МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О p-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С ПРИМАРНЫМИ ИНДЕКСАМИ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

И.К. Чирик

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель, Беларусь

ON p-SUPERSOLUBILITY OF A FINITE FACTORIZED GROUP WITH PRIME INDEXES OF FACTORS

I.K. Chirik

Gomel Engineering Institute of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel, Belarus

Найдены достаточные условия p-сверхразрешимости конечной группы $G = AB$ с циклическими силовскими p-подгруппами в A и в B. В частности, доказана сверхразрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические, а индексы подгрупп A и B в группе G примарны.

***Ключевые слова**: конечная группа, р-сверхразрешимая группа, р-разрешимая группа.*

Sufficient conditions for p-supersolubility of a finite group $G = AB$, where A and B have cyclic Sylow p-subgroups are received. In particular, the supersolubility of a finite group $G = AB$ providing that all Sylow subgroups of A and B arecyclic, and the indexes of A and B in the group G are prime is proved.

***Keywords**: finite group, p-supersoluble group, p-solvable group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]–[2].

Пусть p – простое число. Группа называется p-разрешимой, если порядки ее главных факторов либо являются степенью p, либо не делятся на p. Группа называется p-сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов либо равны p, либо не делятся на p.

Следуя [3] группу с циклической силовской p-подгруппой будем называть z_p-группой, а z-группой – группу, у которой все силовские подгруппы циклические.

Группы, факторизуемые z_p-подгруппами, изучались в работах [3]–[7]. Я.Г. Беркович [3] установил p-сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка при условии, что A и B – z_p-подгруппы. Отсюда вытекает сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка, если A и B – z-подгруппы.

Для групп четного порядка аналогичные результаты неверны. Для фиксированного простого p первые примеры не p-сверхразрешимых разрешимых групп $G = AB$ четного порядка с циклическими силовскими p-подгруппами в A и в B привел В.Д. Мазуров. Кроме того, он доказал непростоту группы $G = AB$ при условии, что A и B – z-подгруппы [4]. Такая группа может быть неразрешимой, примером служит группа $\mathrm{PGL}(2,5)$.

В.Д. Черток [5] доказал p-сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что A и B – p-разложимые z_p-подгруппы. В.С. Монахов [6] установил 3-сверхразрешимость 3-разрешимой группы $G = AB$ при условии, что силовские 2-подгруппы и 3-подгруппы в A и в B циклические.

В данной работе устанавливаются новые признаки p-сверхразрешимости факторизуемой группы $G = AB$ четного порядка с циклическими силовскими p-подгруппами в сомножителях A и B. В частности, доказывается сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические, а индексы подгрупп A и B в группе G примарны.

1 Вспомогательные результаты

Примарное число – это число, являющееся степенью некоторого простого числа. Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной. Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G, а $H < G$ будет использоваться в случае, когда $H \le G$ и $H \ne G$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$. Конечную группу называют бициклической, если она является произведением двух циклических подгрупп.

Через $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n; Z_m и E_{p^t} – циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в группе G p- и p'-подгруппы; через $p\mathfrak{U}$ обозначим класс всех p-сверхразрешимых групп; $l_p(G)$ – p-длина p-разрешимой группы G.

***Лемма* 1.1.**

1. *Класс $p\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.*

2. *Если $G/O_{p'}(G) \in p\mathfrak{U}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.*

3. *Если Z – циклическая нормальная в G подгруппа и $G/Z \in p\mathfrak{U}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Утверждение 1 хорошо известно [8, с. 35]. Утверждения 2 и 3 просто проверяются по определению p-сверхразрешимой группы.

***Лемма* 1.2.** *Предположим, что p-разрешимая группа G не принадлежит $p\mathfrak{U}$, но $G/K \in p\mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$.

2. *Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N,*

$$N = O_p(G) = C_G(N).$$

3. *G – примитивная группа; если M – примитиватор группы G, то $G = [N]M$.*

4. *N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$.*

5. *Если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,|M|)$.*

Доказательство. 1. Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то по условию леммы $G/O_{p'}(G) \in p\mathfrak{U}$. Из определения p-сверхразрешимой группы следует, что $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по условию $G/\Phi(G) \in p\mathfrak{U}$, а поскольку $p\mathfrak{U}$ – насыщенная формация, то $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Значит $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$.

2. Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G/N_1 \in p\mathfrak{U}$, $G/N_2 \in p\mathfrak{U}$, а поскольку $p\mathfrak{U}$ – формация, то $G \simeq G/(N_1 \cap N_2) \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. В p-разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа является либо p'-подгруппой, либо абелевой p-подгруппой. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то N будет p-подгруппой. В группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает с произведением всех абелевых минимальных нормальных подгрупп [1, теорема 4.24], поэтому $N = F(G) = O_p(G)$. Из [9, лемма 2] получаем, что $N = C_G(N)$.

3. Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = MN$. Если $Core_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $N \subseteq Core_G M$, $G = MN = M$, противоречие. Поэтому $Core_G M = 1$ и G – примитивная группа с примитиватором M. Из того, что N – минимальная нормальная в G подгруппа и $G = NM$ следует, что $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$.

4. Поскольку G – p-разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n и $n > 1$ по лемме 1.1 (3)).

5. Предположим, что подгруппа M абелева. Так как N – минимальная нормальная в G подгруппа, то M действует неприводимо на N. По [8, лемма 4.1] подгруппа M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,|M|)$. Лемма доказана.

Примитивные группы со сверхразрешимым примитиватором изучены в [10].

***Лемма* 1.3** [2, II.8.17]. *Пусть G – группа порядка 12 или 24. Если группа G имеет элементарную абелеву нормальную подгруппу N порядка 4 и $C_G(N) = N$, то $G \simeq A_4$ или $G \simeq S_4$.*

***Лемма* 1.4** [11, лемма 2]. *Для p-разрешимой группы G с бициклической силовской p-подгруппой справедливы следующие утверждения:*

1) *если $p = 2$, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3. В частности, $l_2(G) \le 2$;*

2) *если $p > 2$, то $l_p(G) \le 1$.*

***Лемма* 1.5.** *Если группа G является p-разрешимой и z_p-группой, то G – p-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы. В p-разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа N либо p'-подгруппа, либо является элементарной абелевой p-подгруппой. Если N – p'-подгруппа, то G/N по индукции p-сверхразрешима, значит и G p-сверхразрешима. Если N – элементарная абелева p-подгруппа, то N имеет простой порядок, так как силовская в G циклическая. По индукции G/N p-сверхразрешима по индукции. Отсюда G p-сверхразрешима.

***Лемма* 1.6.** *Если группа G является p-сверхразрешимой для любого $p \in \pi(G)$, то G – сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G и $r \in \pi(N)$. Так как G является r-сверхразрешимой, то $|N| = r$. По индукции фактор-группа G/N сверхразрешима. Следовательно, G – сверхразрешимая группа.

***Лемма* 1.7** [12, теорема 1]. *Пусть G – простая неабелева группа, $H < G$ и $|G:H| = p^a$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений.*

1. $G \simeq A_n$, $p^a = n$.
2. $G \simeq \mathrm{PSL}(r, q)$, $p^a = \frac{q^r-1}{q-1}$ *и r – простое число.*
3. $G \simeq \mathrm{PSL}(2,11)$, $p^a = 11$.
4. $G \simeq M_{23}$, $p^a = 23$.
5. $G \simeq M_{11}$, $p^a = 11$.
6. $G \simeq \mathrm{PSp}(4,3)$, $p^a = 27$.

В частности, только $\mathrm{PSL}(2,7)$ *имеет подгруппы двух различных примарных индексов.*

***Лемма* 1.8.** *Если $U \le V \le X$ и L – субнормальная подгруппа в группе X, то $|V \cap L : U \cap L|$ делит $|V:U|$.*

Доказательство. В [13, лемма 4] доказано следующее утверждение: *если H – подгруппа группы G, то $|K : K \cap H|$ делит $|G:H|$ для каждой субнормальной в G подгруппы K.* Применяя это утверждение при $G = V$, $H = U$, $K = V \cap L$, получаем, что $|V \cap L : U \cap L|$ делит $|V:U|$.

2 Критерии p-сверхразрешимости

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – группа, $p, r \in \pi(G)$, и R – силовская r-подгруппа из G. Если существуют p-разрешимые z_p-подгруппы A и B такие, что*

$$G = AB = AR = BR,$$

то группа G p-сверхразрешима.

Доказательство. Вначале докажем, что G p-разрешима. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Из факторизаций $G = AR = BR$ следует, что индексы подгрупп A и B в группе G являются степенями простого числа r. Пусть $|G:A| = r^a$, $|G:B| = r^b$. Поскольку $G = AB$, то

$$|G| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$$

и справедливы равенства:

$$r^a = |G:A| = |B : A \cap B|, |B| = r^a |A \cap B|,$$

$$r^b = |G:B| = |A : A \cap B|, |A| = r^b |A \cap B|,$$

$$|G : A \cap B| = |G:A| \cdot |A : A \cap B| = r^{a+b},$$

$$|G| = r^{a+b} |A \cap B|.$$

Так как $a \ne 0 \ne b$, то группа G содержит подгруппы индексов r^a и $r^{a+b} > r^a$. По лемме 1.7 группа G непростая.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Тогда фактор-группа

$$G/N = (AN/N) \cdot (BN/N) =$$
$$= (AN/N) \cdot (RN/N) =$$
$$= (BN/N) \cdot (RN/N)$$

удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы и G/N p-сверхразрешима по индукции. Поэтому подгруппу N следует считать не p-разрешимой,

$$N = N_1 \times \cdots \times N_k,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы подгруппы. Так как подгруппы A и B p-разрешимы, то N_1 не содержится в A и N_1 не содержится в B, т. е.

$$|N_1 : N_1 \cap A| \ne 1 \ne |N_1 : N_1 \cap B|.$$

Применяя лемму 1.8 к подгруппам $X = A$, $Y = G$ и субнормальной подгруппы N_1, получим, что $|N_1 : N_1 \cap A|$ делит $|G:A| = r^a$, поэтому $|N_1 : N_1 \cap A| = r^m \ne 1$.

Рассмотрим цепочку подгрупп

$$A \cap B < A < G, |G:A| = r^a,$$
$$|A : A \cap B| = r^b,$$

и применим лемму 1.8 к подгруппам $X = A \cap B$, $Y = A$ и субнормальной подгруппы N_1. Имеем:

$$|N_1 \cap A : N_1 \cap A \cap B| = r^n, \quad 0 \le n \le b.$$

Если $n > 0$, то

$$|N_1 : N_1 \cap A \cap B| = r^{m+n} > r^m$$

и N_1 содержит две подгруппы $N_1 \cap A$ и $N_1 \cap A \cap B$ различных примарных индексов r^m и $r^{m+n} > r^m$. Но это невозможно ввиду леммы 1.7. Следовательно, $n = 0$ и

$$N_1 \cap A \cap B = N_1 \cap A.$$

Аналогично,

$$N_1 \cap A \cap B = N_1 \cap B, N_1 \cap A = N_1 \cap B.$$

Так как $N_1 \cap A$ субнормальна в A и $N_1 \cap B$ субнормальна в B, то $N_1 \cap A$ субнормальна в G [14, 7.7.1]. Но подгруппа N_1 простая, поэтому $N_1 \cap A = 1$ и $|N_1| = r^m$. Противоречие с тем, что N не является p-разрешимой. Итак, группа с рассматриваемой факторизацией всегда p-разрешима.

Теперь покажем, что G p-сверхразрешима. Применим индукцию по порядку группы. Пусть $N \neq 1$ – нормальная в группе G подгруппа. Так как фактор-группа G/N удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы, то G/N p-сверхразрешима по индукции и из леммы 1.2 следует, что

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1,$$

$$N = O_p(G) = F(G) = C_G(N),$$

где N – единственная минимальная нормальная в G подгруппой и N не будет циклической по лемме 1.1.

По [2, VI.4.6] существует силовская p-подгруппа G_p группы G, которая является произведением некоторых силовских p-подгрупп A_p и B_p из A и B, поэтому $G_p = A_p B_p$ бициклическая.

Если $p \neq r$, то из факторизации $G = AR = BR$ следует, что $G_p = A_p = B_p$ – циклическая и по лемме 1.5 группа G p-сверхразрешима.

Поэтому $p = r$ и можно считать, что $R = G_p = A_p B_p$. Так как G p-разрешима, то она является $D_{p'}$-группой [2, VI.1.7]. Согласно [2, VI.4.6] существует p'-холлова подгруппа $G_{p'}$ группы G, которая является произведением некоторых p'-холловых подгрупп $A_{p'}$ и $B_{p'}$ из A и B. Пусть $p^a = |R|$, $m = |G_{p'}|$. Тогда

$$|G| = p^a m = \frac{|A||R|}{|A \cap R|} = \frac{|B||R|}{|B \cap R|},$$

$$m = \frac{|A|}{|A \cap R|} = \frac{|B|}{|B \cap R|},$$

т. е. m делит $|A|$ и m делит $|B|$. Поэтому

$$m = |A_{p'}| = |B_{p'}| = |G_{p'}|,$$

$$A_{p'} = B_{p'} = G_{p'},$$

значит $G_{p'} \leq A \cap B$. Кроме того, $G = AB_p = A_p B$ и $N \leq G_p = A_p B_p$.

Предположим, что $l_p(G) = 1$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то G_p нормальна в G. Подгруппа $N = O_p(G)$, поэтому $N = G_p$. Поскольку подгруппа G_p бициклическая, то N будет элементарной абелевой подгруппой порядка p^2. Теперь подгруппа A p-замкнута, а поскольку $G = AB_p$, то $N = A_p$ нормальна в G, что противоречит тому, что N нециклическая.

Остается случай, когда $l_p(G) > 1$. Так как $G_p = A_p B_p$ бициклическая, то $p = 2$ и $G/N \simeq S_3$ по лемме 1.4. Кроме того, подгруппа N дополняема в G и $|N| = 4$ по [11]. Теперь $G \simeq S_4$ по лемме1.3. Все факторизации группы S_4 известны, среди них нет требуемой. Теорема доказана.

***Замечание* 2.1.** При установлении p-разрешимости группы в теореме 2.1 использовалась теорема из [12], доказательство которой основывается на классификации конечных простых групп.

***Следствие* 2.1.** *Пусть A и B – z_p-подгруппы p-разрешимой группы G и $G = AB$. Если индексы в группе G подгрупп A и B примарны, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть

$$|G : A| = r^a,\ |G : B| = q^b,\ r, q \in \pi(G).$$

Если $r = q$, то $G = AB = AR = BR$, где R – силовская r-подгруппа группы G и G p-сверхразрешима по теореме 2.1.

Пусть $r \neq q$. Тогда либо $p \neq r$, либо $p \neq q$. Если $p \neq r$, то $A_p = G_p$ циклическая и по лемме 1.5 группа G p-сверхразрешима. Если $p \neq q$, то $B_p = G_p$ циклическая и опять по лемме 1.5 группа G p-сверхразрешима.

***Следствие* 2.2.** *Пусть A и B – z-подгруппы группы G и $G = AB$. Если индексы в группе G подгрупп A и B примарны, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Вначале покажем, что группа разрешима. Пусть

$$|G : A| = r^a,\ |G : B| = q^b,\ r, q \in \pi(G).$$

Если $r \neq 2$ или $q \neq 2$, то $G_2 \leq A$ или $G_2 \leq B$, подгруппа G_2 циклическая и группа G 2-нильпотентна [2, IV.2.8]. Поэтому считаем $r = 2 = q$. Теперь $G_{2'} \leq A \cap B$. Подгруппы A и B сверхразрешимы [2, IV.2.11], поэтому они 2-нильпотентны [2, VI.9.1]. Следовательно, подгруппа $G_{2'}$ нормальна в A и нормальна в B. Теперь $G_{2'}$ нормальна в G и G разрешима.

Итак, разрешимость группы G установлена. По следствию 2.1 группа G p-сверхразрешима для любого $p \in \pi(G)$. Из леммы 1.6 получаем, что группа G сверхразрешима.

***Замечание* 2.2.** При получении следствий 2.1 и 2.2 классификация конечных простых групп не используется.

***Пример* 2.1.** В теореме 2.1 требование «A и B – z_p-подгруппы» нельзя ослабить до требования «A и B p-сверхразрешимы». Примером служит группа [324, 160] из библиотеки AllSmallGroups [15]. Она не 3-сверхразрешима и обладает факторизацией

$$G = A_4 \cdot ([E_{3^3}]E_4), |G : A_4| = 3^3, |G : [E_{3^3}]E_4| = 3,$$

в которой подгруппы A_4 и $[E_{3^3}]E_4$ 3-сверхразрешимы.

***Пример* 2.2.** В условиях теоремы 2.1 индексы подгрупп A и B являются степенями одного простого числа. Это требование нельзя ослабить до требования «A и B имеют примарные индексы». Примером служит простая группа

$$\mathrm{PSL}(2,7) = ([Z_7]Z_3) \cdot S_4.$$

В этой факторизации сомножители $[Z_7]Z_3$ и S_4 являются z_p-подгруппами при $p = 3$, их индексы равны 2^3 и 7.

***Пример* 2.3.** Разрешимая группа

$$G = AB = AR = BR$$

с z_p-подгруппами A, B и R может быть не p-сверхразрешимой. Примером служит группа $G = [E_{5^2}]Q$ [1, с. 159], где Q – группа кватернионов порядка 8. Пусть

$$E_{5^2} = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\} =$$
$$= \langle (1,0) \rangle \oplus \langle (0,1) \rangle$$

– аддитивная элементарная абелева группа порядка 5^2, Q – мультипликативная группа кватернионов порядка 8:

$$Q = \langle U, V \mid U^4 = V^4 = E, U^2 = V^2, V^{-1}UV = U^{-1} \rangle,$$

где U, V и W – матрицы над полем $\mathbb{Z}_5$:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad UV = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку группа Q содержится в $SL(2, \mathbb{Z}_5)$, то в силу [1, 2.50] она является группой автоморфизмов для E_{5^2}. По [1, 2.47], существует группа $G = [E_{5^2}]Q$, она имеет порядок 200, а её подгруппы

$$A = [\langle (1,0) \rangle] \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
$$B = [\langle (1,2) \rangle] \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
$$R = [\langle (1,1) \rangle] \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

являются z_5-подгруппами. Ясно, что $G = AB = AR = BR$, но группа G не является 5-сверхразрешимой [1, с. 160].

***Пример* 2.4.** В следствии 2.1 требование p-разрешимость группы убрать нельзя. Примером служит группа $G = A_5^{(1)} \times A_5^{(2)}$ при $p = 5$, она допускает факторизацию $G = HK$, где $H = A_5^{(1)} \times A_4^{(2)}$ и $|G : H| = 5$, $K = A_4^{(1)} \times A_5^{(2)}$ и $|G : K| = 5$. Здесь H и K – z_5-подгруппы их индексы примарны, но G не 5-разрешима.

***Пример* 2.5.** В следствиях 2.1 и 2.2 требование примарности индексов сомножителей ослабить нельзя. Примером служит разрешимая группа $S_4 = Z_4 \cdot S_3$. Она несверхразрешима и является произведением z-подгрупп Z_4 и S_3 индексов 6 и 4.

***Теорема* 2.2.** *Пусть A и B – z_p-подгруппы группы G и $G = AB$. Если в группе G существует абелева p'-холлова подгруппа, то группа G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Поскольку в группе G существует абелева p'-холлова подгруппа $G_{p'}$ и $G = G_p G_{p'}$, то G разрешима по теореме Виландта – Кегеля [2, VI.4.3].

Применим индукцию по порядку группы. Пусть $N \neq 1$ – нормальная в группе G подгруппа. Тогда фактор-группа

$$G/N = (AN/N) \cdot (BN/N)$$

удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы и G/N p-сверхразрешима по индукции. Из леммы 1.2 следует, что

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1,$$
$$N = O_p(G) = F(G) = C_G(N),$$

N – единственная минимальная нормальная в G подгруппа и $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M. По [2, VI.4.6] силовская p-подгруппа G_p группы G является произведением некоторых силовских p-подгрупп A_p и B_p из A и B, поэтому $G_p = A_p B_p$ бициклическая.

Если $l_p(G) > 1$, то из леммы 1.4 следует, что $p = 2$ и $M \simeq S_3$. Кроме того, подгруппа N дополняема в G и $|N| = 4$ по [11, лемма 1]. По лемме 1.3 группа $G \simeq S_4$, которая не обладает требуемой факторизацией, противоречие. Следовательно, $l_p(G) = 1$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то G_p нормальна в G. Подгруппа $N = O_p(G)$, поэтому $N = G_p$. Поскольку подгруппа G_p бициклическая, то $N = G_p$ будет элементарной абелевой подгруппой порядка p^2. Подгруппа M становится p'-холловой подгруппой группы G. Так как $N = G_p$ – минимальная нормальная в G подгруппа, то M циклическая [2, V.4.3].

Из факторизации $G = AB$, следует, что $M = HK$, где H и K некоторые p'-холловы подгруппы из A и B. Ясно, что $N \cap A = \langle a \rangle$, $H = \langle x \rangle$, и

$$A = \langle a, x \mid a^p = x^n = 1, a^x = a^\alpha, (n,p) = 1, 1 \le \alpha < p \rangle.$$

Аналогично, $N \cap B = \langle b \rangle$, $K = \langle y \rangle$, и

$$B = \langle b, y \mid b^p = y^m = 1, b^y = b^\beta, (m,p) = 1, 1 \le \beta < p \rangle.$$

Поскольку $N = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, то можно утверждать, что

$$a^y = a^{m_1} b^{n_1}, \quad b^x = a^{m_2} b^{n_2},$$

для некоторых целых n_1, n_2, m_1, m_2. Теперь

$$a^{xy} = a^{\alpha y} = a^{y\alpha} = a^{m_1\alpha} b^{n_1\alpha},$$

$$a^{yx} = (a^{m_1} b^{n_1})^x = a^{xm_1} b^{xn_1} = a^{\alpha m_1} (a^{m_2} b^{n_2})^{n_1}.$$

Поскольку HK циклическая, то $xy = yx$ и $b^{n_1\alpha} = a^{n_1 m_2} b^{n_1 n_2}$. Поэтому

$$a^{n_1 m_2} = 1, \quad n_1 m_2 = pt, \quad t \in N.$$

Если $n_1 = pt_1$, то $a^y = a^{m_1} b^{n_1} = a^{m_1}$ и подгруппа $\langle a \rangle = N \cap A$ нормальна в G, противоречие. Если $m_2 = pt_2$, то $b^x = a^{m_2} b^{n_2} = b^{n_2}$ и подгруппа $\langle b \rangle = N \cap B = N_2$ нормальна в G, противоречие. Итак, теорема доказана.

***Пример* 2.6.** В условиях теоремы 2.2 условие абелевости p'-холловой подгруппы нельзя ослабить до нильпотентности. Примером при $p = 5$ служит группа $G = [E_{5^2}]Q$ из примера2.5.

***Замечание* 2.3.** Разрешимая не p-сверхразрешимая группа, факторизуемая z_p-подгруппами, имеет p-ранг 2 при нечетном p и 2-ранг 2 или 3. Такие группы изучены в [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006.– 207с.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967.– 793 s.

3. *Беркович*, *Я.Г.* О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Математический сборник. – 1967. – Т. 74 (116), № 1. – С. 75–92.

4. *Мазуров*, *В.Д.* Замечания о конечных группах / В.Д. Мазуров; акад. наук СССР. – Новосибирск, 1974. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.02.74, № 404–74 // Сиб. матем. журн. – 1974. – 7 с.

5. *Черток*, *В.Д.* Об одном классе разрешимых групп / В.Д. Черток // Сибирский математический журнал. – 1969. – Т. 10, № 3. – С. 712–715.

6. *Монахов*, *В.С.* О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С.32–36.

7. *Asaad*, *M.* Some sufficient conditions for a finite group to be supersolvable / M. Asaad, V.S. Monakhov // Acta Mathematica Hungarica. – 2012. – Vol. 135, № 1–2. – P.168–173.

8. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука,– 1978. – 267 с.

9. *Монахов*, *В.С.* О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова. Математика. Механика. – 2009. – Т. 6. – С. 3–8.

10. *Лемешев*, *И.В.* О разрешимости некоторых конечных примитивных групп / И.В. Лемешев, В.С. Монахов // Проблемы физики, математики, техники. – 2012. – Т. 10, № 1. – С. 87–91.

11. *Монахов*, *В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

12. *Guralnick*, *R.M.* Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

13. *Монахов*, *В.С.* О произведении двух разрешимых подгрупп с максимальным пересечением факторов / В.С. Монахов // Вопросы алгебры : межведомств. сб. / Мин-во высш. и ср. спец. обр. БССР, Гомельский гос. ун-т; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Минск : Университетское, 1985. – Вып. 1. – С. 54–57.

14. *Lennox*, *J.C.* Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, S.E. Stonehewer // Oxford. Clarendon Press. – 1987.

15. *The GAP Group*, *GAP – Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: http://www.gap-system.org. – Дата доступа : 20.12.2009.

16. *Монахов*, *В.С.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

Поступила в редакцию 17.03.14.