ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНО МОНО ТОННЫХ ФУНКЦИЙ НЕГАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Труды Института математики. Минск. 2004. Том 12. № 1. С. 104–108

УДК 517.986.7:517.983.23

ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ НЕГАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Р. Миротин

Stieltjes functional calculus of negative and weekly negative operators in Banach space X is considered. For a negative operator A in X and a negative operator monotonic function φ it is shown that for all $y \in X$ the equation $\varphi(A)x = y$ has the unique solution $x = (1/\varphi)(A)y$ with Stieltjes function $1/\varphi$.

В работах Ф. Хирша [1–3] и некоторых его последователей [4,5] было построено функциональное исчисление положительных операторно монотонных функций позитивных и слабо позитивных операторов в банаховом пространстве. В частности, в [1] было показано, что такая функция позитивного оператора есть позитивный оператор, имеющий обратный. Целью настоящей работы является решение задачи об эффективном вычислении этого обратного оператора. Так как с точки зрения теории полугрупп рассмотрение негативных операторов представляется более естественным (по теореме Хилле–Иосиды–Миядеры–Филлипса генератор ограниченной полугруппы слабо негативен), мы далее, имея в виду приложения к теории полугрупп, предпочитаем негативные операторы позитивным. Соответствующая переформулировка теории Ф. Хирша тривиальна и сводится к отражению относительно начала координат, т. е. к рассмотрению отрицательных оператороно монотоных функций вместо положительных.

Определение 1. Будем говорить, что ненулевая функция φ, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и непрерывная в 0, является *отрицательной операторно монотонной* (и писать $\varphi \in \mathcal{R}_-$), если она отображает полуплоскость $\{z | \operatorname{Im} z < 0\}$ и луч $(-\infty; 0)$ в себя.

Класс $\mathcal{R}_-$ представляет собой конус, устойчивый относительно композиции, и содержит ряд важных элементарных и специальных функций.

Известно, что функция $\varphi \in \mathcal{R}_-$ допускает интегральное представление [6, с. 117]

$$\varphi(z) = c_0 + \int_0^\infty \frac{z}{1 - tz} d\sigma(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $c_0 = \varphi(0) \leq 0$, а мера σ на $\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию $(1+t)^{-1} \in L^1(\sigma)$ и определяется по φ однозначно.

Из (1) нетрудно вывести, что $\varphi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Всюду ниже X – комплексное банахово пространство, $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ – резольвента оператора A в X.

Определение 2. Замкнутый плотно определенный оператор A в X будем называть *негативным*, если $[0; +\infty) \subseteq \rho(A)$, и при некотором $M > 0$ справедлива оценка

Keywords: *operator monotonic function, Stieltjes function, negative operator, functional calculus*
2000 Mathematics Subject Classification: 47A50, 47A60.

$$\|R(\lambda, A)\| \leq M/(1+\lambda) \quad (\lambda \geq 0).$$

Если лишь $(0; +\infty) \subseteq \rho(A)$ и выполняется более слабая оценка

$$\|R(\lambda, A)\| \leq M/\lambda \quad (\lambda > 0),$$

то (замкнутый плотно определенный) оператор A в X называется *слабо негативным.*

Класс всех негативных (соответственно слабо негативных) операторов в X будем обозначать $Neg(X)$ (соответственно $Wneg(X)$).

Как уже отмечалось выше, генераторы ограниченных C_0-полугрупп слабо негативны. Очевидно также, что $A - \epsilon \in Neg(X)$, если $A \in Wneg(X), \epsilon > 0$. В [7] указаны условия на эллиптический оператор A в $L^p(p > 1)$, при которых оператор $(-A)$ негативен.

Определение 3 [1]. Для функции $\varphi \in \mathcal{R}_-$ с интегральным представлением (1) и оператора $A \in Wneg(X)$ положим

$$\varphi(A)x = c_0 x + \int_0^\infty R(1, tA)Ax d\sigma(t), \quad x \in D(A). \tag{2}$$

Тогда интеграл существует в смысле Бохнера и полученный оператор на $D(A)$ замыкаем. Его замыкание также обозначается $\varphi(A)$. Возникающее в результате функциональное исчисление будем называть $\mathcal{R}$-исчислением.

В [1] показано, что $\varphi(A) \in Neg(X)$ при $A \in Neg(X)$, а потому $\varphi(A)$ имеет ограниченный обратный. Для вычисления этого обратного оператора нам необходимо развить исчисление Стилтьеса негативных операторов в X, к определению которого мы и переходим.

Определение 4. Будем говорить, что ненулевая голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ функция g принадлежит классу $\mathcal{S}_-$ *функций Стилтьеса*, если она отображает полуплоскость $\{z | \operatorname{Im} z > 0\}$ в полуплоскость $\{z | \operatorname{Im} z \leq 0\}$, а луч $(-\infty; 0)$ – в себя.

Известно [6], что каждая такая функция допускает интегральное представление

$$g(z) = a - S\tau(-z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где $a = g(-\infty); S\tau(\zeta) = \int_0^\infty (t+\zeta)^{-1} d\tau(t)$– *преобразование Стилтьеса* положительной меры τ на $\mathbb{R}_+$, определяемой единственным образом.

Из (3) следует, что $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Кроме того, утверждения $\varphi \in \mathcal{R}_-, \varphi^\star \in \mathcal{S}_-$, где $\varphi^\star(z) := \varphi(z^{-1})$, и $1/\varphi \in \mathcal{S}_-$ равносильны.

В работе [5] определен оператор $g(A)$, где A–генератор ограниченной голоморфной полугруппы с плотным образом $\operatorname{Im} A$, и показано, что в этом случае $g(A)$ тоже является генератором голоморфной полугруппы. Ниже мы определяем $g(A)$ для операторов A из более широкого класса замкнутых операторов в X.

Определение 5. Класс $Wneg(X)^{-1}$ состоит из всех слабо негативных операторов в X, имеющих плотно опеределенный обратный.

Ясно, что $Neg(X) \subset Wneg(X)^{-1}$. Генераторы ограниченных голоморфных полугрупп в X, имеющие плотный образ, также принадлежат $Wneg(X)^{-1}$ [8].

Лемма 1. *Если $A \in Wneg(X)^{-1}$, то и $A^{-1} \in Wneg(X)^{-1}$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $A^{-1} \in Wneg(X)$. Как известно, $\rho(A^{-1}) \supset \supset 1/\rho(A) \supset (0; +\infty)$. Таким образом, при $t > 0$ существует $(t^{-1} - A^{-1})^{-1} = t(1 - tA^{-1})^{-1}$. Далее, $(t - A)u = (tA^{-1} - 1)Au$ при $u \in D(A)$, а потому $(tA^{-1} - 1)^{-1}(t - A)u = Au$. Полагая здесь $u = (t - A)^{-1}y, y \in D(A)$, имеем $(tA^{-1} - 1)y = AR(t, A)y = R(t, A)Ay$, т.е. $R(t, A)Ay = -R(1, tA^{-1})y$, или (при $x = Ay$)

$$R(t, A)x = -R(1, tA^{-1})A^{-1}x, \quad x \in \operatorname{Im} A. \tag{4}$$

Если теперь $x \in \operatorname{Im}(A^{-1}) = D(A)$, то формула (4) и определение 2 влекут оценку

$$\|R(t, A^{-1})x\| = \|R(1, tA)Ax\| = t^{-1}\|R(t^{-1}, A)Ax\| = t^{-1}\|(-1 + t^{-1}R(t^{-1}, A))x\| \leq (1 + M)\|x\|/t,$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. *Пусть функция $g \in \mathcal{S}_-$ имеет интегральное представление (3). Для любого оператора $A \in Wneg(X)^{-1}$ оператор, заданный на* $\operatorname{Im} A$ *равенством*

$$g(A)x = ax - \int\limits_0^\infty R(t,A)x d\tau(t), \quad x \in \operatorname{Im} A, \tag{5}$$

корректно определен и замыкаем.

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию из $\mathcal{R}_-$

$$\varphi(z) = a + \int\limits_0^\infty \frac{z d\tau(t)}{1-tz}.$$

В силу определения 3 и леммы 1 оператор

$$\varphi(A^{-1})x = ax + \int\limits_0^\infty R(1, tA^{-1})A^{-1}x d\tau(t)$$

корректно определен при $x \in D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A$ и замыкаем. Для завершения доказательства остается воспользоваться формулой (4).

Определение 6. Замыкание оператора, определяемого равенством (5), будет также обозначаться $g(A)$, а возникающее функциональное исчисление будет называться $\mathcal{S}$-исчислением.

Следствие 1. *Если $g \in \mathcal{S}_-$, то функция $g^\star(z) = g(z^{-1})$ принадлежит $\mathcal{R}_-$, и при всех $A \in Wneg(X)^{-1}$ имеет место равенство*

$$g(A) = g^\star(A^{-1}).$$

Доказательство. Если g имеет интегральное представление (3), то функция φ, рассмотренная в доказательстве теоремы 1, есть $g^\star$. Выше показано, что $g(A)x = g^\star(A^{-1})x$ при $x \in D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A$. Переход к замыканию завершает доказательство.

Следствие 2. *Для любых $A \in Neg(X), g \in \mathcal{S}_-$ оператор $g(A)$ ограничен.*

Доказательство. Следует из формулы (5) и определения негативного оператора.

Следствие 3. *Если g_1, g_2 и $g_3 := -g_1g_2 \in \mathcal{S}_-$, то для любого $A \in Wneg(X)^{-1}$*

$$g_3(A) = -g_1(A)g_2(A).$$

Доказательство. Если $\varphi_i := g_i^\star$, то $\varphi_3 = -\varphi_1\varphi_2$. В силу правила умножения в $\mathcal{R}$-исчислении [3, теорема 1] и леммы 1 имеем $\varphi_3(A^{-1}) = -\varphi_1(A^{-1})\varphi_2(A^{-1})$, и осталось воспользоваться следствием 1.

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi \in \mathcal{R}_-$ функция $g_1(z) := -\varphi(z)z^{-1} (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)$ принадлежит $\mathcal{S}_-$, и для $A \in Neg(X)$ справедливо равенство*

$$g_1(A) = -\varphi(A)A^{-1}.$$

Доказательство. Замена $t = s^{-1}$ в правой части формулы (1) дает

$$g_1(z) = -c_0 z^{-1} + \int\limits_0^\infty \frac{d\tau(s)}{s-z},$$

Следовательно, $g_1 \in \mathcal{S}_-$, и при всех $x \in \operatorname{Im} A = X$ имеем

$$g_1(A)x = -c_0 A^{-1}x + \int\limits_0^\infty R(s,A)x d\tau(s).$$

После обратной замены $s = t^{-1}$ получаем требуемое равенство.

Лемма 3. *Для любых $A \in Neg(X), g \in \mathcal{S}_-$ операторы A^{-1} и $g(A)$ коммутируют.*

Доказательство. Это следует их определения $g(A)$, следствия 2 и того факта, что операторы $R(t, A)$ и A^{-1} коммутируют.

Теперь мы в состоянии доказать наш основной результат (напомним, что $1/\varphi \in \mathcal{S}_-$ при $\varphi \in \mathcal{R}_-$).

Теорема 2. *При всех $A \in Neg(X), \varphi \in \mathcal{R}_-$ оператор $\varphi(A)^{-1}$ может быть вычислен по формуле*

$$\varphi(A)^{-1} = \left(\frac{1}{\varphi}\right)(A), \tag{6}$$

где правая часть понимается в смысле $\mathcal{S}$-исчисления.

Доказательство. Как уже отмечалось, существование ограниченного обратного к $\varphi(A)$ следует из включения $\varphi(A) \in Neg(X)$, доказанного в [1]. Применяя следствие 3 к тождеству

$$(-\varphi(z)z^{-1}) \cdot \left(\frac{1}{\varphi}\right)(z) = -z^{-1}$$

(функции $g_1(z) = -\varphi(z)z^{-1}, 1/\varphi(z)$ и z^{-1} принадлежат $\mathcal{S}_-$), имеем равенство $g_1(A)(1/\varphi)(A) = -A^{-1}$, т. е.

$$-Ag_1(A)\left(\frac{1}{\varphi}\right)(A) = I.$$

С учетом лемм 2 и 3 последнее равенство принимает вид $A\varphi(A)(1/\varphi)(A)A^{-1}x = x \quad (x \in X)$, или $A\varphi(A)(1/\varphi)(A)y = Ay \quad (y \in D(A))$. В силу инъективности A отсюда следует, что

$$\varphi(A)\left(\frac{1}{\varphi}\right)(A)y = y, \quad y \in D(A). \tag{7}$$

Поскольку оператор $(1/\varphi)(A)$ ограничен, а $\varphi(A)$ замкнут, то (7) выполняется для всех $y \in X$.

Аналогично, исходя из равенства

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)(z) \cdot (\,-\varphi(z)z^{-1}) = -z^{-1},$$

получаем $(1/\varphi)(A)g_1(A) = -A^{-1}$, что вместе с леммой 2 дает $(1/\varphi)(A)\varphi(A)A^{-1}x = -A^{-1}x\,(x \in X)$, т. е.

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)(A)\varphi(A)y = y, \quad y \in D(A). \tag{8}$$

В силу определения 3 для каждого $y \in D(\varphi(A))$ найдется такая последовательность $y_n \in D(A)$, что $y_n \to y$ и $\varphi(A)y_n \to \varphi(A)y$. Полагая в (8) $y = y_n$ и учитывая ограниченность оператора $(1/\varphi)(A)$, заключаем, что (8) справедливо при всех $y \in D(\varphi(A))$, что и завершает доказательство.

Следствие 4. *При $g \in \mathcal{S}_-$, $A \in Neg(X)$ оператор $g(A)$ обратим и*

$$g(A)^{-1} = \left(\frac{1}{g}\right)(A), \tag{9}$$

где правая часть понимается в смысле $\mathcal{R}$-исчисления.

Доказательство. Достаточно положить $\varphi = 1/g$ в (6).

Замечание. Мы можем эффективно вычислить правую часть в (6) и (9), найдя представляющую меру для $1/\varphi$ (соответственно, $1/g$) по одной из формул обращения преобразования Стилтьеса (см., например, [9]). В частности, если $F = S\tau$, то (в смысле теории распределений)

$$\tau(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to+0}(F(-t - i\epsilon) - F(-t + i\epsilon)). \tag{10}$$

Пример. Функция $\varphi(z) = -\log(1-z)$, где ветвь логарифма выделяется условием $\log x > 0$ при $x > 1$, принадлежит $\mathcal{R}_-$ и имеет интегральное представление (1) с мерой $d\sigma(t) = \chi_{[0,1]}(t)dt$. Следовательно, уравнение $-\log(1-A)x = y$, где $A \in Neg(X), y \in X$, т. е.

$$\int_0^1 R(1, tA)Axdt = y, \quad y \in X, \tag{11}$$

имеет единственное решение $x = g(A)y$, где $g(z) = -1/\log(1-z)$. Здесь $a = g(-\infty) = 0$, а мера τ из интегрального представления (3) может быть найдена по формуле (10), т. е. (в смысле теории распределений)

$$\tau(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\log(1-t-i0)} - \frac{1}{\log(1-t+i0)}\right) = \frac{\theta(t-1)}{\log^2|t-1| + \pi^2\theta^2(t-1)}$$

(мы воспользовались равенством $\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x)$, где $\theta-$ функция Хевисайда). Таким образом, уравнение (11) имеет при каждом $y \in X$ единственное решение

$$x = -\int_1^\infty \frac{R(t,A)ydt}{\pi^2 + \log^2(t-1)}.$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф03-116).

Литература

1. **Hirsch F.** Intégrales de résolvantes et calcul symbolique // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1972. V. 22. № 4. P. 239–264.

2. **Hirsch F.** Familles d'opérateurs potentiels // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1975. V. 25. № 3. P. 263–288.

3. **Hirsch F.** Domaines d'opérateurs représentés comme intégrales de résolventes // J. Funct. Anal. 1976. V. 23. P. 199–217.

4. **Пустыльник Е.И.** О функциях позитивного оператора. // Матем. сб. 1982. Т. 119(161). № 1(9). С. 32–47.

5. **Berg C., Boyadzhiev K., de Laubenfels R.** Generation of generators of holomorphic semigroups // J. Austral. Math. Soc. (Series A). 1993. V. 55. P. 246–269.

6. **Крейн М.Г., Нудельман А.А.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.

7. **Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.** Оценка решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., 1962.

8. **de Laubenfels R.** Inverses of generators // Proc. Amer. Math. Soc.1988. V. 104. P. 443–448.

9. **Брычков Ю.А., Прудников А.П.** Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, г. Гомель, Беларусь