MirotinRom

Adolf Mirotin
Francisk Skorina Gomel State University

УДК 517.986

О СТРОГОЙ ГРАНИЦЕ И ГРАНИЦЕ ШИЛОВА АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Р. Миротин, М. А. Романова

Введение

Первые работы по теории обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров принадлежат Р. Аренсу и И.М. Зингеру [1;2]. В настоящий момент это довольно развитый раздел функционального анализа, расположенный на стыке теории равномерных алгебр, абстрактного гармонического анализа и теории аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. Современное состояние предмета отражено в монографиях [3;4;5;6]. В [7] было предложено более общее определение обобщенной аналитической функции, чем в [1]. Основные результаты данной работы описывают структуру строгой границы и границы Шилова равномерной алгебры функций, аналитических в смысле [7]. Если полугруппа не содержит нетривиальных простых идеалов, обе границы совпадают с группой характеров этой полугруппы. В последнем случае получен ответ на (открытый в общем случае) вопрос о спектре Гельфанда рассматриваемой алгебры.

Всюду ниже S — дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e, записываемая мультипликативно, $G = S^{-1}S$ — группа частных для S. *Полухарактером* полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. *Характерами* называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров полугруппы S далее обозначается через $\widehat{S}$, а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, — через $\widehat{S}_+$. Символом $E(\widehat{S})$ будем обозначать множество всех *идемпотентов* полугруппы $\widehat{S}$, т. е. полухарактеров, принимающих лишь значения 0 и 1. Множества $\widehat{S}, \widehat{S}_+$ и $E(\widehat{S})$, наделенные топологией поточечной сходимости на S, являются компактными топологическими полугруппами по умножению с единицей 1 (они замкнуты в $\overline{\mathbb{D}}^S$). Компактную группу всех характеров полугруппы S будем обозначать X.

Согласно теореме 3.1 из [1] каждый полухарактер $\psi \in \widehat{S}$ может быть представлен в виде $\psi = \rho\chi$, где $\chi \in X$, а полухарактер $\rho = |\psi| \in \widehat{S}_+$ определяется по ψ однозначно (*полярное разложение*). С полухарактером $\rho \in \widehat{S}_+$ связаны подполугруппы $S(\rho) := \{s \in S : \rho(s) > 0\}$ и $S^\rho := \{s \in S : \rho(s) = 1\}$ полугруппы S, дополнения которых, если они не пусты, являются идеалами полугруппы S. Идеалы, дополнения которых есть полугруппа, называются *простыми.* Простые идеалы, отличные от $S \setminus \{e\}$, будем называть *нетривиальными.* Через θ обозначим индикатор множества $\{e\}$. Это полухарактер полугруппы S, если и только если

$S^{-1} \cap S = \{e\}$. Наконец отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор $S(\rho)$, и что $\rho^z \in \widehat{S} \setminus X$ при $\rho \in \widehat{S}_+, \quad \rho \neq 1, \quad z \in \Pi$, где $\Pi := \{\mathrm{Re} z > 0\}$ ([1], §7). Относительно понятий и обозначений из теории коммутативных банаховых алгебр, не определенных в данной работе, см. [3]. Конец доказательства будет обозначаться знаком $\square$.

Основные результаты

Пусть A есть коммутативная банахова алгебра с пространством максимальных идеалов M_A. *Точечной производной* в точке $\phi \in M_A$ называется такой линейный функционал L на A, для которого

$$L(fg) = \phi(f)L(g) + \phi(g)L(f), \quad f, g \in A.$$

В частности, если A есть равномерная алгебра на компакте Y, то точечная производная в точке $y \in Y$ удовлетворяет равенству

$$L(fg) = f(y)L(g) + g(y)L(f), \quad f, g \in A.$$

Напомним, что *строгой границей* равномерной алгебры A на компакте Y называется множество всех ее p-точек, т. е. точек из Y, являющихся пересечениями множеств пика.

Для доказательства основных результатов нам понадобятся три леммы. Следующее утверждение сформулировано в [3] на с. 92. Ввиду отсутствия ссылок мы приводим доказательство.

Лемма 1. *Пусть A есть равномерная алгебра на компакте Y. Если точка $p \in Y$ принадлежит строгой границе алгебры A, то любая точечная производная в точке p тривиальна.*

Доказательство. Рассмотрим максимальный идеал $I_p = \{f \in A : f(p) = 0\}$ алгебры A и покажем, что он имеет ограниченную аппроксимативную единицу. Ввиду теоремы Альтмана (см., например, [8], с. 58) достаточно проверить, что для любых $f \in I_p$ и $\epsilon > 0$ найдется такой $u \in I_p$, $\|u\| \leq 2$, что $\|f - fu\| < \epsilon$. Для проверки выберем окрестность U точки p, для которой $|f(x)| < \epsilon$ при $x \in U$. В силу леммы II.12.2 из [3] найдется такое множество пика F, что $p \in F \subset U$. Если функция h образует пик на F, то для натурального n, при котором $|h(y)|^n < \epsilon/\|f\|$ для $y \in Y \setminus U$, функция $u = 1 - h^n$ удовлетворяет поставленным требованиям. Теперь в силу факторизационной теоремы Коэна (см., например, [9], следствие (32.26)) для любого $f \in I_p$ найдутся такие $f_1, f_2 \in I_p$, что $f = f_1 f_2$. Если L есть точечная производная в точке p, то $L(f) = f_1(p)L(f_2) + f_2(p)L(f_1) = 0$. Поскольку коразмерность I_p равна 1, и $L(1) = 0$, то $L = 0$.$\square$

Определение 1 [7]. Комплекснозначную функцию F на $\widehat{S} \setminus X$ будем называть *обобщенной аналитической*, если для любых полухарактеров ρ, ψ из $\widehat{S} \setminus X$, $\rho \geq 0$ отображение $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости Π и непрерывно в $+0$.

Равномерную алгебру функций, непрерывных на $\widehat{S}$ и обобщенных аналитических на $\widehat{S}\backslash X$, обозначим $A(\widehat{S})$. Границу Шилова алгебры $A(\widehat{S})$ будем обозначать через $\partial_{A(\widehat{S})}$, а строгую границу – через Γ.

Легко проверить, что функции вида $\widehat{a}(\xi) := \xi(a)$ $(a \in S,\ \xi \in \widehat{S})$ принадлежат $A(\widehat{S})$. Равномерная алгебра на $\widehat{S}$, порожденная этими функциями, называется алгеброй Аренса-Зингера и обозначается $A_0(\widehat{S})$. Ясно, что $A_0(\widehat{S}) \subseteq A(\widehat{S})$, причем строгое включение возможно.

Лемма 2. *Если полухарактер ψ полугруппы S принадлежит строгой границе Γ алгебры $A(\widehat{S})$, то $|\psi| \in E(\widehat{S})$.*

Доказательство. Пусть $\psi = \rho\chi$ – полярное разложение полухарактера ψ. Допустим противное, т. е. $\rho \notin E(\widehat{S})$. Если мы положим $\kappa(z) = \rho^z\psi$ $(z \in \Pi)$, то функционал, определенный на функциях $F \in A(\widehat{S})$ равенством

$$L(F) = (F \circ \kappa)'(1),$$

есть, как легко проверить, точечная производная алгебры $A(\widehat{S})$ в точке ψ. Кроме того, если элемент $a \in S$ таков, что $\rho(a) \neq 0, 1$, то $L(\widehat{a}) = \psi(a)\log\rho(a) \neq 0$. Применение леммы 1 приводит нас к противоречию.$\square$

Обозначим через $E_0(\widehat{S})$ множество тех полухарактеров $\rho_0 \in E(\widehat{S})$, для каждого из которых найдется такой полухарактер $\rho_1 \in \widehat{S}_+$, что $\rho_1(s) = 1$ при $s \in S(\rho_0)$ и $0 < \rho_1(s) < 1$ при $s \notin S(\rho_0)$.

Нижеследующее предложение показывает, что утверждение, обратное лемме 2, вообще говоря, неверно.

Предложение 1. *Пусть $S^{-1} \cap S = \{e\}$, и $\theta \in E_0(\widehat{S})$. Тогда θ не принадлежит* Γ.

Доказательство. В силу теоремы 2 из [10] для любой функции $F \in A(\widehat{S})$ справедливо равенство

$$\int\limits_X F(\chi)d\chi = F(\theta), \tag{1}$$

где $d\chi$ есть нормированная мера Хаара (компактной) группы X. Таким образом, комплексный гомоморфизм $F \mapsto F(\theta)$ алгебры $A(\widehat{S})$ имеет представляющую меру $\sigma \neq \delta_\theta$, что невозможно для точек строгой границы (см., например, [3], теорема II.11.3 и замечание в начале с. 86; [11], утверждение 10.3.1).$\square$

Ниже (см. теорему 1) мы обобщим предложение 1 для случая, когда полугруппа S счетна.

В связи со следующей леммой отметим, что множество $E(T)$ идемпотентов абелевой компактной полугруппы T есть компактная полугруппа, и для каждого $e \in E(T)$ существует наибольшая подгруппа $H(e)$, содержащая e. Эта группа компактна и называется *максимальной подгруппой полугруппы T, содержащей e*; кроме того, множество $H = \coprod_{e\in E(T)} H(e)$ также компактно в T (см., например, [12], с. 17 – 18).

Лемма 3. *Для любого полухарактера $\rho_0 \in E(\widehat{S})$ справедливо равенство $H(\rho_0) = \rho_0 X$.*

Доказательство. Поскольку $\rho_0 X$ является группой, содержащей ρ_0, то $\rho_0 X \subseteq H(\rho_0)$. Пусть теперь $\psi \in H(\rho_0)$, $|\psi| = \rho$. Так как $\rho_0\psi = \psi$, то, переходя к модулям, получаем $\rho_0\rho = \rho$. Следовательно, $S(\rho) \subseteq S(\rho_0)$. С другой стороны, найдется такой $\psi' \in H(\rho_0)$, что $\psi\psi' = \rho_0$. Если $\rho' = |\psi'|$, то $\rho\rho' = \rho_0$, а потому $\rho = \rho_0$.$\square$

Теорема 1. *Строгая граница Γ алгебры $A(\widehat{S})$ есть объединение максимальных подгрупп полугруппы $\widehat{S}$, т. е.*

$$\Gamma = \coprod_{\rho \in F} \rho X,$$

где F содержится в $E(\widehat{S})$. Если S счетна, то $1 \in F$, а $E_0(\widehat{S}) \cap F = \emptyset$.

Доказательство. По лемме 2 любой полухарактер $\psi \in \Gamma$ имеет полярное разложение $\psi = \rho\chi$, в котором $\rho \in E(\widehat{S})$. С учетом леммы 3 это означает, что ψ принадлежит максимальной подгруппе ρX полугруппы $\widehat{S}$. Заметим, что каждому характеру $\xi \in X$ соответствует автоморфизм алгебры $A(\widehat{S})$, переводящий $f \in A(\widehat{S})$ в $f_\xi : \psi \mapsto f(\xi\psi)$. Отсюда следует, что $\xi\Gamma = \Gamma$, а потому $\psi X = \rho X \subseteq \Gamma$. Если F есть образ Γ при отображении $\psi \mapsto |\psi|$, то $\Gamma = \coprod_{\rho \in F} \rho X$.

Далее мы будем предполагать, что S счетна, $S = \{s_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Зафиксируем строго положительную функцию v на S, удовлетворяющую условию $\sum_{n=1}^{\infty} v(s_n) = 1$, а также точку $\chi \in X$ и рассмотрим функцию

$$f(\psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi(s_n)\overline{\chi(s_n)}v(s_n) = \langle \psi, \chi \rangle,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение в весовом пространстве $l_2(S, v)$. Ясно, что $f \in A(\widehat{S})$ как сумма равномерно по ψ сходящегося ряда аналитических функций (мажорантным рядом является $\sum_{n=1}^{\infty} v(s_n) = 1$). Неравенство Коши-Буняковского $|f(\psi)| \leq \|\psi\|\|\chi\| \leq 1$ показывает, что $|f|$ достигает своего максимума, равного 1, в точке χ и только в этой точке (если оно при некотором $\psi \in \widehat{S}$ превращается в равенство, то $\psi(s) = c\chi(s)$, и при $s = e$ получаем $c = 1$). Таким образом, X содержится в любой границе алгебры $A(\widehat{S})$, а тогда $1 \in F$.

Заметим, наконец, что по критерию А. С. Мищенко (см., например, [13], с. 391) компактное пространство $\widehat{S}$ метризуемо, так как каждая его точка ψ обладает счетной базой окрестностей вида

$$U(\psi; t_1, \ldots, t_n; \epsilon) := \{\zeta \in \widehat{S} : |\zeta(t_i) - \psi(t_i)| < \epsilon \text{ при } i = 1, \ldots, n\},$$

где $t_i \in S, n \in \mathbb{N}, \epsilon \in \mathbb{Q}_+$. В этой ситуации, как известно, Γ есть наименьшая из границ алгебры $A(\widehat{S})$. Пусть $f \in A(\widehat{S}), \rho_0 \in E_0(\widehat{S})$ и $\rho_1 \in \widehat{S}_+$ таков, что $\rho_1(s) = 1$ при $s \in S(\rho_0)$ и $0 < \rho_1(s) < 1$ при $s \notin S(\rho_0)$. Так как функция $\phi(z) = f(\rho_1^z)$ непрерывна и ограничена в замкнутой правой полуплоскости $\overline{\Pi}$ и аналитична в Π, то по принципу Фрагмена-Линделефа $\sup_{z\in\overline{\Pi}} |\phi(z)| = \sup_{r\in\mathbb{R}} |\phi(ir)|$. Отсюда следует, что при всех натуральных n справедливо неравенство

$$|f(\rho_1^n)| \le \sup_{r\in\mathbb{R}} |f(\rho_1^{ir})|.$$

Поскольку $\rho_1^{ir} \in X$, то, устремляя n к ∞, получаем $|f(\rho_0)| \le \max\limits_X |f|$. Но $X \subset \Gamma$, и Γ минимальна. Следовательно, $\rho_0 \notin \Gamma$. $\Box$

Отметим, что в условиях предложения 1 полухарактер $\theta \notin F$.

Выясним теперь структуру границы Шилова алгебры $A(\widehat{S})$ (ниже квадратные скобки обозначают замыкание в $\widehat{S}$).

Теорема 2. *Для границы Шилова алгебры $A(\widehat{S})$ справедливо равенство*

$$\partial_{A(\widehat{S})} = \coprod_{\rho\in K} \rho X,$$

где $K = [F]$ есть компактное подмножество $E(\widehat{S})$, содержащее 1.

Доказательство. Заметим сначала, что для любого замкнутого $C \subset E(\widehat{S})$ множество $M := \coprod_{\rho\in C} \rho X$ замкнуто в $\widehat{S}$. Действительно, если напрвленность ψ_n из M сходится к полухарактеру $\psi \in \widehat{S}$, то $|\psi_n|$ сходится к $|\psi|$. А так как $|\psi_n| \in C$, то и $|\psi| \in C$. В силу полярного разложения $\psi \in |\psi| \cdot X \subset M$.

Покажем теперь, что для любого множества $D \subset E(\widehat{S})$ справедливо равенство

$$\left[\coprod_{\rho\in D} \rho X\right] = \coprod_{\rho\in[D]} \rho X.$$

Разумеется, левая часть содержится в правой по причине замкнутости последней. Для доказательства обратного включения возьмем полухарактер $\psi \in \coprod_{\rho\in[D]} \rho X$. Он имеет полярное разложение $\psi = \rho\chi$, где $\rho \in [D]$, $\chi \in X$. Тогда $\rho = \lim_n \rho_n$ для некоторой направленности $\rho_n \in D$. Поэтому направленность $\psi_n := \rho_n\chi \to \psi$, причем $\psi_n \in \coprod_{\rho\in D} \rho X$. Значит, $\psi \in [\coprod_{\rho\in D} \rho X]$.

Теперь, поскольку строгая граница Γ плотна в $\partial_{A(\widehat{S})}$ (см., например, [11, с. 90]), с учетом теоремы 1 имеем

$$\partial_{A(\widehat{S})} = [\Gamma] = \coprod_{\rho\in[F]} \rho X.$$

Компактность $[F]$ следует из компактности $E(\widehat{S})$. Наконец, заметим, что алгебра $A(\widehat{S})$ содержит в качестве замкнутой подалгебры алгебру Аренса-Зингера $A_0(\widehat{S})$, границей Шилова которой служит X [1], а потому $X \subset \partial_{A(\widehat{S})}$.$\Box$

Следствие 1. *Если $E(\widehat{S})$ содержит лишь конечное множество р-точек, то* $\Gamma = \partial_{A(\widehat{S})}$. *Если дополнительно предположить, что* $S^{-1} \cap S = \{e\}$, *и* $\theta \in E_0(\widehat{S})$, *то* $\theta \notin \partial_{A(\widehat{S})}$.

Доказательство. По условию множество $F = \Gamma \cap E(\widehat{S})$ конечно. Поэтому первое утверждение следует из равенства $K = [F]$, а второе — из предложения 1. □

Следствие 2. *Если полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов, то* $\Gamma = \partial_{A(\widehat{S})} = X$.

Доказательство. В силу теоремы 2 $X \subset \partial_{A(\widehat{S})}$. Поскольку дополнения к $S(\rho)$ и S^ρ в случае их непустоты являются простыми идеалами, а множество $S \setminus \{e\}$ есть по условию единственный простой идеал полугруппы S, то все неотрицательные полухарактеры ρ, отличные от θ, удовлетворяют условию $0 < \rho(s) < 1$ при всех $s \in S, s \neq e$, а идемпотентами полугруппы $\widehat{S}$ являются только 1 и θ ($S \setminus (S^{-1} \cap S)$ есть простой идеал, и значит, $S^{-1} \cap S = \{e\}$). Поэтому в силу следствия 1 и теоремы 1 $\Gamma = \partial_{A(\widehat{S})} \subseteq X \cup \{\theta\}$. Теорема 4.5.2 из [11] дает $\widehat{S}_+ \neq \{1, \theta\}$ (см. также [14], теорема 2.3.9), а потому выполнены все условия следствия 1. Следовательно, $\theta \notin \partial_{A(\widehat{S})}$.□

Следствие 2 позволяет вычислить спектр Гельфанда алгебры $A(\widehat{S})$ при некоторых дополнительных предположениях. Ниже через $A(X)$ мы обозначаем алгебру, образованную сужениями на X функций из $A(\widehat{S})$, а S_1 есть подполугруппа группы G, порожденная носителями преобразований Фурье функций из $A(X)$.

Теорема 3. *Пусть полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов, и существует полухарактер $\rho_0 \in \widehat{S}_+$, разделяющий точки S. Тогда*

1) *$\widehat{S}$ есть подполугруппа полугруппы $\widehat{S_1}$;*

2) *отображение сужения на $\widehat{S}$ есть изометрический изоморфизм алгебры Аренса-Зингера $A_0(\widehat{S_1})$ и алгебры $A(\widehat{S})$;*

3) *спектр Гельфанда алгебры $A(\widehat{S})$ можно отождествить с $\widehat{S_1}$.*

Доказательство. 1) Для любого $a \in S$ обозначим через $\widetilde{a}$ функцию вычисления $\psi \mapsto \psi(a)$ ($\psi \in \widehat{S}$). Тогда $\widetilde{a} \in A(\widehat{S})$. Заметим, прежде всего, что при $a \in S$ носителем преобразования Фурье сужения функции $\widetilde{a}$ на X служит множество $\{a\}$. Поэтому $S \subseteq S_1$. Также легко проверить, что группы характеров полугрупп S и S_1 естественно изоморфны группе характеров X группы G (характеры этих полугрупп однозначно продолжаются на G), поэтому далее мы будем их отождествлять.

Поскольку алгебра $A(X)$, очевидно, инвариантна относительно сдвигов, она в силу предложения 4.1.8 из [6] равна алгебре A_{S_1}, состоящей из всех непрерывных на X функций, преобразование Фурье которых сосредоточено на S_1. Последняя алгебра, в свою очередь, посредством отображения сужения $i_0 : F \mapsto F|X$ изометрически изоморфна алгебре

$A_0(\widehat{S_1})$ по теореме 2.6 из [1]. С другой стороны, равенство $\partial_{A(\widehat{S})} = X$ влечет, что отображения сужения $i : \Phi \mapsto \Phi|X$ есть изометрический изоморфизм алгебр $A(\widehat{S})$ и $A(X)$. Таким образом, возникает изометрический изоморфизм $j : A_0(\widehat{S_1}) \to A(\widehat{S})$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A_{S_1} & = & A(X) \\ \uparrow i_0 & & \uparrow i \\ A_0(\widehat{S_1}) & \xrightarrow{j} & A(\widehat{S}) \end{array}$$

Покажем, что каждый полухарактер $\psi \in \widehat{S}$ продолжается до полухарактера $\widetilde{\psi} \in \widehat{S_1}$. В самом деле, для любого $x \in S_1$ имеем $\widehat{x} \in A_0(\widehat{S_1})$. Положим $\widetilde{\psi}(x) := j(\widehat{x})(\psi)$. Тогда при всех $x, y \in S_1$

$$\widetilde{\psi}(xy) = j(\widehat{xy})(\psi) = j(\widehat{x})(\psi)j(\widehat{y})(\psi) = \widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}(y).$$

Кроме того, изометричность j дает $|\widetilde{\psi}(x)| = |j(\widehat{x})(\psi)| \leq \|j(\widehat{x})\| = \|\widehat{x}\| = 1$. Следовательно, $\widetilde{\psi} \in \widehat{S_1}$.

Покажем, что $\widetilde{\psi}|S = \psi$. Заметим, что $j(\widehat{a}) = i^{-1}(i_0(\widehat{a})) = i^{-1}(\widehat{a}|X) = \widetilde{a}$, поскольку функции из $A(\widehat{S})$ и $A_0(\widehat{S_1})$ однозначно определяются своими значениями на X, а значения $\widehat{a}$ и $\widetilde{a}$ на X совпадают. Поэтому для любого $\psi \in \widehat{S_1}$ имеем $\widetilde{\psi}(a) = j(\widehat{a})(\psi) = \widetilde{a}(\psi) = \psi(a)$, что и утверждалось.

Как показано в доказательстве следствия 2, если полухарактер $\psi \neq \theta$, то $\psi(s) \in (0, 1)$ при $s \neq e$. Следовательно, если $x = a^{-1}b \in S_1$ $(a, b \in S)$, то необходимо $\widetilde{\psi}(x) = \psi(b)/\psi(a)$. Если же $\psi = \theta$, то в силу формулы (1) (теорема 2 из [10] здесь применима, поскольку полухарактер $\rho_1 := \widetilde{\rho_0} \in \widehat{S_1}$ удовлетворяет ее условиям, а потому и $S_1^{-1} \cap S_1 = \{e\}$) при всех $x \in S_1$ имеем

$$\widetilde{\theta}(x) = j(\widehat{x})(\theta) = \int\limits_X j(\widehat{x})(\chi)d\chi = \int\limits_X \chi(x)d\chi.$$

Поскольку группа X компактна, последний интеграл равен индикатору подмножества $\{e\} \subset S_1$. Теперь ясно, что (очевидно, непрерывное и инъективное) отображение $\psi \mapsto \widetilde{\psi}$ из $\widehat{S}$ в $\widehat{S_1}$ есть гомоморфизм полугрупп. А так как $\widehat{S}$ компактна, то это гомеоморфизм $\widehat{S}$ на свой образ, что и доказывает 1).

2) Утверждение следует из того, что для любой функции $F \in A_0(\widehat{S_1})$ функции $j(F)$ и $F|\widehat{S}$ совпадают на X, а потому и всюду.

3) Это сразу вытекает из утверждения 2) и теоремы 4.1 работы [1], согласно которой спектр Гельфанда алгебры $A_0(\widehat{S_1})$ есть $\widehat{S_1}$. $\square$

Список литературы

[1] Arens, R. Generalised analytic functions / R. Arens, I. M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 81. – № 2. – P. 379–393.

[2] Arens, R. A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc / R. Arens // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 81. – № 3. – P. 501–513.

[3] 3. Гамелин, Т. Равномерные алгебры / Т. Гамелин. – М. : Мир, 1973. – 336 с.

[4] Rudin, W. Fourier Analysis on Groups / W. Rudin. – N.Y. : Interscience, 1962. – 285 p.

[5] Tonev, T. Big planes, Boundaries and Function Algebras / T. Tonev. – Amsterdam : North-Holland, 1992. – 236 p.

[6] Grigoryan, S.A. Shift-invariant Uniform Algebras on Groups / S.A. Grigoryan, T. Tonev. – Basel : Birkhauser, 2006. – 292 p.

[7] Миротин, А. Р. Теорема Пэли-Винера для конусов в локально компактных абелевых группах / А. Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 1995. – №3 (394). – С. 35-44.

[8] Bonsall, F. F. Complete Normed Algebras / F. F. Bonsall, J. Duncan. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1973. – 301 p.

[9] Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. / Э. Хьюитт, К. Росс. – М. : Мир, 1974. – 901 с.

[10] Миротин, А. Р. Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций / А. Р. Миротин, М. А. Романова // Известия вузов. Математика. – 2007. – №3 (538). – С. 51-59.

[11] Taylor, J. L. Measure algebras /J . L. Taylor. – Providence : AMS, 1973. – 108 p.

[12] Carruth, J. H. The theory of topological semigroups / J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, R. J. Coch. – New York-Basel : Marcel Dekker, inc., 1983. – 240 p.

[13] Келли, Дж. Общая топология: Пер. с англ. — 2-е изд. / Дж. Келли. — М. : Наука, 1981. – 432 с.

[14] Миротин, А. Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А. Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило
"00"2009 г.

Abstract

Let S be discrete abelian semigroup with unit and consellations. We shaw that the strong boundary and the Shilov boundary of the algebra of generalized analytic functions on the semigroup $\widehat{S}$ of semicharacters of S are unions of some maximal subgroups of $\widehat{S}$. If S doesn't contain nontrivial simple ideals the both boundaries coincide with the character group of S. In this case, the Gelfand spectrum of the algebra under consideration has been calculated.

УДК 517.986

А. Р. Миротин, М. А. Романова. **О строгой границе и границе Шилова алгебр обобщенных аналитических функций**. — . —

В работе изучается алгебра обобщенных аналитических функций, определенных на полугруппе полухарактеров $\widehat{S}$ дискретной абелевой полугруппы S с сокращениями и единицей, более широкая, чем алгебра Аренса-Зингера. Показано, что строгая граница и граница Шилова этой алгебры являются объединениями максимальных подгрупп полугруппы $\widehat{S}$. Если S не содержит нетривиальных простых идеалов, обе границы совпадают с группой характеров полугруппы S. В последнем случае вычислен и спектр Гельфанда рассматриваемой алгебры.

Библиогр. – 14 наимен.