

УДК 512.542

ФОРМУЛА ИНЪЕКТОРА КОНЕЧНОЙ π -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

М.Г. Семенов

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь

FORMULA OF AN INJECTOR OF A FINITE π -SOLUBLE GROUP

M.G. Semenov

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Пусть G – конечная π -разрешимая группа. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G будем называть π -насыщенным, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$. Доказано, что $\mathcal{F}$ -инъектор группы G – это подгруппа вида $W \cdot C_{D_p}(W/W_{F(p)})$, где $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга, которое определяется полной локальной функцией F группы G , Σ – холловская система G , $D = N_G(\Sigma)$, $p \in \pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $D_p \in \Sigma \cap D$, W – $\mathcal{F}$ -инъектор группы $O^p(G)$ и $\Sigma \trianglelefteq W$.

Ключевые слова: конечная π -разрешимая группа, π -насыщенное множество Фиттинга, $\mathcal{F}$ -инъектор.

Let G be a finite π -soluble group. We say that a Fitting set $\mathcal{F}$ of G is π -saturated if it verifies $H \in \mathcal{F}$ whenever $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$. It is proved that $\mathcal{F}$ -injector of G is a subgroup of the form $W \cdot C_{D_p}(W/W_{F(p)})$, where $\mathcal{F}$ is a π -saturated Fitting set, which is defined with full integrated H -function F of G , Σ – Hall system of G , $D = N_G(\Sigma)$, $p \in \pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $D_p \in \Sigma \cap D$, W is an $\mathcal{F}$ -injector of $O^p(G)$ and $\Sigma \trianglelefteq W$.

Keywords: finite π -soluble group, π -saturated Fitting set, $\mathcal{F}$ -injector.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

В теории формаций известна теорема Брюстера [1] о том, что для любой π -насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в каждой π -разрешимой группе существуют $\mathfrak{F}$ -проекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что $\mathfrak{F}$ -проектором группы G называют такую подгруппу F , что FN/N – $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы N из G . В теории классов Фиттинга результат дуальной теоремы Брюстера был получен Мартинесом Вердуччи [2]. В работе [2] было доказано, что для любого π -насыщенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в π -разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Особый интерес представляет задача описания общего метода построения $\mathfrak{F}$ -инъекторов. В работах [3] и [4] были описаны $\mathfrak{F}$ -инъекторы для некоторых специальных случаев локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Также описанию метода построения инъекторов для классов Хартли и локальных классов Фиттинга была посвящена работа [5]. Более того В.Н. Загурским и Н.Т. Воробьевым [6] была найдена формула $\mathfrak{F}$ -инъектора в классе всех π -разрешимых групп для случая, когда π – множество всех простых делителей порядков всех групп из локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе мы обобщаем основной результат работы [6], описывая формулу $\mathcal{F}$ -инъектора в π -насыщенном множестве Фиттинга $\mathcal{F}$ π -разрешимой группы. Напомним, что множеством Фиттинга группы G называют [7, с. 537] такое непустое множество подгрупп группы G , которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Заметим, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фиттинга $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}$, которое называют следом класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, хотя обратное в общем случае неверно [7, пример VIII.2.2(b)]. При этом, когда множество Фиттинга $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G)$, множества $\mathfrak{F}$ -инъекторов и $\mathcal{F}$ -инъекторов группы G совпадают. В определениях и обозначениях мы следуем [7].

1 Предварительные сведения

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа. Её называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведением называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}\}$. Хорошо известно [7, теорема IX.1.12], что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга. Символом $G_{\mathcal{F}}$ обозначим наибольшую из нормальных $\mathcal{F}$ -подгрупп группы G . Такую подгруппу называют $\mathcal{F}$ -радикалом группы G . Подгруппу V называют [7, с. 538] $\mathcal{F}$ -инъектором группы G если $V \cap N$ является $\mathcal{F}$ -максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N группы G .

Если $H \leq G$, то $\mathcal{F}_H = \{S \leq H : S \in \mathcal{F}\}$ является множеством Фиттинга группы G и, очевидно, является множеством Фиттинга группы H . Следуя [7], мы будем обозначать $\mathcal{F}_H$ во многих случаях просто символом $\mathcal{F}$.

Лемма 1.1 [7, предположение VIII.2.4(d)]. Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и N – субнормальная подгруппа группы G , то $G_{\mathcal{F}} \cap N = N_{\mathcal{F}}$.

Лемма 1.2 [7, свойство VIII.2.6]. Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и K – субнормальная подгруппа группы G и V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , тогда подгруппа $V \cap K$ является $\mathcal{F}$ -инъектором группы K .

Лемма 1.3 [7, лемма VIII.2.7]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G , $N \trianglelefteq G$ и V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы N . Тогда V^g – $\mathcal{F}$ -инъектор группы N для любого элемента g группы G .

Класс групп $\mathcal{F}$ называют: гомоморфом, если из $G \in \mathcal{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует $G/N \in \mathcal{F}$; замкнутым относительно подпрямых произведений, если из $G/N_1 \in \mathcal{F}$ и $G/N_2 \in \mathcal{F}$ всегда следует $G/N_1 \cap N_2 \in \mathcal{F}$; формацией, если он является гомоморфом замкнутым относительно подпрямых произведений; формацией Фиттинга, если он является формацией и классом Фиттинга.

Пусть $\mathcal{F}$ – непустая формация. Наименьшую нормальную подгруппу $G^{\mathcal{F}}$ группы G , для которой $G/G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ называют $\mathcal{F}$ -корадикалом группы G . Пусть $\mathcal{X}$ – класс групп, тогда $\mathcal{F} \cdot \mathcal{X} = \{G | G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}\}$ называют $\mathcal{F}$ -корадикальным произведением.

Лемма 1.4 [7, теорема IV.1.8]. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{X}$ – непустые формации, а G – группа. Тогда $G^{\mathcal{F} \cdot \mathcal{X}} = (G^{\mathcal{F}})^{\mathcal{X}}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Напомним, что символом $O_{\pi}(G)$ обозначают наибольшую нормальную π -подгруппу группы G , а символом $O^{\pi}(G)$ – такую наименьшую нормальную подгруппу группы G , что факторгруппа $G/O^{\pi}(G)$ является π -группой.

Холловской системой [8] π -разрешимой группы G называется такое множество Σ холловских подгрупп из G , что выполняются следующие условия: 1) для всякого множества простых чисел p из π $G_p \in \Sigma$, а также $G_{p \cup \pi'} \in \Sigma$; 2) если

$H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$. Если R подгруппа группы G , то через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R | \forall S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холловская система группы R , то говорят, что Σ редуцирует холловскую систему Σ_R подгруппы R и обозначают $\Sigma \searrow R$.

Подгруппа $N_G(\Sigma) = \{g \in G | H = H^g, \forall H \in \Sigma\}$ называется нормализатором холловской системы Σ . Подгруппа A π -разрешимой группы называется π -связной [9], если либо A – π -подгруппа, либо A содержит холловскую π' -подгруппу группы G .

Лемма 1.5 [9, с. 56]. Пусть H – π -связная подгруппа π -разрешимой группы G . Подгруппа H пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холловская система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H .

Лемма 1.6 [10, с. 126]. Пусть U и V – подгруппы π -разрешимой группы G , Σ – холловская система группы G . Если $\Sigma \searrow U$ и $\Sigma \searrow V$, то $\Sigma \searrow U \cap V$.

Лемма 1.7 [10, с. 126]. Пусть U и V – подгруппы π -разрешимой группы G , Σ – холловская система группы G . Если $\Sigma \searrow U$, $\Sigma \searrow V$ и $UV = VU$, то $\Sigma \searrow UV$.

Подгруппа A группы G называется p -нормально погруженной [7] в G , если для простого числа p силовская p -подгруппа A_p группы A будет силовской p -подгруппой некоторой нормальной в G подгруппы. Подгруппу A группы G назовем π -нормально погруженной в G , если A p -нормально погружена в G для любого p из π . Если для любого простого делителя p порядка группы A эта подгруппа является p -нормально погруженной в G , то A называется нормально погруженной в G .

2 Локальные множества Фиттинга

Локальный метод для изучения структуры классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [3]. Для этой цели в [3] используются отображения вида $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$. Такие отображения называют функциями Хартли или H -функциями [11]. При этом если класс Фиттинга $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p$, для некоторой H -функции f ,

то его называют локальным [11]. По аналогии с функциями Хартли в теории классов Фиттинга определим H -функции для некоторой группы G .

Определение 2.1. Локальной функцией Хартли или H -функцией группы G назовем отображение $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{множества Фиттинга группы } G\}$.

Определение 2.2. Произведением $\mathcal{F} \circ \mathcal{X}$ множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathcal{X}$ назовем множество подгрупп

$$\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}\}.$$

Аналог известных свойств произведений классов Фиттинга [7, теорема IX.1.12] для множества Фиттинга представляет

Лемма 2.3. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G , $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $H \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G ;
- 2) $(H / H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} = H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} / H_{\mathcal{F}}$;
- 3) если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – классы Фиттинга, то $(\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1) \circ \mathfrak{X}_2 = \mathcal{F} \circ (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2)$.

Доказательство. 1) Пусть $M \trianglelefteq N \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Тогда по лемме 1.1 $M \cap N_{\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F}}$ и

$$M / M_{\mathcal{F}} = M / M \cap N_{\mathcal{F}} \cong MN_{\mathcal{F}} / N_{\mathcal{F}}.$$

Так как $MN_{\mathcal{F}} / N_{\mathcal{F}} \trianglelefteq N / N_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$, то $M / M_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ и $M \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Значит, множество $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ замкнуто относительно нормальных подгрупп.

Пусть $M_1 M_2 = N$, $M_i \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ и $M_i \trianglelefteq N$, $i \in \{1, 2\}$. Тогда по лемме 1.1 $M_i \cap N_{\mathcal{F}} = (M_i)_{\mathcal{F}}$ и $M_i / (M_i)_{\mathcal{F}} = M_i / M_i \cap N_{\mathcal{F}} \cong M_i N_{\mathcal{F}} / N_{\mathcal{F}}$. Но $N / N_{\mathcal{F}} = (M_1 N_{\mathcal{F}} / N_{\mathcal{F}})(M_2 N_{\mathcal{F}} / N_{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{X}$. Значит, $N \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ и множество $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является замкнутым относительно произведений нормальных подгрупп.

Пусть $N \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Покажем, что $N^x \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ для любого элемента $x \in G$. Для этого докажем сначала, что $(N^x)_{\mathcal{F}} = (N_{\mathcal{F}})^x$. Так как $(N_{\mathcal{F}})^x \in \mathcal{F}$ и $(N_{\mathcal{F}})^x \trianglelefteq N^x$, то $(N_{\mathcal{F}})^x \leq (N^x)_{\mathcal{F}}$. Следовательно, $N_{\mathcal{F}} \leq ((N^x)_{\mathcal{F}})^{x^{-1}} \in \mathcal{F}$. Тогда из определения $\mathcal{F}$ -радикала и того, что $((N^x)_{\mathcal{F}})^{x^{-1}} \trianglelefteq N$ следует равенство $(N^x)_{\mathcal{F}} = (N_{\mathcal{F}})^x$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N^x / (N_{\mathcal{F}})^x &= \{x^{-1}yx(N_{\mathcal{F}})^x \mid y \in N\} = \\ &= \{x^{-1}yN_{\mathcal{F}}x \mid y \in N\} = (N / N_{\mathcal{F}})^x \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Это означает, что $N^x \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ и утверждение 1) доказано.

2) Очевидно, из включения $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ следует $H_{\mathcal{F}} \subseteq H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}$. Тогда по лемме 1.1 выполняется равенство $H_{\mathcal{F}} = H_{\mathcal{F}} \cap H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} = (H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}})_{\mathcal{F}}$. Значит, $H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} / H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ и $H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} / H_{\mathcal{F}} \leq (H / H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}}$.

Пусть $R / H_{\mathcal{F}} = (H / H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}}$. Тогда по лемме 1.1 $R_{\mathcal{F}} = R \cap H_{\mathcal{F}} = H_{\mathcal{F}}$. Следовательно, $R / R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ и $R \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Значит, $(H / H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} \leq H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} / H_{\mathcal{F}}$ и $(H / H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} = H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} / H_{\mathcal{F}}$.

3) Пусть $H \leq G$. Используя определение 2.2, теорему об изоморфизмах факторгрупп и утверждение 2) настоящей леммы, мы получаем следующие эквивалентные утверждения:

- (1) $H \in (\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1) \circ \mathfrak{X}_2$;
- (2) $H / H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_2$;
- (3) $(H / H_{\mathcal{F}}) / (H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1} / H_{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{X}_2$;

$$(4) (H / H_{\mathcal{F}}) / (H / H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_2;$$

$$(5) H / H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2;$$

$$(6) H \in \mathcal{F} \circ (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2).$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем использовать также следующие свойства произведения множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга.

Лемма 2.4. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ – множества Фиттинга группы G . Тогда:

1) если $\mathfrak{X}$ является одновременно классом Фиттинга и гомоморфом, то из включения $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ следует $\mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$;

2) если $\mathfrak{X}$ – формация Фиттинга, то $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathfrak{X} = \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$;

3) если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – классы Фиттинга, то $\mathcal{F} \circ (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2) = \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1 \cap \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_2$.

Доказательство. 1) Пусть $H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X}$. Тогда $H / H_{\mathcal{F}_1} \in \mathfrak{X}$. Из того, что $\mathfrak{X}$ является гомоморфом, следует

$$H / H_{\mathcal{F}_2} \cong H / H_{\mathcal{F}_1} / H_{\mathcal{F}_2} / H_{\mathcal{F}_1} \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $H \in \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$ и $\mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$.

2) Очевидно, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_i$ для $i \in \{1, 2\}$.

Следовательно, по утверждению 1)

$$(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}.$$

Покажем справедливость обратного включения. Пусть $H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$. Тогда $H / H_{\mathcal{F}_i} \in \mathfrak{X}$ для $i \in \{1, 2\}$. Так как $\mathfrak{X}$ является формацией, то

$$H / (H_{\mathcal{F}_1} \cap H_{\mathcal{F}_2}) \in \mathfrak{X} \text{ и } H / H_{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $H \in (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathfrak{X}$. Утверждение 2) доказано.

3) Справедливость данного утверждения вытекает непосредственно из определения 2.2. Лемма доказана.

Определение 2.5. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G назовем *локальным*, если

$$\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'},$$

для некоторой H -функции f группы G . В данном случае f назовем H -функцией $\mathcal{F}$.

Приведем несколько примеров локальных множеств Фиттинга.

Примеры. 1. Пусть G – произвольная группа и H -функция f группы G такова, что $f(p) = \{1\}$ для всех простых p . Тогда

$$\begin{aligned} \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} &= \bigcap_p \{1\} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \\ &= \{1\} \circ \bigcap_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \{1\} \circ \mathfrak{N} = \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Множество Фиттинга $\mathcal{N}$, состоящее из всех нильпотентных подгрупп группы G , является локальным множеством Фиттинга.

2. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $f(p) = \mathcal{F}$ для всех простых p . Тогда множество Фиттинга

$$\mathcal{F} \circ \mathfrak{N} = \mathcal{F} \circ \bigcap_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'},$$

состоящее из тех подгрупп группы G фактор-группы по $\mathcal{F}$ -радикалам которых нильпотентны, является локальным.

В работе [12] доказано, что каждый локальный класс Фиттинга определяется полной внутренней функцией Хартли. В связи с этим представляет интерес поиск аналога указанного выше результата для множества Фиттинга группы G . По аналогии с [12] введем следующее

Определение 2.6. Пусть f – H -функция, определяющая множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G . Тогда f назовем:

1) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для каждого простого p ;

2) *полной*, если $f(p) \circ \mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех простых p .

Лемма 2.7. Каждое локальное множество Фиттинга группы G определяется полной внутренней H -функцией.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$

для некоторой H -функции f . Определим H -функцию φ следующим образом: $\varphi(p) = f(p) \cap \mathcal{F}$.

Ввиду леммы 2.4, имеем

$$\begin{aligned} \bigcap_p \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} &= \bigcap_p \left(f(p) \cap \mathcal{F} \right) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \\ &= \bigcap_p \left(f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \cap \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) = \\ &= \left(\bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) \cap \left(\bigcap_p \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) = \\ &= \mathcal{F} \cap \left(\bigcap_p \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\psi(p) = \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Очевидно, что ψ – полная H -функция, определяющая множество Фиттинга $\mathcal{F}$. Покажем, что ψ является внутренней H -функцией. Пусть $H \leq G$ и $H \in \psi(p) = \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Тогда $H \in \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$. Пусть q – некоторое простое число, отличное от p . Тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{q'}$ и, следовательно,

$$H^{\mathfrak{E}_{q'}} \subseteq H^{\mathfrak{N}_p} \in \varphi(p) \subseteq \mathcal{F}.$$

Значит, $(H^{\mathfrak{E}_{q'}})^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Используя лемму 1.4, получаем $(H^{\mathfrak{E}_{q'}})^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} = H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'} \mathfrak{E}_{q'}} = H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Тогда

$$H / H_{\varphi(q)} \cong H / H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} / H_{\varphi(q)} / H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}.$$

Итак, мы показали, что $H \in \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ для всех простых p . Следовательно, $H \in \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Известно [12, лемма 2], что каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера. Мы установим справедливость аналогичного утверждения и для теории множеств Фиттинга.

Определение 2.8 [7, с. 554]. Множество Фиттинга группы G называется *множеством Фишера*, если из того, что $L \leq G$, $K \trianglelefteq L \in \mathcal{F}$ и H/K – p -подгруппа L/K (p – простое число), всегда следует $H \in \mathcal{F}$.

Теорема 2.9. Каждое локальное множество Фиттинга группы G является множеством Фишера G .

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – локальное множество Фиттинга группы G и $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$.

Покажем, что произведение $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фишера G для произвольного простого p .

Пусть $L \leq G$, $K \trianglelefteq L \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ и H/K – q -подгруппа L/K . Рассмотрим два случая:

1. $q \neq p$. В этом случае $H/K \in \mathfrak{E}_{p'}$. Из того, что $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фиттинга, следует $K \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$. Значит,

$$H \in (f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \circ \mathfrak{E}_{p'} = f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}.$$

2. $q = p$. Пусть $P \in \text{Syl}_p(H)$. Заметим, что $L / L_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, $P \leq L_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p}$.

Тогда $[K, P] \leq K \cap L_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} = K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p}$. Значит, $K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P \leq KP = H$. Ввиду того, что

$$K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p,$$

имеем $K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = f(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Так как $K / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$, то

$$H / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P = KP / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P =$$

$$= KK_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P \cong$$

$$\cong K / K \cap K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P = K / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} (K \cap P) \in \mathfrak{E}_{p'}.$$

Значит, $H \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$.

Итак, мы показали, что для любого простого p множество Фиттинга $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фишера. Следовательно, $\mathcal{F}$ является множеством Фишера. Теорема доказана.

3 Перестановочные множества Фиттинга

Напомним, что класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называют перестановочным, если $\mathcal{F}$ -инъектор каждой разрешимой группы G является системно перестановочной подгруппой в G . В работе [13] Локеттом был получен ряд результатов о перестановочных разрешимых классах Фиттинга. А именно, было доказано, что любой класс Фишера является перестановочным [13, теорема 4.5], а также был получен критерий перестановочности классов Фиттинга [13, теорема 4.14].

В настоящем разделе мы расширяем указанные результаты на случай перестановочного π -насыщенного множества Фиттинга π -разрешимой группы G . Заметим, что существование и сопряженность $\mathcal{F}$ -инъекторов для π -насыщенного множества Фиттинга π -разрешимой группы G легко получить, следуя доказательству теоремы 2.3 [2].

Пусть Σ – холловская система π -разрешимой группы G . Подгруппа A называется Σ -перестановочной, если A перестановочна со всякой подгруппой из Σ . Если подгруппа A перестановочна с подгруппами из холловской системы группы G , то она называется *системно перестановочной*. Через $A \perp \Sigma$ обозначим Σ -перестановочность подгруппы A .

Определение 3.1. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G назовем *перестановочным*, если $\mathcal{F}$ -инъектор каждой подгруппы H группы G является системно перестановочной подгруппой в H .

Определение 3.2. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G назовем *π -насыщенным*, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$.

Лемма 3.3 [2]. Пусть G – π -разрешимая группа и $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G . Пусть N такая подгруппа группы G , что G/N является π' -группой или нильпотентной π -группой. Если W является $\mathcal{F}$ -максимальной подгруппой группы N и V_1, V_2 такие $\mathcal{F}$ -максимальные подгруппы G , что $W \leq V_1 \cap V_2$. Тогда V_1 и V_2 сопряжены в G .

В леммах 3.4–3.6 мы изучаем свойства $\mathcal{F}$ -инъекторов π -разрешимой группы G для π -насыщенного множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G , которые мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 3.4. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G , $N \leq G$ и G/N является π' -группой или нильпотентной группой. Если максимальная $\mathcal{F}$ -подгруппа V группы G содержит $\mathcal{F}$ -инъектор W группы N , то V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G .

Доказательство. Пусть V_1 – такой $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , что $W = V_1 \cap N = V \cap N$. Тогда из включения $W \leq V_1 \cap V$ и леммы 3.3 следует, что V_1 и V сопряжены в G . Значит, V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G . Лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$ такой ряд группы G , что каждый фактор G_{i+1}/G_i , $i \in \{0, \dots, n-1\}$ является π' -группой или нильпотентной группой. V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G тогда и только тогда, когда $G_i \cap V$ является

$\mathcal{F}$ -максимальной подгруппой группы G_i для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Необходимость вытекает непосредственно из определения $\mathcal{F}$ -инъектора группы G . Достаточность докажем методом математической индукции по числу n . Если $n = 0$, то утверждение очевидно. Если $n \geq 1$, то по предположению индукции $G_{n-1} \cap V$ – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G_{n-1} . Тогда по лемме 3.4 $G_n \cap V = G \cap V = V$ – $\mathcal{F}$ -инъектор группы $G_n = G$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G . Если $V \leq H \leq G$, то V также является $\mathcal{F}$ -инъектором группы H .

Доказательство. Пусть

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

– ряд удовлетворяющий условиям леммы 3.5. Рассмотрим ряд $\{1\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n = H$, определенный следующим образом: $H_i = H \cap G_i$, для $i \in \{0, \dots, n\}$. Так как

$$\begin{aligned} H_{i+1}/H_i &= G_{i+1} \cap H / G_i \cap H = \\ &= G_{i+1} \cap H / G_i \cap G_{i+1} \cap H = \\ &= (G_{i+1} \cap H)G_i / G_i \leq G_{i+1} / G_i \end{aligned}$$

и классы всех π' -групп и всех нильпотентных групп замкнуты относительно подгрупп, то ряд $(H_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ удовлетворяет требованиям леммы 3.5. Кроме того, $H_i \cap V = H \cap G_i \cap V = G_i \cap V$ – $\mathcal{F}$ -максимальная подгруппа группы G_i для всех $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $H_i \cap V$ – $\mathcal{F}$ -максимальная подгруппа группы H_i для всех $i = 1, \dots, n$ и по лемме 3.5 V является $\mathcal{F}$ -инъектором группы H . Лемма доказана.

Определение 3.7 [7, определение 1.6.1]. Пусть G – группа и $U \leq G$. Тогда U называют *пронормальной* в G (обозначают $U \text{ pr } G$) если подгруппы U и U^g сопряжены в $\langle U, U^g \rangle$ для всех элементов $g \in G$.

Лемма 3.8. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда каждый $\mathcal{F}$ -инъектор V группы N является *пронормальной подгруппой* в G .

Доказательство. Для любого элемента V и V^g – $\mathcal{F}$ -инъекторы группы N . Следовательно, по лемме 3.6 они являются $\mathcal{F}$ -инъекторами в $\langle V, V^g \rangle$. Значит, V и V^g сопряжены в $\langle V, V^g \rangle$ и V является *пронормальной подгруппой* в G . Лемма доказана.

Свойства перестановочных подгрупп, которые мы будем в дальнейшем использовать, представляют следующие леммы.

Лемма 3.9. Если Σ – холловская система π -разрешимой группы G и A – Σ -перестановочная подгруппа группы G , то $\Sigma \searrow A$.

Доказательство. Пусть ρ и σ такие множества простых чисел, для которых в G существуют холловские подгруппы, принадлежащие Σ .

Пусть $G_\rho \in \Sigma$. Тогда учитывая $A \perp \Sigma$, получаем $A \perp G_\rho$. Так как AG_ρ является подгруппой и $A \cap G_\rho$ – ρ -группой, то $|A : A \cap G_\rho| = |AG_\rho : G_\rho|$ является ρ' -числом. Следовательно, $A \cap G_\rho \in \text{Hall}_\rho(A)$.

Если $G_\sigma \in \Sigma$, то $G_\rho G_\sigma = G_{\rho \cup \sigma}$. Тогда

$$(A \cap G_\rho)(A \cap G_\sigma) = A_\rho A_\sigma \subseteq G_{\rho \cup \sigma} \cap A \subseteq A_{\rho \cup \sigma},$$

где $A_{\rho \cup \sigma}$ – некоторая холловская $(\rho \cup \sigma)$ -подгруппа в A . Но $|A_\rho A_\sigma| = |A_{\rho \cup \sigma}|$ и поэтому $A_\rho A_\sigma = A_{\rho \cup \sigma} \leq A$. Значит, $A_\rho \perp A_\sigma$. Таким образом, $\Sigma \cap A$ будет холловской системой подгруппы A . Лемма доказана.

Лемма 3.10. Всякая нормально погруженная π -подгруппа π -разрешимой группы системно перестановочна.

Доказательство. Пусть H – нормально погруженная π -подгруппа π -разрешимой группы G и Σ – холловская система группы G , которая редуцируется в H . Пусть $p \in \pi$ и $G_p \in \Sigma$.

Докажем, что $HG_{p'}$ является подгруппой в G . Пусть $H_p \in \text{Syl}_p(H)$ и $K = \langle H_p^G \rangle$. Тогда по утверждению I.7.2(a) [7] $H_p \in \text{Syl}_p(K)$ и по лемме I.3.2(c) [7] $K_{p'} = K \cap G_{p'} \in \text{Hall}_{p'}(K)$. Учитывая $G_{p'} \in \Sigma$ и $\Sigma \searrow H$, получаем

$$H_{p'} = H \cap G_{p'} \in \text{Hall}_{p'}(H)$$

и, значит, $H_{p'} \subseteq G_{p'}$. Отсюда из $K = H_p K_{p'}$ и $K_{p'} \subseteq G_{p'}$ следует

$$KG_{p'} = H_p KG_{p'} = H_p H_{p'} K_{p'} G_{p'} = HG_{p'}.$$

Но $KG_{p'} \leq G$ и поэтому $HG_{p'} \leq G$.

Пусть ρ – такое множество простых чисел, что $\rho' \subseteq \rho$ и $G_\rho \in \Sigma$. Тогда $\rho' \subseteq \pi$ и ввиду лемм 3.9 и 1.6 имеем $\Sigma \searrow (\bigcap_{p \in \rho'} G_{p'})$. Следовательно, $G_\rho = \bigcap_{p \in \rho'} G_{p'}$ и $\bigcap_{p \in \rho'} HG_{p'} = H(\bigcap_{p \in \rho'} G_{p'}) = HG_\rho$.

Пусть ρ – такое множество простых чисел, что $\rho \subseteq \pi$ и $G_\rho \in \Sigma$. Тогда, учитывая леммы 3.9 и 1.6 получаем $\Sigma \searrow (\bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (G_{p'} \cap G_\pi))$, причем $G_\pi \in \Sigma$ и $G_{p'} \in \Sigma$ для всех $p \in \rho' \cap \pi$. Следовательно, $G_\rho = \bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (G_{p'} \cap G_\pi)$. Так как H – π -подгруппа и $G_\pi \in \Sigma \searrow H$, то $H = H \cap G_\pi \subseteq G_\pi$. Значит, $\bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (HG_{p'} \cap HG_\pi) = H(\bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (G_{p'} \cap G_\pi)) = HG_\rho$.

Таким образом, H перестановочна со всякой подгруппой $G_p \in \Sigma$. Лемма доказана.

Лемма 3.11. Всякая π -нормально погруженная π -связная подгруппа π -разрешимой группы системно перестановочна.

Доказательство. Пусть H – π -нормально погруженная π -связная подгруппа π -разрешимой группы G и Σ – холловская система группы G , которая редуцируется в H . Так как H – π -нормально погружена, то H_π – нормально погружена и по лемме 3.10 H_π является Σ -перестановочной.

Из π -связности подгруппы H следует, что либо H является π -группой либо, либо содержит холловскую π' -подгруппу из G .

Если порядок группы H является π -числом, то $H = H_\pi$ и H – Σ -перестановочна.

Пусть $S \in \text{Hall}_{\pi'}(G)$ и $S \subseteq H$. Тогда $S \in \text{Hall}_{\pi'}(H)$. Если $G_\pi \in \Sigma$, то

$$G_\pi \cap H \in \text{Hall}_{\pi'}(H).$$

Следовательно, $|G_\pi \cap H| = |S| = |G_\pi|$ и поэтому $G_\pi \cap H = G_\pi$. Значит, $G_\pi \subseteq H$. Так как $(|H : H_\pi|, |H : G_\pi|) = 1$, то $H = H_\pi G_\pi$. Пусть $M \in \Sigma$.

Теперь из $H = H_\pi G_\pi$, $G_\pi \in \Sigma$ и $H_\pi \perp S$ получаем $HM = H_\pi G_\pi M = H_\pi M G_\pi = M H_\pi G_\pi = MH$.

Таким образом, H – Σ -перестановочна. Лемма доказана.

Лемма 3.12. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Если $G = LN$, где $L \in \mathcal{F}$ и $L \cap N$ является $\mathcal{F}$ -инъектором N , то L – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G .

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции по порядку группы G . Заметим, что лемма верна при $N = G$, в частности, при $G = 1$. Пусть M – такая максимальная нормальная подгруппа G , что $N \leq M$. Тогда $M = M \cap LN = (M \cap L)N$ и $(M \cap L) \cap N = L \cap N$ является $\mathcal{F}$ -инъектором в M .

Покажем, что L – $\mathcal{F}$ -максимальна в G . Предположим, что $L \leq W \in \mathcal{F}$. Следовательно, $L \cap N \leq W \cap N \in \mathcal{F}$. Тогда, в силу $\mathcal{F}$ -максимальности $L \cap N$ в N получаем $W \cap N = L \cap N$. Значит, $W = W \cap LN = L(W \cap N) = L(L \cap N) = L$.

Итак, L – $\mathcal{F}$ -максимальна в G и по лемме 3.4 L – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G . Лемма доказана.

Лемма 3.13. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) множество

$$\mathcal{F}_{G/N} = \{SN / N \mid S - \mathcal{F} \text{-инъектор } SN\}$$

является множеством Фиттинга группы G / N ;

2) если V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то VN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -инъектор группы G/N .

Доказательство. 1) Пусть $K/N \trianglelefteq SN/N$, где S – $\mathcal{F}$ -инъектор SN . Так как $K \trianglelefteq SN$, то по лемме 1.2 $S \cap K \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(K)$. Тогда $K = SN \cap K = (S \cap K)N$ и $K/N = (S \cap K)N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$.

Пусть $S_i N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$, где $S_i \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(S_i N)$ и $S_i N \trianglelefteq (S_1 N)(S_2 N)$ для $i \in \{1, 2\}$. Пусть $T = (S_1 N)(S_2 N)$, $W \trianglelefteq \text{Inj}_{\mathcal{F}}(T)$ и $R_i = W \cap S_i N$. Из $S_i N \trianglelefteq T$ следует $R_i \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(S_i N)$. Тогда R_i и S_i сопряжены. Следовательно, $R_i N = S_i N$ и $T = (S_1 N)(S_2 N) = (R_1 N)(R_2 N) = R_1 R_2 N \leq WN \leq T$.

Значит, $T/N = WN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$.

По утверждению VIII.2.4. (a) [7] $\mathcal{F}^g = \mathcal{F}$ для $g \in G$. Если $S \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$, то $S^g \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(S^g N)$ и, следовательно, $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет всем требованиям определения множества Фиттинга.

2) Пусть R – $\mathcal{F}$ -инъектор подгруппы N . Сначала докажем, что если $R \leq F$ – $\mathcal{F}$ -максимальна в G , то FN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в G/N .

Пусть $R \leq F$ – $\mathcal{F}$ -максимальна в G . Так как $R \leq F \cap N \trianglelefteq F \in \mathcal{F}$ и R – $\mathcal{F}$ -инъектор подгруппы N , то $R = F \cap N$. Тогда по лемме 3.12 $F \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(FN)$ и, значит, $FN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Предположим $FN/N \subsetneq SN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$, где $S \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$. Следовательно, из $R = F \cap N \subseteq S \cap N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$ и R – $\mathcal{F}$ -инъектор подгруппы N имеем $R = S \cap N$. Теперь $F/R \cong FN/N \subseteq SN/N \cong S/R$ и $F \subseteq S \in \mathcal{F}$. Значит, $F = S$ и FN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в G/N .

Пусть теперь V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G и K/N – произвольная субнормальная подгруппа в G/N . По лемме 1.2 $V \cap K$ – $\mathcal{F}$ -инъектор группы K и $V \cap N$ – $\mathcal{F}$ -инъектор группы N . Тогда из $V \cap N \leq V \cap K$ – $\mathcal{F}$ -максимальна в K , то $(V \cap K)N/N$ – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в G/N . Но $(V \cap K)N = K \cap V N$ и $(V \cap K)N/N = K/N \cap V N/N$.

Таким образом, $K/N \cap V N/N$ – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в K/N . Это означает, что $V N/N$ является $\mathcal{F}_{G/N}$ -инъектором группы G/N . Лемма доказана.

Лемма 3.14. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фишера группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда множество Фиттинга $\mathcal{F}_{G/N}$ является множеством Фишера группы G/N .

Доказательство. Пусть

$$K/N \leq H/N \leq SN/N \in \mathcal{F}_{G/N},$$

где $K/N \trianglelefteq SN/N$, $S \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$. Пусть $H/N/K/N \cong H/K$ является нильпотентной

подгруппой из $SN/N/K/N \cong SN/K$. Покажем, что $H/N \in \mathcal{F}_{G/N}$.

Так как $NS = KS$, то $H = H \cap NS = H \cap KS = (H \cap S)K$. Тогда

$$H/K = (H \cap S)K/K \cong H \cap S/K \cap S$$

и $SN/K \cong SK/K \cong S/K \cap S$.

Следовательно, $H \cap S/K \cap S$ – нильпотентная подгруппа из $S/K \cap S$. Так как $S \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ является множеством Фишера группы G , то $H \cap S \in \mathcal{F}$. Из того, что $(H \cap S) \cap N = S \cap N \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(N)$, по лемме 3.12 подгруппа $H \cap S$ – $\mathcal{F}$ -инъектор группы $(H \cap S)N$. Значит, $(H \cap S)N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Тогда, ввиду равенства $(H \cap S)N = H \cap SN = H$, получаем $H/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Итак, $\mathcal{F}_{G/N}$ является множеством Фишера группы G/N . Лемма доказана.

Лемма 3.15. Пусть G – π -разрешимая группа, $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фишера группы G . Тогда $\mathcal{F}$ -инъекторы группы G π -нормально погружены.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фишера π -разрешимой группы G наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется.

Пусть $V \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$. Тогда по утверждению I.7.2.(a) [7] существует простое число p из π такое, что $P \in \text{Syl}_p(V)$ и $P \notin \text{Syl}_p(K)$, где $K = \langle P^G \rangle$.

Пусть $1 \neq N \trianglelefteq G$. Так как $|VN/N : PN/N|$ является p' -числом, то $PN/N \in \text{Syl}_p(VN/N)$. По лемме 3.14 и лемме 3.13 VN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -инъектор в G/N и по индукции VN/N π -нормально погружен в G/N . Следовательно, по утверждению I.7.2.(a) [7] $PN/N \in \text{Syl}_p(<(PN/N)^{G/N}>)$. Учитывая равенство $<(PN/N)^{G/N}> = \langle P^G \rangle N/N$, получаем $PN/N \in \text{Syl}_p(KN/N)$.

Покажем, что выполнение любого из двух условий $N = O_{p'}(G)$ или $N = (O_p(G))_{\mathcal{F}}$ ведет к противоречию.

Если $N = O_{p'}(G)$, то из $PN/N \in \text{Syl}_p(KN/N)$ и равенства $|KN/N : PN/N| = |K : P|/|K \cap N : P \cap N|$ вытекает $P \in \text{Syl}_p(K)$. Получили противоречие. Значит, $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $N = (O_p(G))_{\mathcal{F}}$. Если $P \subseteq K_p \in \text{Syl}_p(K)$, то из $PN/N \in \text{Syl}_p(KN/N)$ следует $PN/N = K_p N/N$. Тогда $PN = K_p N$ и $K_p = K_p \cap PN = P(K_p \cap N)$. Так как N – p -подгруппа, то $K_p \cap N = K \cap N$ и $K_p = P(K \cap N)$. Заметим, что

каждый $\mathcal{F}$ -инъектор из $O_p(G)$ является субнормальной подгруппой и поэтому совпадает с $(O_p(G))_{\mathcal{F}}$. Теперь по лемме 1.2 $V \cap N \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(N)$. Но $N \in \mathcal{F}$ и поэтому $N \subseteq V$. Следовательно, $K \cap N$ – p -подгруппа из V и $P(K \cap N) = P$. Тогда $P = K_p \in \text{Syl}_p(K)$. Полученное противоречие показывает, что $(O_p(G))_{\mathcal{F}} = 1$.

Так как $\mathcal{F}$ – множество Фишера и P является нильпотентной p -группой, то $P \in \mathcal{F}$. Но тогда $P \cap O_p(G)$ – субнормальная $\mathcal{F}$ -подгруппа в P . Кроме того, $P \cap O_p(G)$ – субнормальная подгруппа в $O_p(G)$ и, значит,

$$P \cap O_p(G) = (P \cap O_p(G))_{\mathcal{F}} \leq (O_p(G))_{\mathcal{F}} = 1.$$

Теперь из $P \in \mathcal{F}$ и $P \cap O_p(G) = 1$ по лемме 3.12 следует $P \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(PO_p(G))$. Так как P является субнормальной подгруппой в $PO_p(G) \in \mathfrak{R}$, то $P = (PO_p(G))_{\mathcal{F}} \trianglelefteq PO_p(G)$. Тогда $PO_p(G) = P \times O_p(G)$ и $[P, O_p(G)] \leq P \cap O_p(G) = 1$. Следовательно, $P \leq C_G(O_p(G))$. По лемме 1 [9] $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ и $P = P \cap C_G(O_p(G)) \subseteq P \cap O_p(G) = 1$.

Таким образом, $P = 1$ и $K = 1$. Получили противоречие с $P \notin \text{Syl}_p(K)$. Лемма доказана.

Теорема 3.16. *Всякое π -насыщенное множество Фишера $\mathcal{F}$ π -разрешимой группы G является перестановочным.*

Доказательство. По лемме 3.15 все $\mathcal{F}$ -инъекторы из G являются π -нормально погруженными π -связными подгруппами. Кроме того, по лемме 3.11 множество Фиттинга $\mathcal{F}$ является перестановочным. Теорема доказана.

Лемма 3.17. *Пусть G – π -разрешимая группа и ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$. Если $G = G_1 G_2$, то существуют также холловские ρ -подгруппы H , H_1 и H_2 соответственно в группах G , G_1 и G_2 , что $H = H_1 H_2$.*

Доказательство. Пусть R , R_1 и R_2 – холловские ρ -подгруппы соответственно в G , G_1 и G_2 . По теореме Чунихина [14] $R_i^{x_i} \subseteq R$ для некоторого $x_i \in G$, $i \in \{1, 2\}$. По лемме III.11.5 [15] существует такой элемент $z \in G$, что $G_i^{x_i z} = G_i$, $i \in \{1, 2\}$. Положим $R_i^{x_i z} = H_i$, $R^z = H$. Тогда H , H_1 и H_2 – холловские ρ -подгруппы соответственно в G , G_1 и G_2 , причем $H_i = R_i^{x_i z} \subseteq R^z = H$. Установим теперь справедливость равенства $H = H_1 H_2$.

Пусть $|H| = a$, $|H_i| = a_i$, $|G| = an$, $|G_i| = a_i n_i$. Следовательно,

$$|G_1 \cap G_2| = \frac{|G_1||G_2|}{|G_1 G_2|} = \frac{a_1 a_2 n_1 n_2}{an}.$$

Но a , a_1 , a_2 – ρ -числа и n , n_1 , n_2 – ρ' -числа. Тогда a делит $a_1 a_2$ и n делит $n_1 n_2$. Следовательно, $|G_1 \cap G_2| = a' n'$, где $a' = a_1 a_2 / a$ и $n' = n_1 n_2 / n$.

Так как $H_1 \cap H_2 \subseteq G_1 \cap G_2$, то $|H_1 \cap H_2|$ делит a' . Поэтому

$$|H_1 H_2| = \frac{a_1 a_2}{|H_1 \cap H_2|} \geq \frac{a_1 a_2}{a'} = a = |H|.$$

Тогда из $H_1 H_2 \subseteq H$ следует $H_1 H_2 = H$. Лемма доказана.

Лемма 3.18. *Пусть A – подгруппа π -разрешимой группы G и $K \trianglelefteq G$, причем $G = AK$. Если ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$, $G/K \in \mathfrak{E}_{\rho}$ и $A_p \in \text{Hall}_{\rho}(A)$, то $G = A_p K$.*

Доказательство. Ввиду изоморфизма $AK/K \cong A/A \cap K$, получаем, что $|A : A \cap K|$ является ρ -числом. Тогда $(|A : A \cap K|, |A : A_p|) = 1$ и по лемме A.1.6.(b) [7] $A = A_p(A \cap K)$. Таким образом, $G = AK = A_p(A \cap K)K = A_p K$. Лемма доказана.

Лемма 3.19. *Пусть Σ – холловская система π -разрешимой группы G , и ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho = \{p\}$ для $p \in \pi$, либо $\rho = \pi'$, и $G_p, G_{p'} \in \Sigma$. Тогда $G_p \cap N_G(G_{p'})$ – ρ -холловская подгруппа в $N_G(G_{p'})$ и $N_G(\Sigma)$.*

Доказательство. Пусть $N = N_G(G_{p'})$. Так как $G = G_p G_{p'} = G_p N$, то $|N : N \cap G_p| = |NG_p : G_p| = |G : G_p|$ – ρ' -число. Следовательно, $N \cap G_p$ – холловская ρ -подгруппа в N . Пусть $\mathfrak{K}$ – дополняющая система группы G такая, что $\mathfrak{K} \subseteq \Sigma$. Если $S \in \mathfrak{K} \setminus \{G_{p'}\}$, то $N \cap G_p \leq G_p \leq S \leq N_G(S)$. Значит, $N \cap G_p \leq N_G(S)$ для всех подгрупп S из $\mathfrak{K}$. Тогда $N \cap G_p \leq N_G(\mathfrak{K}) = N_G(\Sigma) \leq N$. Отсюда $N \cap G_p$ – холловская ρ -подгруппа в $N_G(\Sigma)$. Лемма доказана.

Лемма 3.20. *Пусть Σ – холловская система π -разрешимой группы G . Если Σ редуцируется в пронормальную π -связную подгруппу H , то $N_G(\Sigma)$ нормализует подгруппу H и $\Sigma \setminus N_G(H)$.*

Доказательство. Обозначим $D = N_G(\Sigma)$. Если $d \in D$, то $\Sigma = \Sigma^d$ и $\Sigma^d \setminus H^d$. Следовательно, по лемме 1.5 $H = H^d$ и $D \subseteq N_G(H)$.

Пусть $\Sigma \setminus (N_G(H))^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Тогда $H^g \trianglelefteq N_G(H^d) = (N_G(H))^g$ и

поэтому $\Sigma \searrow H^g$. По лемме 1.5 $H = H^g$. Следовательно, $\Sigma \searrow N_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 3.21. Пусть U – π -связная, системно перестановочная, пронормальная подгруппа π -разрешимой группы G . Если холловская система Σ группы G редуцируется в U , то подгруппа U является Σ -перестановочной в G .

Доказательство. Пусть Σ_0 – холловская система группы G такая, что $U \perp \Sigma_0$. Так как любые две холловские системы группы G сопряжены [8], то $\Sigma = \Sigma_0^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Тогда $U^g \perp \Sigma_0^g$. По условию $\Sigma \searrow U$ и по лемме 3.9 $\Sigma_0^g \searrow U^g$. Следовательно, по лемме 1.5 $U = U^g$ и $U \perp \Sigma$. Лемма доказана.

Лемма 3.22. Пусть D, V – подгруппы π -разрешимой группы G . Пусть σ, ω – такие множества простых чисел, что $\sigma \cap \omega = \emptyset$ и либо $\sigma' \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \sigma'$ и либо $\omega' \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \omega'$. Если $K \trianglelefteq G$, $G_\sigma K \trianglelefteq G$, $G_\omega K \trianglelefteq G$, то выполняется следующее условие: если $D \perp V \cap G_\sigma K$ и $D \perp V \cap G_\omega K$, то $D(V \cap G_\sigma K) \cap D(V \cap G_\omega K) = D(V \cap G_\sigma K \cap G_\omega K)$.

Доказательство. По лемме IV.15.2 [15] следует $G_\sigma K / K \in \text{Hall}_\sigma(G/K)$ и $G_\omega K / K \in \text{Hall}_\omega(G/K)$. Тогда, учитывая $G/K / G_\sigma K / K \cong G/G_\sigma K$ и $G/K / G_\omega K / K \cong G/G_\omega K$, получаем $G/G_\sigma K \in \mathfrak{F}_\sigma$ и $G/G_\omega K \in \mathfrak{F}_\omega$. Но $\sigma \cap \omega = \emptyset$ и поэтому $(|G : G_\sigma K|, |G : G_\omega K|) = 1$. Следовательно, по лемме A.1.6.(c) [7] $V = (V \cap G_\sigma K)(V \cap G_\omega K)$. Так как $D \perp V \cap G_\sigma K$ и $D \perp V \cap G_\omega K$, то по лемме A.1.6.(c) [7] $V \cap D = (D \cap V \cap G_\sigma K)(D \cap V \cap G_\omega K)$. Значит, справедливо равенство $D \cap (V \cap G_\sigma K)(V \cap G_\omega K) = (D \cap V \cap G_\sigma K)(D \cap V \cap G_\omega K)$. Теперь по лемме A.1.2 [7] получаем $D(V \cap G_\sigma K) \cap D(V \cap G_\omega K) = D(V \cap G_\sigma K \cap G_\omega K)$. Лемма доказана.

Лемма 3.23. Пусть σ – такое множество простых чисел, что либо $\sigma \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \sigma$. Если подгруппа H π -разрешимой группы G перестановочна с G_σ и $K \trianglelefteq G$, то $HK \cap G_\sigma K = (H \cap G_\sigma)K$.

Доказательство. Установим вначале, что $HG_\sigma \cap K = (H \cap K)(G_\sigma \cap K)$. Так как $(|HG_\sigma : G_\sigma|, |HG_\sigma : H|) = 1$, то по лемме A.1.6.(b) [7] $HG_\sigma = H_\sigma \cdot G_\sigma$. Тогда элемент $h \in HG_\sigma$ представим в виде $h = xy$, где $x \in H_\sigma, y \in G_\sigma$. Если $xy \in K$, то $xy \in KG_\sigma$ и поэтому $x \in KG_\sigma$. Выберем холловскую подгруппу $G_{\sigma'}$ такую, что $H_{\sigma'} \subseteq G_{\sigma'}$.

Следовательно, $x \in KG_\sigma \cap H_{\sigma'} \subseteq KG_\sigma \cap KG_{\sigma'}$. По лемме A.1.6.(c) [7] $KG_\sigma \cap KG_{\sigma'} = K(G_\sigma \cap G_{\sigma'}) = K$. Значит, $x \in N$ и поэтому $y \in N$. Отсюда $HG_\sigma \cap K \subseteq (H \cap K)(G_\sigma \cap K)$. Обратное включение очевидно.

Из равенства $HG_\sigma \cap K = (H \cap K)(G_\sigma \cap K)$ по лемме A.1.2 [7] получаем $HK \cap G_\sigma K = (H \cap G_\sigma)K$.

Лемма доказана.

Лемма 3.24. Пусть $\{G_{p_i} \mid p_i \in \mathbb{P}, i \in I\}$ – множество перестановочных холловских подгрупп группы G (I – конечное множество и $|I| \geq 2$).

Тогда $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i}) \perp G_{p_s}$ для любого $s \in I$.

Доказательство. Очевидно, что лемма справедлива для $|I| = 2$. Допустим, что $|I| > 2$ и для $|I|$ лемма верна. Пусть G_{p_k} – холловская подгруппа группы G такая, что $p_k \neq p_i$ и $G_{p_k} \perp G_{p_i}$ для всех $i \in I$.

Пусть $s \in I \cup \{k\}$. Если $s \in I$, то $G_{p_s} \perp G_{p_k}$ и по индукции $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i}) \perp G_{p_s}$. По лемме A.1.6.(c) [7] получаем $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i} \cap G_{p_k}) \perp G_{p_s}$.

С другой стороны, если $s = k$, то возьмем индекс $r \in I$ ($r \neq s$). Следовательно, $G_{p_s} \perp G_{p_r}$ и по индукции $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i}) \perp G_{p_s}$. По лемме A.1.6.(c) [7] $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i} \cap G_{p_r}) \perp G_{p_s}$. Таким образом, лемма верна при $|I| + 1$. Лемма доказана.

Лемма 3.25. Пусть $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга π -разрешимой группы G , V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G и V – π -связная подгруппа, холловская система Σ группы G редуцируется в V и $D = N_G(\Sigma)$. Пусть ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho = \{p\}$, для $p \in \pi$, либо $\rho = \pi'$. Тогда если $K \trianglelefteq G$, $G/K \in \mathfrak{F}_\rho$, холловская ρ' -подгруппа S группы G принадлежит Σ и $V \perp S$, то $(V \cap K) \perp S$ и $V \leq D(V \cap K)$.

Доказательство. Так как S – холловская ρ' -подгруппа в G , то по лемме IV.15.2 [15] SK/K – холловская ρ' -подгруппа в $G/K \in \mathfrak{F}_\rho$. Тогда $S \leq K$ и $S(V \cap K) = SV \cap K \leq G$. Значит, подгруппы $V \cap K$ и S перестановочны. Пусть $G_\rho \in \Sigma$. Следовательно, учитывая $\Sigma \searrow V$, получаем, что $V_\rho = V \cap G_\rho$ является холловской ρ -подгруппой в V . Так как $V \leq SV$, то $V_\rho \leq (SV)_\rho \in \text{Hall}_\rho(SV)$ и по лемме 3.17 $V_\rho \in \text{Hall}_\rho(SV)$.

Пусть $P = V_p \cap N_{SV}(S)$. Покажем, что $P \in \text{Hall}_p(N_{SV}(S))$. Так как $S \perp \Sigma$, то по лемме 3.9 $\Sigma \searrow S$ и по лемме 1.7 $\Sigma \searrow SV$. Кроме того, $S = S \cap SV \in \Sigma_{SV}$, где Σ_{SV} – холловская система подгруппы SV . Следовательно, $S \perp \Sigma_{SV}$ и по лемме 3.9 $\Sigma_{SV} \searrow S$. Но $S \text{ пр } G$ и тогда ввиду леммы 1.6.3.(a) [7] $S \text{ пр } SV$. Значит, учитывая лемму 3.20, $\Sigma_{SV} \searrow N_{SV}(S)$. Так как $V_p \subseteq G_p \cap SV$ и $V_p \in \text{Hall}_p(SV)$, то $V_p = G_p \cap SV$ и

$$V_p \in \Sigma_{SV} \searrow N_{SV}(S).$$

Следовательно, $P \in \text{Hall}_p(N_{SV}(S))$.

Теперь из $S \leq SV \cap K \trianglelefteq SV$ и $S \text{ пр } SV$ по лемме 1.6.3.(b) [7] следует, что $SV = N_{SV}(S)(SV \cap K)$. Ввиду изоморфизма

$$SV / (SV \cap K) \cong SVK / K$$

и того, что $SVK / K \leq G / K \in \mathfrak{E}_p$, получаем $SVK / K \in \mathfrak{E}_p$. Тогда по лемме 3.18 справедливо равенство $SV = P(SV \cap K)$. Из $P \leq V$ и $P \perp (SV \cap K)$ заключаем

$$\begin{aligned} V &= V \cap SV = V \cap P(SV \cap K) = \\ &= P(V \cap SV \cap K) = P(V \cap K). \end{aligned}$$

Так как $G_p \in \Sigma$ и $S \in \Sigma$, то по лемме 3.19 $G_p \cap N_G(S) \in \text{Hall}_p(D)$. Учитывая $P \leq G_p \cap N_{N_G(S)}(S) \leq D$ и $V = P(V \cap K)$, получаем

$$V \subseteq D(V \cap K).$$

Ввиду лемм 1.6 $\Sigma \searrow V \cap K$ и леммы IX.1.3.(a) [7], получаем $V \cap K \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(K)$. Значит, по лемме 3.8 $V \cap K \text{ пр } G$. Следовательно, учитывая лемму 3.20, $D \leq N_G(V \cap K)$ и $D(V \cap K) \leq G$. Итак, $V \leq D(V \cap K)$. Лемма доказана.

Теорема 3.26. Пусть $\mathcal{F}$ – π -насыщенное множество Фиттинга π -разрешимой группы G , V – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G и V – π -связная подгруппа, причем холловская система Σ группы G редуцируется в V . Пусть $K \trianglelefteq G$ и G/K является π' -группой или нильпотентной π -группой. Тогда если $\mathcal{F}$ – перестановочное множество Фиттинга, то $V \leq D(V \cap K)$.

Доказательство. Обозначим $D = N_G(\Sigma)$. Пусть p – такое множество простых чисел, что либо $p = \{p\}$, для $p \in \pi$, либо $p = \pi'$. Пусть $S \in \Sigma \cap \text{Hall}_p(G)$. Покажем, что $SK \trianglelefteq G$. Так как $G/K \in \mathfrak{N}_\pi \times \mathfrak{E}_\pi$, то $G/K = G_\pi K / K \times G_{\pi'} K / K$, где $G_\pi K / K \in \mathfrak{N}_\pi$. Ввиду $p = \{p\}$ для $p \in \pi$, имеем $G_p = G_{p'} = S$. Заметим, что $G_p \text{ пр } G$ и, следовательно, по лемме 1.6.3.(c) [7] $G_p K \text{ пр } G$.

Ввиду изоморфизмов $G/K / G_\pi K / K \cong G / G_\pi K$ и $G/K / G_{\pi'} K / K \cong G_\pi K / G$, получаем

$$G / G_\pi K \in \mathfrak{N}_\pi.$$

Тогда из $G_\pi \subseteq G_{p'}$ следует $G_{p'} K / G_\pi K \leq G / G_\pi K \in \mathfrak{N}_\pi$. Это означает, что $G_{p'} K$ субнормальна в G . Следовательно, учитывая $G_{p'} K \text{ пр } G$, по лемме 1.6.3.(d) [7] $G_{p'} K \trianglelefteq G$. Если $p = \pi'$, то $p' = \pi$ и $S = G_\pi$. Тогда $SK = G_\pi K \trianglelefteq G$.

Итак, для любой холловской p' -подгруппы S группы G справедливо $SK \trianglelefteq G$.

Аналогично можно показать, что $G_{\sigma'} K \trianglelefteq G$ для любого такого σ' , что $\pi' \subseteq \sigma'$.

Из перестановочности множества Фиттинга $\mathcal{F}$ следует, что V – системно перестановочная подгруппа в G . Тогда ввиду леммы 3.8 $V \text{ пр } G$ и, учитывая $\Sigma \searrow V$, по лемме 3.21 $V \perp \Sigma$ и, значит, $V \perp S$.

Так как по $S \in \text{Hall}_p(G)$, то по лемме IV.15.2 [15] $SK / K \in \text{Hall}_{p'}(G/K)$. Ввиду изоморфизма $G/K / SK / K \cong G / SK$, получаем $G / SK \in \mathfrak{E}_p$. Тогда по лемме 3.25 $V \leq D(V \cap K)$.

Пусть $L = \{G_{p_i} \in \Sigma \mid p_i \in \pi, i \in I\}$. Следовательно,

$$V \leq \bigcap_{i \in I} D(V \cap G_{p_i} K) \cap D(V \cap G_\pi K).$$

Тогда, из $G_{\sigma'} K \trianglelefteq G$, с учетом включения $\pi' \subseteq \sigma'$, и применяя последовательно леммы 3.22, 3.24 и 3.23, получим

$$\bigcap_{i \in I} D(V \cap G_{p_i} K) = D \left(V \cap \left(\bigcap_{i \in I} G_{p_i} \right) K \right).$$

Так как $\bigcap_{i \in I} G_{p_i} = G_{\pi'}$, то

$$V \leq D(V \cap G_\pi K) \cap D(V \cap G_{\pi'} K).$$

Ввиду $G/K \in \mathfrak{N}_\pi \times \mathfrak{E}_{\pi'}$, имеем $G_\pi K \trianglelefteq G$ и $G_{\pi'} K \trianglelefteq G$. Значит, учитывая леммы 3.22 и 3.23, получаем

$$\begin{aligned} D(V \cap G_\pi K) \cap D(V \cap G_{\pi'} K) &= \\ &= D(V \cap G_\pi K \cap G_{\pi'} K) = \\ &= D(V \cap (G_\pi \cap G_{\pi'}) K) = D(V \cap K). \end{aligned}$$

Итак, $V \leq D(V \cap K)$. Теорема доказана.

4 Формула инъектора

Докажем сначала свойство локального π -насыщенного множества Фиттинга $\mathcal{F}$ π -разрешимой группы G , которое будем использовать при доказательстве основного результата.

Лемма 4.1. Пусть локальное π -насыщенное множество Фиттинга $\mathcal{F}$ π -разрешимой группы G определяется полной приведенной локальной

H -функцией F группы G и K – $\mathcal{F}$ -подгруппа G . Если S является p -подгруппой G , то $K \cdot C_S(K / K_{F(p)}) \in \mathcal{F}$. В случае, когда $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}$, выполняется включение $C_S(H / H_{F(p)}) \leq C_S(K / K_{F(p)})$.

Доказательство. Обозначим

$$C = C_S(K / K_{F(p)}).$$

Так как $[C, K] \leq K_{F(p)}$, то $k^{-1}c^{-1}kc \in K_{F(p)}$ для любых элементов $k \in K$ и $c \in C$. Покажем, что $K_{F(p)} \trianglelefteq KC$. Из того, что $c^{-1} \in C_S(K / K_{F(p)})$ следует $(K_{F(p)})^{kc} = c^{-1}k^{-1}K_{F(p)}kc = (k^{-1}K_{F(p)})c^{-1}kc$.

Ввиду нормальности $K_{F(p)}$ в K , получаем

$$(k^{-1}K_{F(p)})c^{-1}kc = K_{F(p)}k^{-1}c^{-1}kc = K_{F(p)}.$$

Следовательно, $(K_{F(p)})^{kc} = K_{F(p)}$ для любых элементов $k \in K$ и $c \in C$. Значит, $K_{F(p)} \trianglelefteq KC$. Кроме того, из $k^{-1}c^{-1}kc \in K_{F(p)}$ следует $k^{-1}ck \in K_{F(p)}C$. Тогда для любого элемента $h \in KC$ выполняется равенство $(K_{F(p)}C)^h = (K_{F(p)})^h(C)^h = K_{F(p)}C$. Значит, $K_{F(p)}C \trianglelefteq KC$.

Так как $K_{F(p)}C \in F(p) \circ \mathfrak{R}_p \subseteq \mathcal{F}$ и K является $\mathcal{F}$ -подгруппой, то $KC = K \cdot K_{F(p)}C \in \mathcal{F}$.

Пусть теперь $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}$. Тогда из включения

$$[K, C_S(H / H_{F(p)})] \leq K \cap [H, C_S(H / H_{F(p)})] \leq K \cap H_{F(p)} = K_{F(p)}$$

непосредственно следует

$$C_S(H / H_{F(p)}) \leq C_S(K / K_{F(p)}).$$

Лемма доказана.

Основной результат работы представляет

Теорема 4.2. Пусть локальное π -насыщенное множество Фиттинга $\mathcal{F}$ π -разрешимой группы G определяется полной приведенной H -функцией F группы G , Σ – холловская система G , $D = N_G(\Sigma)$ и $D_p \in \Sigma \cap D$. Если W – $\mathcal{F}$ -инъектор группы $O^p(G)$, причем $p \in \pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$ и $\Sigma \searrow W$, то подгруппа $Z = W \cdot C_{D_p}(W / W_{F(p)})$ – $\mathcal{F}$ -инъектор G и $\Sigma \searrow Z$.

Доказательство. Легко видеть, что W – π -связная подгруппа. Так как по лемме 3.8 $W \text{ pr } G$ и $\Sigma \searrow W$, то ввиду леммы 3.20 $D \leq N_G(W)$. Если $d \in D$, то $W = W^d$. Из $W_{F(p)} \trianglelefteq W$ следует $(W_{F(p)})^d \trianglelefteq W^d = W$. Так как $F(p)$ – множество Фиттинга группы G , то $(W_{F(p)})^d \in F(p)$. Тогда, из определения $F(p)$ -радикала вытекает $(W_{F(p)})^d \leq W_{F(p)}$ для любого элемента $d \in D$. Значит, $(W_{F(p)})^{d^{-1}} \leq W_{F(p)}$ и $W_{F(p)} = (W_{F(p)})^d$.

Значит, $D \leq N_G(W_{F(p)})$. Отсюда получаем $(wW_{F(p)})^d \in W / W_{F(p)}$ для любого элемента $w \in W$. Следовательно, $D \leq N_G(W / W_{F(p)})$. Обозначим $Y = C_{D_p}(W / W_{F(p)})$. Ввиду леммы 4.1,

$$Z = WY \in \mathcal{F}.$$

Пусть V – $\mathcal{F}$ -максимальная подгруппа в G такая, что $Z \subseteq V$. Так как $p \in \pi$ и $W \subseteq V$, то по лемме 3.4 $V \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$. Следовательно, $\Sigma \searrow V^g$ для некоторого элемента $g \in G$.

Докажем, что $W \trianglelefteq V^g$. Так как по лемме 1.2 $V \cap O^p(G) \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(O^p(G))$ и $W \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(O^p(G))$, то ввиду выбора V , получаем $W = V \cap O^p(G) \trianglelefteq V$. Но тогда из $W^g \trianglelefteq V^g$ и $\Sigma \searrow V^g$ вытекает, что $\Sigma \searrow W^g$. Следовательно, учитывая $\Sigma \searrow W$ и $W \text{ pr } G$, по лемме 1.5 $W = W^g$ и поэтому $W \trianglelefteq V^g$.

Покажем $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$. По лемме 1.3 $V^g \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$. Тогда ввиду леммы 4.1, $V^g \cdot C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \in \mathcal{F}$. Так как V^g – $\mathcal{F}$ -инъектор группы G , то $V^g \cdot C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) = V^g$ и $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$.

Установим, что $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq Y$. Рассмотрим группу V^g . Из леммы 4.1, ввиду $W \trianglelefteq V^g$, вытекает, что $C_{D_p \cap V^g}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq C_{D_p \cap V^g}(W^g / W_{F(p)}^g)$. Так как $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$, то $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq C_{D_p \cap V^g}(V^g / V_{F(p)}^g)$. Тогда, учитывая $C_{D_p \cap V^g}(W^g / W_{F(p)}^g) \leq Y$, имеем

$$C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq Y.$$

Проверим, что $V^g \cap D_p = C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$.

Учитывая изоморфизм

$$(V^g \cap D_p)V_{F(p)}^g / V_{F(p)}^g \cong V^g \cap D_p / V^g \cap D_p \cap V_{F(p)}^g,$$

$$a = |V^g \cap D_p : V_{F(p)}^g \cap D_p| = |(V^g \cap D_p)V_{F(p)}^g : V_{F(p)}^g|.$$

Очевидно, что a является p -числом. Кроме того, выполняется равенство

$$a = \frac{|V^g \cap D_p|}{|V_{F(p)}^g \cap D_p|} = \frac{|V^g| |D_p|}{|V^g D_p|} \cdot \frac{|V_{F(p)}^g| |D_p|}{|V_{F(p)}^g D_p|} = \frac{|V^g|}{|V_{F(p)}^g|} \cdot \frac{|V_{F(p)}^g D_p|}{|V^g D_p|}.$$

Следовательно, $a \cdot \frac{|V^g D_p|}{|V_{F(p)}^g D_p|} = \frac{|V^g|}{|V_{F(p)}^g|}$. Так как

$V^g \in \mathcal{F}$ и F является полной локальной H -функцией группы G , то $\frac{|V^g|}{|V_{F(p)}^g|}$ является p' -числом.

Следовательно, $a - p'$ -число и $a = 1$. Значит, $V^g \cap D_p = V_{F(p)}^g \cap D_p$ и, ввиду $V_{F(p)}^g \trianglelefteq V^g$, получаем $V_{F(p)}^g \cap D_p \leq C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$. Тогда $V^g \cap D_p \leq C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$. Так как $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$, то $V^g \cap D_p = C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$.

По теореме 2.9 локальное множество Фиттинга $\mathcal{F}$ является множеством Фишера и, значит, ввиду теоремы 3.16, $\mathcal{F}$ – перестановочное множество Фиттинга. Следовательно, для $\mathcal{F}$ -инъектора V^g группы G выполняются все условия теоремы 3.26 и поэтому $V^g \leq D(V^g \cap O^p(G))$. Учитывая $W = V \cap O^p(G)$ и $W = W^g$, получаем $W = V^g \cap O^p(G)$. Значит, $V^g \leq WD$.

Покажем, что $V^g \leq WD_p$. Так как $W \trianglelefteq V^g \leq N_G(W)$, $W \trianglelefteq N_G(W)$, $D \leq N_G(W)$, то $V^g / W \leq WD / W$. Теперь из $W = V^g \cap O^p(G)$ и $V^g / V^g \cap O^p(G) \cong V^g O^p(G) / O^p(G)$ следует

$$V^g / W \in \mathfrak{N}_p.$$

По лемме 3.17 выполняется

$$\begin{aligned} WD_p / W &= (W_p D_p)W / W = \\ &= (WD)_p W / W \in \text{Syl}_p(WD / W). \end{aligned}$$

Следовательно, $(V^g / W)^{wdW} \leq WD_p / W$ для некоторого элемента $wdW \in WD / W$, где $w \in W$ и $d \in D$. Так как V^g – π -связная группа, $\Sigma \searrow V^g$, и, ввиду леммы 3.8, $V^g \text{ pr } G$, то по лемме 3.20 $D \leq N_G(V^g)$. Значит,

$$V^g / W = (V^g / W)^{wdW} \leq WD_p / W$$

и поэтому $V^g \leq WD_p$.

Учитывая $V^g \leq WD_p$ и

$$V^g \cap D_p = C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g),$$

получаем

$$V^g \leq V^g \cap WD_p = W(V^g \cap D_p) = W \cdot C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g).$$

Тогда из $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq Y$ следует $V^g \leq WY$.

Ввиду выбора V , получаем $V^g \leq WY \leq V$. Таким образом, $V^g = WY = V$ и $\Sigma \searrow V$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brewster, B. $\mathfrak{F}$ -projectors in finite π -solvable groups / B. Brewster // Arch. Math. – 1972. – Vol. 23, № 1. – P. 133–138.
2. Martinez Verduchi, J.R. On the theory of Fitting classes of finite π -solvable groups / J.R. Martinez Verduchi // Rev. Acad. Cienc. Zaragoza. – 1974. – Т 29, № 3–4. – P. 287–292.
3. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, №2. – P. 193–207.
4. D'arcy, P. Locally defined fitting classes / P. D'arcy // J. Austral. Math. Soc. – 1975. – Vol. 20 (Series A). – P. 25–32.
5. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
6. Загурский, В.Н. Инъекторы локальных классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2010. – № 4 (58). – С. 17–20.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Гольберг, П.А. Холловские θ -базы конечных групп / П.А. Гольберг // Известия высших учебных заведений. – 1961. – № 1 (20). – С. 36–43.
9. Семеновский, В.Г. О пронормальных подгруппах конечных π -разрешимых групп / В.Г. Семеновский // Весн. Віцебс. дзярж. ун-та. – 2002. – № 1. – С. 79–84.
10. Поляков, Л.Я. Нормально погруженные подгруппы конечных групп / Л.Я. Поляков, В.Г. Семеновский // Конечные группы. – Минск : Наука и техника. – 1975. – С. 121–128.
11. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.
12. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
13. Lockett, F.P. On the Theory of Fitting Classes of finite and soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 103–115.
14. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Мн. : Наука и техника, 1964.
15. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 278 с.

Поступила в редакцию 14.09.09.