h(t^*) = A_h^{N-1} \bar{A}_h, \theta \in T_h^+. \tag{6.4}$$

Согласно (6.3), (6.4) в процессе наблюдения стационарного объекта отпадает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений.

Ускорение вычислений функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, с помощью параллельных вычислений осуществляется следующим образом. До начала процесса наблюдения выбираются произвольные моменты $\theta_q \in T_h, q \in Q = \{1, 2, \dots, q^*\} : h = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{q^*} = t^*$.

Множество T_h разбивается на подмножества

$$\{h, 2h, \dots, \theta_1 - h\}, \{\theta_1, \theta_1 + h, \dots, \theta_2 - h\}, \dots,$$

$$\{\theta_{q^*-1}, \theta_{q^*-1} + h, \dots, \theta_{q^*}\}.$$

По формулам (6.3), (6.4) вычисляются и запоминаются значения $\bar{\Phi}_h(\theta_q), q \in Q$. В процессе наблюдения значения функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, вычисляются по формулам (6.3), (6.4) параллельно на всех подмножествах с начальными условиями $\bar{\Phi}_h(\theta_q), q \in Q$.

Вторым способом ускорения вычислений в случае стационарного объекта является метод «разновесов». Положим

$$\Delta_1 = \theta_1 - \theta_0, \Delta_2 = \theta_2 - \theta_1, \dots, \Delta_{q^*} = \theta_{q^*} - \theta_{q^*-1}.$$

Пусть $\Delta_q, q \in Q$, – такой набор чисел, что для каждого $\theta \in T_h$ найдется поднабор $Q(\theta) \subset Q$, при котором $\theta = \theta_0 + \sum_{q \in Q(\theta)} \Delta_q$. Имеет место формула

$$\Phi_h(\theta) = \Phi_h(\theta_0) \prod_{q \in Q(\theta)} F(\Delta_q). \tag{6.5}$$

Метод «разновесов» для вычисления функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, состоит в следующем. До начала процесса наблюдения выбирается набор $\Delta_q, q \in Q$. Для каждого $\theta \in T_h$ строится поднабор $Q(\theta) \subset Q$. Вычисляются и запоминаются значения $\Phi_h(\theta_0); F(\Delta_q), q \in Q(\theta)$. В процессе наблюдения значения функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, вычисляются по формуле (6.5). Метод «разновесов» можно использовать вместе с параллельными вычислениями.

7 Пример 2

Рассмотрим пример, описанный в пункте 5, с заменой импульсного измерительного устройства на дискретное

$$y_1(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} 0, 1x_1(s) ds + \xi_1(\theta);$$

$$y_2(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} 0, 1x_2(s) ds + \xi_2(\theta), \theta \in T_h^+.$$

Полученные результаты представлены на рисунках 7.1 и 7.2.

На рисунках 7.3 и 7.4 приведены результаты, полученные при использовании измерительного устройства

$$y_1(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} x_1(s) ds + \xi_1(\theta);$$

$$y_2(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} x_2(s) ds + \xi_2(\theta), \theta \in T_h^+.$$

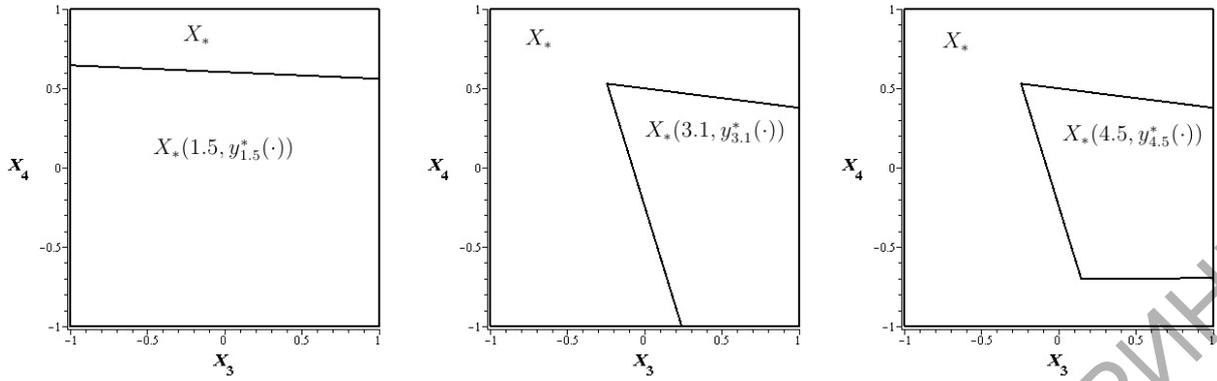


Рисунок 7.1 – Внешние аппроксимации текущего распределения начального состояния

$p = (0, 0, 0, 1)$

$p = (0, 0, 1, 0)$

$p = (0, 0, -1, 0)$

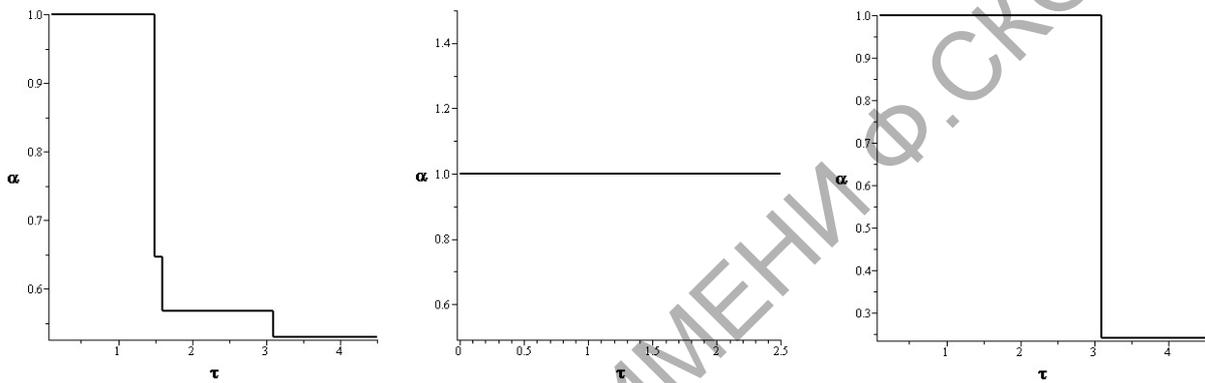


Рисунок 7.2 – Оценки неопределенности

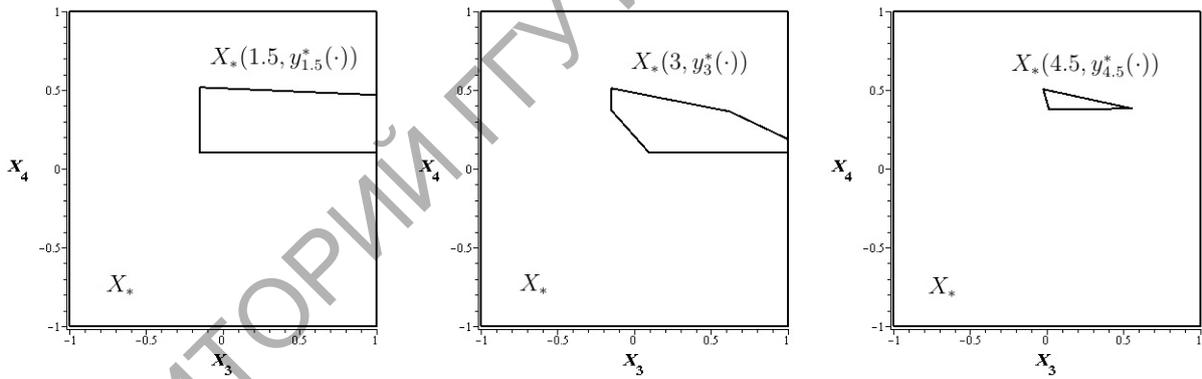


Рисунок 7.3 – Внешние аппроксимации текущего распределения начального состояния

$p = (0, 0, 0, 1)$

$p = (0, 0, 1, 0)$

$p = (0, 0, -1, 0)$

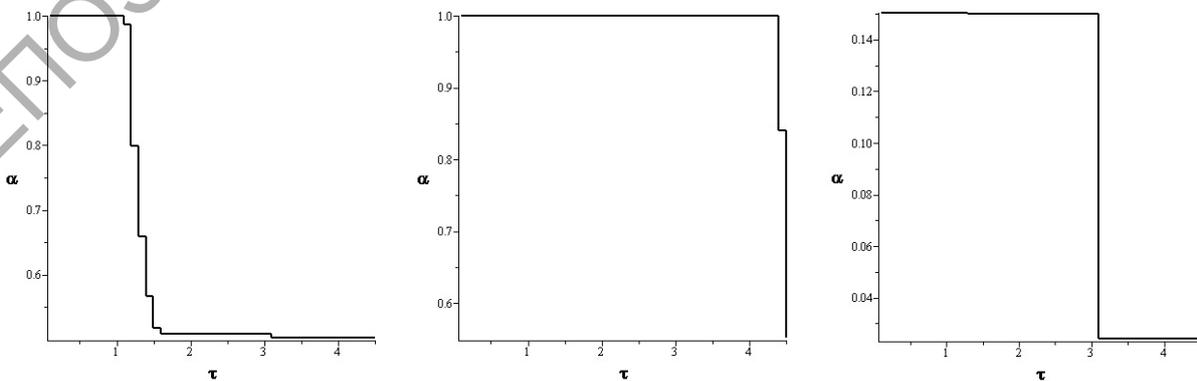


Рисунок 7.4 – Оценки неопределенности

Заключение

В работе описаны принципиальные конструкции цифровых эстиматоров, которые способны в режиме реального времени вычислять оценки неопределённости, имеющейся в начальном состоянии линейного динамического объекта, а также в сигналах импульсного и дискретного измерительных устройств.

При построении эстиматоров используется принцип работы по размыкаемому контуру. Следуя предлагаемой схеме, можно построить эстиматоры, работающие по принципу замыкаемого контура. Первые результаты в этом направлении содержатся в статьях [6], [7], где для построения эстиматоров дополнительно используется препостериорный анализ.

Приложение 1

Сведение задачи наблюдения к задаче ЛП

В силу формулы Коши для объекта (1.1)

$$x(t) = F(t)x_0, t \in T,$$

из определения 1.1 следует

$$X_*(\tau, y_\tau(\cdot)) = \{x \in R^n :$$

$$\xi_* \leq \xi(\theta) = y(\theta) + D(\theta)x \leq \xi^*, \theta \in T_h^r;$$

$$d_* \leq x \leq d^* \}.$$

Поэтому задача

$$\alpha(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max_x p'x, x \in X_*(\tau, y_\tau(\cdot)),$$

эквивалентна задаче ЛП

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_* - y(\theta) \leq D(\theta)x \leq \xi^* - y(\theta), \theta \in T_h^r;$$

$$d_* \leq x \leq d^*,$$

т. е. задача (1.4) сводится к задаче (1.5).

В случае дискретного измерительного устройства (6.1) задача наблюдения (1.4) сводится к задаче (6.2) с заменой $D(\theta)$ на $\bar{D}(\theta)$.

Приложение 2

Двойственный метод

Рассматривается интервальная задача линейного программирования:

$$c'x \rightarrow \max,$$

$$b_* \leq Ax \leq b^*,$$

$$d_* \leq x \leq d^*,$$

(П2.1)

$$x \in R^n, A \in R^{m \times n}.$$

Для решения задачи (П2.1) применяется двойственный метод, основным понятием которого является опора. Из множеств $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ выделяются такие произвольные подмножества $I_{\text{оп}} \subseteq I, J_{\text{оп}} \subseteq J$, что $|I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$. Составляется матрица

$$A_{\text{оп}} = A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j \in J_{\text{оп}} \\ i \in I_{\text{оп}} \end{pmatrix}.$$

Если $\det A_{\text{оп}} \neq 0$, то пара $K_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ – опора задачи (П2.1). В случае $I_{\text{оп}} = \emptyset, J_{\text{оп}} = \emptyset$ пустое

множество $K_{\text{оп}} = \emptyset$ – (пустая) опора, по определению.

Опору сопровождают:

1) вектор Лагранжа $u = u(I) = (u_i, i \in I)$:

$u_i = 0, i \in I_n = I \setminus I_{\text{оп}}; u'_{\text{оп}} A_{\text{оп}} = c'_{\text{оп}}$, где $u_{\text{оп}} = u(I_{\text{оп}}) = (u_i, i \in I_{\text{оп}}), c_{\text{оп}} = c(J_{\text{оп}}) = (c_j, j \in J_{\text{оп}})$. В случае пустой опоры полагаем $u = 0$;

2) вектор оценок $\delta = \delta(J) = (\delta_j, j \in J)$:

$\delta' = c' - u'_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J); \delta = c$, если $K_{\text{оп}} = \emptyset$;

3) псевдоплан $\varepsilon = \varepsilon(J) = (\varepsilon_j, j \in J)$ и вектор псевдозатрат $\xi = \xi(I) = (\xi_i, i \in I)$:

$$\xi_{\text{оп}} : \xi_i = \begin{cases} b_i^*, & \text{если } u_i > 0; \\ b_{*i}, & \text{если } u_i < 0; \\ \in [b_{*i}, b_i^*], & \text{если } u_i = 0, i \in I_{\text{оп}}; \end{cases}$$

$$\varepsilon_n : \varepsilon_j = \begin{cases} d_j^*, & \text{если } \delta_j > 0; \\ d_{*j}, & \text{если } \delta_j < 0; \\ \in [d_{*j}, d_j^*], & \text{если } \delta_j = 0, j \in J_n; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^{-1} [\xi_{\text{оп}} - A(I_{\text{оп}}, J_n) \varepsilon_n]; \xi_n = A(I_n, J) \varepsilon.$$

Опора $K_{\text{оп}}$ называется *регулярной*, если выполняются соотношения $u_i \neq 0, i \in I_{\text{оп}}; \delta_j \neq 0, j \in J_n$. Регулярную опору сопровождают единственные псевдоплан и вектор псевдозатрат.

Критерий оптимальности опоры. Для оптимальности опоры $K_{\text{оп}}^0$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых сопровождающих ее псевдоплана ε^0 и вектора псевдозатрат ξ^0 выполнялись неравенства:

$$d_{*j} \leq \varepsilon_j \leq d_j^*, j \in J_{\text{оп}};$$

$$b_{*i} \leq \xi_i \leq b_i^*, i \in I_n.$$

Решение задачи (П2.1) с помощью двойственного метода начинается с произвольной опоры $K_{\text{оп}}^1$ (возможно, пустой). Он представляет собой процесс преобразования опор, в результате которого получается оптимальная опора: $K_{\text{оп}}^1 \rightarrow \dots \rightarrow K_{\text{оп}}^0$. Псевдоплан ε^0 , сопровождающий оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0$, является оптимальным планом $\varepsilon^0 = x^0$.

Итерация метода представляет замену старой опоры $K_{\text{оп}}$ на новую $\bar{K}_{\text{оп}}$, при которой выполняется неравенство $c' \bar{\varepsilon} \leq c' \varepsilon$. Для регулярной опоры $K_{\text{оп}}$ итерация выполняется следующим образом (общий случай описан в [8]).

Вычисляется $\alpha^1 = -\max \{\rho_{i_0}, \rho_{j_0}\}$, где

$$\rho_{i_0} = \max \rho(\xi_i, [b_{*i}, b_i^*]), i \in I_n;$$

$$\rho_{j_0} = \max \rho(\varepsilon_j, [d_{*j}, d_j^*]), j \in J_{\text{оп}};$$

$\rho(c, [a, b])$ – расстояние от числа c до отрезка $[a, b]$.

Если $\alpha^1 = 0$, то $K_{\text{оп}} = K_{\text{оп}}^0$ – оптимальная опора задачи (П2.1). При $\alpha^1 < 0$ опора $K_{\text{оп}}$ заменяется на новую $\bar{K}_{\text{оп}}$. Для этого строятся направление Δu изменения вектора Лагранжа и направление $\Delta \delta$ изменения вектора оценок. Возможны два случая: 1) $\alpha^1 = -\rho_{i_0}$; 2) $\alpha^1 = -\rho_{j_0}$.

$$\begin{aligned} &\text{В случае 1) полагается } \Delta u_{i_0} = \text{sign}(\xi_{i_0} - b_{*i_0}); \\ &\Delta u_i = 0, i \in I_n \setminus i_0; \Delta u'_{\text{оп}} = -A(i_0, J_{\text{оп}})A_{\text{оп}}^{-1}\Delta u_{i_0}; \\ &\Delta \delta_{\text{оп}} = 0; \Delta \delta'_n = -\Delta u' A(I, J_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{В случае 2) полагается} \\ &\Delta \delta_{j_0} = \text{sign}(x_{j_0} - d_{*j_0}); \\ &\Delta \delta_j = 0, j \in J_{\text{оп}} \setminus j_0; \\ &\Delta u_n = 0; \Delta u'_{\text{оп}} A_{\text{оп}} = \Delta \delta'_{\text{оп}}; \\ &\Delta \delta'_n = -\Delta u'_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J_n). \end{aligned}$$

Вычисляются

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -u_i / \Delta u_i \quad \text{при } u_i \Delta u_i < 0; \\ \sigma_i &= \infty \quad \text{при } u_i \Delta u_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}}; \\ \sigma_j &= -\delta_j / \Delta \delta_j \quad \text{при } \delta_j \Delta \delta_j < 0; \\ \sigma_j &= \infty \quad \text{при } \delta_j \Delta \delta_j \geq 0, j \in J_n. \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Если среди этих чисел нет конечных, то задача (П2.1) не имеет решения из-за несовместности ограничений. В противном случае конечные числа из (П2.2) упорядочиваются: $\sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{k_0} < \infty$. Находится такой индекс k_0 , что $\alpha^{k_0} < 0$, $\alpha^{k_0+1} \geq 0$. Здесь $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta \alpha^k$;

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^k &= (b_{i_k}^* - b_{*i_k}) |\Delta u_{i_k}|, \text{ если } \sigma^k = \sigma_{i_k}; \\ \Delta \alpha^k &= (d_{j_k}^* - d_{*j_k}) |\Delta \delta_{j_k}|, \text{ если } \sigma^k = \sigma_{j_k}, k = 1, k^*. \end{aligned}$$

Имеются две возможности: а) $\sigma^{k_0} = \sigma_{i_k}$; б) $\sigma^{k_0} = \sigma_{j_k}$. Компоненты новой опоры $\bar{K}_{\text{оп}}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} 1\text{а)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= (I_{\text{оп}} \setminus i_k) \cup i_0, \bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}; \\ 1\text{б)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= I_{\text{оп}} \cup i_0, \bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_k; \\ 2\text{а)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= I_{\text{оп}} \setminus i_k, \bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0; \\ 2\text{б)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= I_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_k. \end{aligned}$$

Описанный метод конечен, если опоры на итерациях регулярны. Существует модификация метода, конечная для любой задачи [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах* / под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980.
2. *Schweppe, F.C. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs* / F.C. Schweppe // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – Vol. 13, Issue 1. – P. 22–28.
3. *Габасов, Р. Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. АН БССР. – 1990. – Т. 34, № 9. – С. 777–780.
4. *Габасов, Р. Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. – 1995. – Т. 211. – С. 140–152.
5. *Габасов, Р. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 35–46.
6. *Габасов, Р. Замыкаемая обратная связь для гарантированной оптимизации неопределенных систем управления* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Костина // Докл. РАН. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 180–183.
7. *Габасов, Р. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.В. Балашевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838–859.
8. *Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. Линейные задачи* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск: Изд-во Университетское, 1984.

Поступила в редакцию 05.09.14.