

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА КОНТАКТА ТЕЛ ИЗ АРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ, МОДЕЛИРУЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН

¹Можаровский В. В., ¹Кузьменков Д. С., ¹Коляскин И. И., ²Василевич Ю. В.

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Решаются контактные задачи применительно к инженерному расчету цилиндрических тел, которые моделируют взаимодействие элементов машин, таких как, например, «колесо – дорога», «железнодорожное колесо – рельс», а также взаимодействие зубьев зубчатых колес и элементов фрикционных передач. Во всех этих случаях, при контактном взаимодействии, возникают сложные граничные условия, которые включают в себя описания элементов качения, скольжения, сцепления, проскальзывания. Нами изучен ряд источников научно-технической информации [2–10], в которой рассмотрена теория контактного взаимодействия изотропных упругих тел, в том числе цилиндрических, но, к сожалению, математический аппарат теории контактного взаимодействия армированных тел с элементами неоднородности разработан недостаточно. Одним из подходов к расчету таких конструкций является метод, базирующийся на основе теории упругости анизотропного тела. В этом случае технические упругие постоянные, характеризующие механические свойства материала определяются из экспериментальных исследований, а затем, используя известный «макроподход» или статистические методы, определяются эффективные модули упругости. Если мы имеем композиционный материал, состоящий из матрицы и армированных элементов – волокон, то тогда нужно найти оптимальный объемный состав волокон такой, чтобы прочность конструкции была достаточная, то есть необходимо создавать математическую модель, где целевой функцией будет прочность с некоторыми ограничениями на объемное содержание и геометрию конструкции.

Известно, что на современном этапе развития расчетных методов, такие сложные конструкции как шина колеса, рассчитываются с помощью различных численных программ, базирующихся на методах конечных элементов. Особенность этих программ состоит в том, что необходимо создавать дискретизацию области, вводить граничные условия, кроме того, могут возникать значительные ошибки расчета, если рассматриваемая область достаточно малая по сравнению с приложенными усилиями, а также в областях с большими концентрациями напряжений. Это также касается упругих тел, взаимодействующих с другими телами, имеющими достаточно тонкое покрытие. Проанализировав как теоретические и численные, так и экспериментально-теоретические методы расчета параметров контакта цилиндрических тел с учетом анизотропии свойств, как созданные нами, так и известные, для взаимодействия системы «автомобильная шина колеса – дорога» пришли к выводу о необходимости создания математических и экспериментальных методик расчета контактного взаимодействия таких инженерных конструкций [10, 11].

В проведенных экспериментальных исследованиях [11] (см. рис. 1, а), получены размеры зоны контакта «шина колеса – плоское основание». Как видно из рис. 1 отпечатка, область контакта является дискретной и давление в зоне контакта распределено неравномерно, что подтверждается численными расчетами, проведенными в работе [10].

1. Численные методы расчета контактного взаимодействия. Нами разработана теория и алгоритм расчета напряженного деформированного состояния, как на поверхности колеса, так и в упругом основании (математическая модель дорожного полотна)

при заданных давлениях, определяющихся экспериментально или численным расчетом. Суть метода состоит в следующем. Рассматривается первая граничная задача о напряженно-деформированном состоянии армированного полупространства под действием произвольно распределенной нагрузки в области контакта. Строятся аналитические зависимости, определяющие компоненты тензора напряжений и деформаций; производится дискретизация зоны контакта, то есть разбивка ее на некоторые граничные элементы (см. рис. 2) считая, что на каждом граничном элементе действует нормальная и касательная нагрузка.

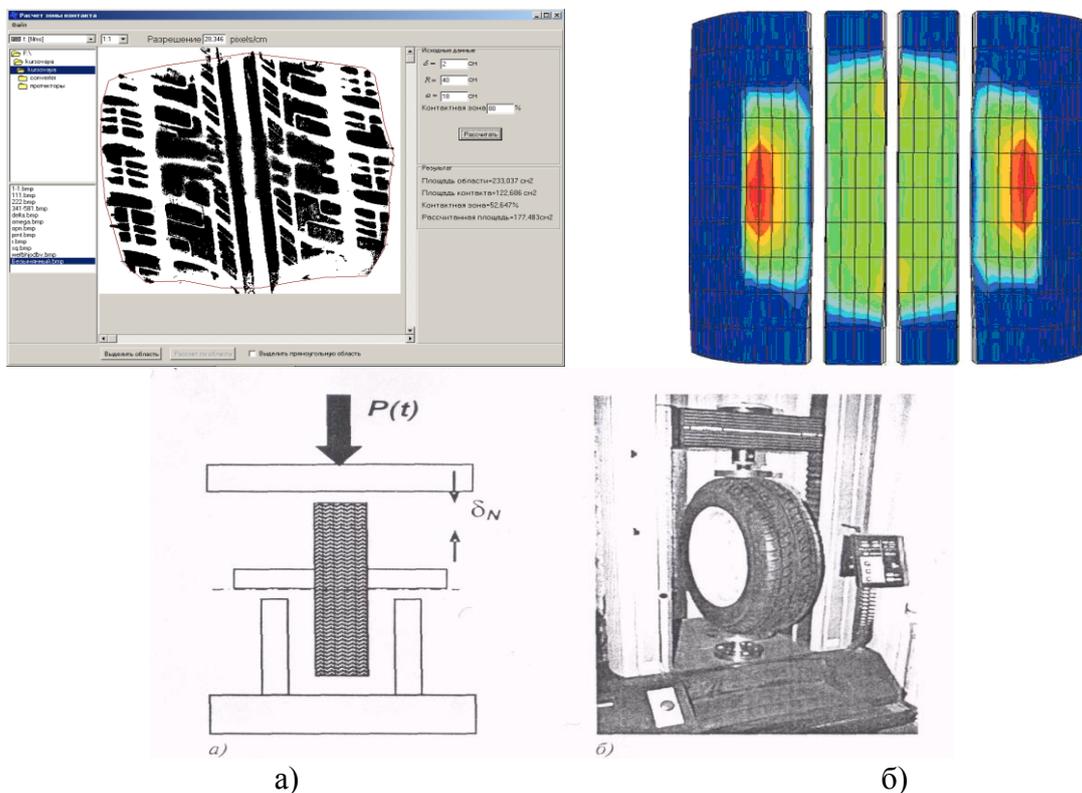


Рис. 1. Схемы испытания: а – экспериментальные результаты; б – численные расчеты

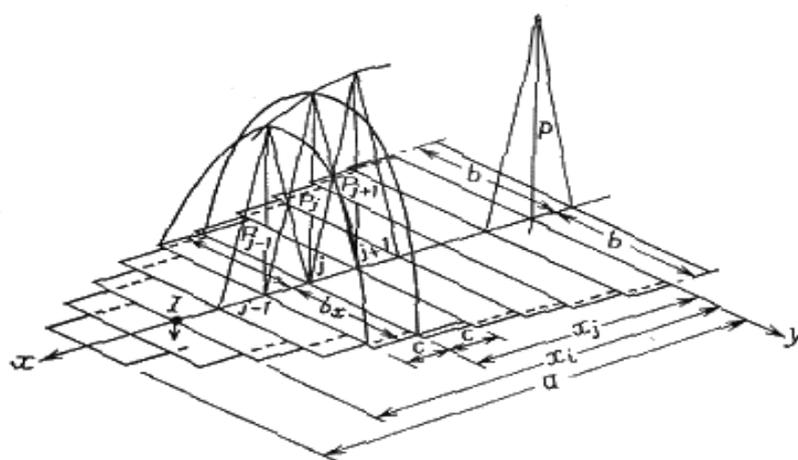


Рис. 2. Разбивка на граничные элементы [12]

В частности, рассмотрен случай для цилиндрических тел для случая плоской деформации, когда зону контакта можно аппроксимировать прямоугольником. Далее используя принцип суперпозиции, определяются напряжения, как в зоне контакта, так и за пределами ее.

Например, как для изотропного случая, в соответствии с решением Буссинеска, под влиянием постоянного давления по элементарному прямоугольнику размерами $2\Delta s$, $2\Delta t$ и с координатами s, t определяется зависимость перемещения при действующем давлении $p(x, y)$ (строится функция Грина) [12]

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \int_{|x-s|-\Delta s}^{|x-s|+\Delta s} \int_{|y-t|-\Delta t}^{|y-t|+\Delta t} \frac{p(s, t) ds dt}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}.$$

После интегрирования формула примет вид:

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi E'} p(s, t) \left\{ (|y-t| + \Delta t) \ln \frac{(|x-s| + \Delta s) + \sqrt{(|x-s| + \Delta s)^2 + (|y-t| + \Delta t)^2}}{(|x-s| - \Delta s) + \sqrt{(|x-s| - \Delta s)^2 + (|y-t| + \Delta t)^2}} + \right. \\ \left. + (|x-s| + \Delta s) \ln \frac{(|y-t| + \Delta t) + \sqrt{(|y-t| + \Delta t)^2 + (|x-s| + \Delta s)^2}}{(|y-t| - \Delta t) + \sqrt{(|y-t| + \Delta t)^2 + (|x-s| + \Delta s)^2}} + \right. \\ \left. + (|x-s| - \Delta s) \ln \frac{(|y-t| - \Delta t) + \sqrt{(|y-t| - \Delta t)^2 + (|x-s| - \Delta s)^2}}{(|y-t| + \Delta t) + \sqrt{(|y-t| + \Delta t)^2 + (|x-s| - \Delta s)^2}} \right\}.$$

Здесь ν – приведенный модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

Для расчета контакта ортотропных тел (в частности цилиндров) для плоской деформации строим функцию Грина исходя из работы [1]. Упругие постоянные и компоненты перемещения, относящиеся к разным телам, обозначим индексами 1 и 2. Предположим, что напряжения σ_{yy} и τ_{xy} , распределенные на границе полуплоскости, заданы следующим образом:

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} p(x), & -a \leq x \leq a, y = 0; \\ 0 & a < |x|; \end{cases} \\ \tau_{xy} = 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad y = 0.$$

Находим для заданных выше граничных условий перемещение:

$$v^{(1)} = \left\{ -\frac{S_{22}}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \beta_1^2 \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{\beta_1}{h} (x-t) \right| dt + \frac{S_{22}}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \beta_2^2 \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{\beta_2}{h} (x-t) \right| dt - \right. \\ \left. - \frac{S_{12}}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \ln \frac{\beta_2}{\beta_1} P \right\}.$$

Аналогичное выражение можно написать для перемещения второго тела $v^{(2)}$ с заменой индекса 1 на 2. Сложив $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$, получим интегральное уравнение для определения давления $p(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \left\{ [(\beta_1 + \beta_2) S_{22}]^{(1)} + [(\beta_1 + \beta_2) S_{12}]^{(2)} \right\} \int_{-a}^a p(t) \ln |t-x| dt = f(x) + const.$$

Здесь, согласно [1], коэффициенты $\beta_i = 1/\gamma_i$,

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}}, \text{ входящие в уравнение коэффициенты при}$$

плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; \quad S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, \quad j = \overline{1,2}$;

$$E_x = E_1, \quad E_y = E_2; \quad \nu_{xy} = \nu_{12}.$$

Здесь E_j, G_{12}, ν – технические постоянные материала.

При контактном взаимодействии жесткого индентора с изотропным покрытием на изотропном основании строим функцию Грина, исходя из асимптотических формул [1]. Так производная от перемещений равна

$$2\mu_1 \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2\mu_1} \frac{\partial V^\infty}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{d}_i \int_{-a}^a p(t) \left(\frac{x-t}{h} \right)^{2i-1} dt,$$

где $2\mu_1 \frac{\partial V^\infty}{\partial x} = \frac{\kappa_1 + 1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{p(t)}{h} \left[\frac{1}{x-t} + \sum_{i=1}^{\infty} 2id_i \left(\frac{x-t}{h} \right)^{2i-1} \right] dt.$

Получаем интегральное уравнение в виде [1, с.135] с использованием асимптотических зависимостей:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) k(x-t) dt = \frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} f'(x),$$

где $k\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{1}{t-x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2id_i^*}{h^{2i}} x^{2i-1}, \quad d_i^* = \frac{2\pi}{(\kappa_1 + 1)2i} \left[\sum_{k=1}^{\infty} r^{k+1} d_{ki} (-1)^{k+1} \right] + d_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Здесь $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига; $\kappa = 3 - 4\nu, r = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ – отношение модулей сдвига

покрытия и основания (будем рассматривать случай $r < 1$), коэффициенты d_{ki} и d_i вычисляем или находим по таблице согласно [1], где также представлены остальные обозначения.

2. Определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы. Согласно опубликованным теоретическим зависимостям в работах [13, 14], перемещения в объемном теле можно записать в виде:

$$u_i = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_3 \right), \quad i = 1, 2,$$

$$u_3 = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V \right).$$

Полю перемещений отвечают следующие компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} dx_3,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} dx_3,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} dx_3,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Данные формулы, выражающие перемещения и напряжения через одну гармоническую функцию $V(x)$, (исходя из решения Буссинеска) были выведены Н.М. Беляевым в 1924 г. Таким образом, перемещения и напряжения в упругом полубесконечном теле могут быть найдены по формулам Беляева, как только будет известна функция $V(x)$

$$V(x) = \iint_{\omega} \frac{p(y)}{R(y, x)} dy,$$

$$W(x) = \iint_{\omega} p(y) \ln(x_3 + R(y, x)) dy,$$

где $R(y, x) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2)^{1/2}$ – расстояние от точки наблюдения M с координатами (x_1, x_2, x_3) до точки приложения сосредоточенной силы.

Функции $V(x)$ и $W(x)$ называются соответственно потенциалом простого слоя и логарифмическим потенциалом (от трех переменных). В свою очередь, потенциал $V(x)$ может быть вычислен, как только будет известна плотность $p(x_1, x_2)$ распределения контактного давления.

Программная реализация. Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы. Программа позволяет изменять размеры параллелепипеда, в котором находится исследуемое тело.

Для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Применялись прямоугольные конечные элементы. Используя метод конечных элементов можно произвести разбиение тела на достаточно маленькие элементы, для этого в программе память под все используемые массивы выделяется динамически.

На рис. 3 изображено главное окно программы, позволяющее задать размеры параллелепипеда, количество узлов, модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Вектор шагов по осям вычисляется автоматически на основе размеров параллелепипеда и количества узлов, шаги принимаются равными по величине. На этом же экране производится загрузка исходного изображения для анализа. Оно изображено левее, а справа от него изображены конечные элементы и цвет каждого из них в соответствии с исходным изображением. Для определения давления используется показатель оттенка цвета, яркость и насыщенность не учитываются.

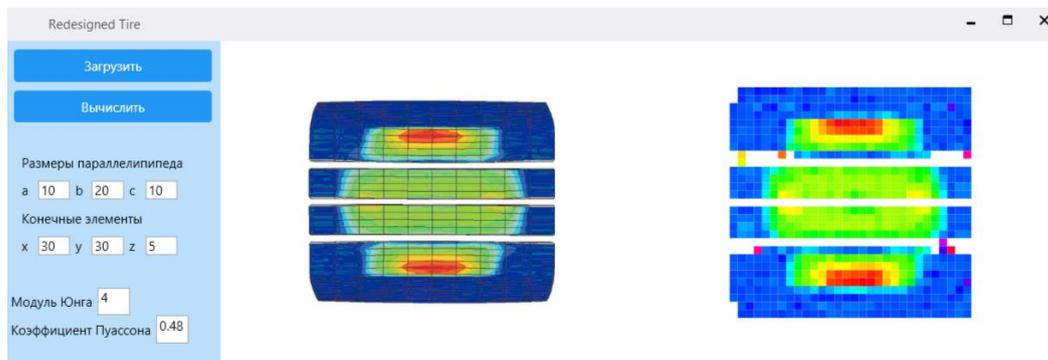


Рис. 3. Главное окно программы

При автоматическом распознавании цветов исходного изображения могут возникнуть неточности, которые можно исправить вручную. Для этого необходимо выбрать конечный элемент смежный с неправильным, и перетащить его цвет с помощью зажатой левой клавиши мыши на элемент, цвет которого нужно изменить. На рис. 4 изображены цвета конечных элементов до и после корректировки. После этого можно приступить к расчету напряжений и перемещений. Время работы программы зависит от количества КЭ и точности вычисления двойных и простых интегралов. Эти точности задаются внутри программы.

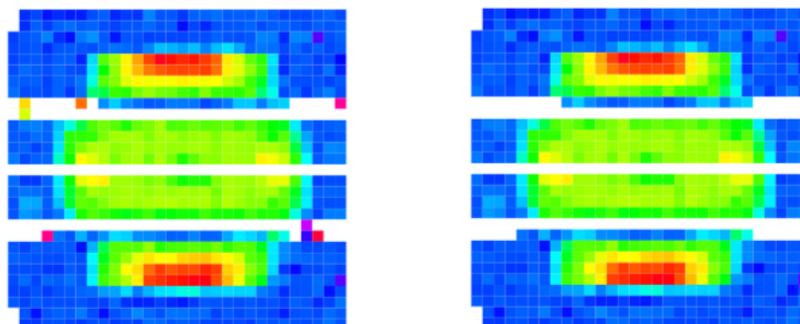


Рис. 4. Результат корректировки цветов

Для увеличения производительности программы было принято решение при вычислении интегралов задавать не точность вычисления, а количество разбиений областей интегрирования. Это позволяет получать достаточно точные результаты при небольших затратах времени. При использовании точности интегрирования много времени тратилось программой на подбор необходимого количества разбиений, для достижения заданной точности, и так для каждой точки. Для нахождения значений всех необходимых интегралов и производных использовались соответствующие численные методы. Для нахождения двойного интеграла была использована кубатурная формула Симпсона, а для нахождения простого интеграла – квадратурная формула Симпсона. Для нахождения производных применялись левая, правая и центральная производные, использовались сплайны.

Результаты вычислений, а также исходные показатели давления, выводятся под изображениями. На графиках можно просматривать изменения значений по каждой оси на различных срезах. В выпадающих списках можно задавать параметры среза. Графики обновляются автоматически при изменении параметров.

Значения выведенных результатов можно экспортировать в файл в формате .csv в виде таблицы с помощью кнопки «Вывести в таблицу». При нажатии на эту кнопку будет создан файл, содержащий значения выбранного показателя по координатам X и Y для заданного Z. Для примера на рисунке 6, при нажатии на кнопку «Вывести в таблицу» будет создан файл под названием «Sig11 Z=0.csv». Его содержание в уменьшенном виде изображено на рис. 7. Данную таблицу можно использовать для дальнейшего анализа с помощью возможностей Excel или какой-либо иной программы. Например, с помощью Excel можно построить трехмерных график значений на основе таблицы. График для созданного файла представлен на рис. 8.

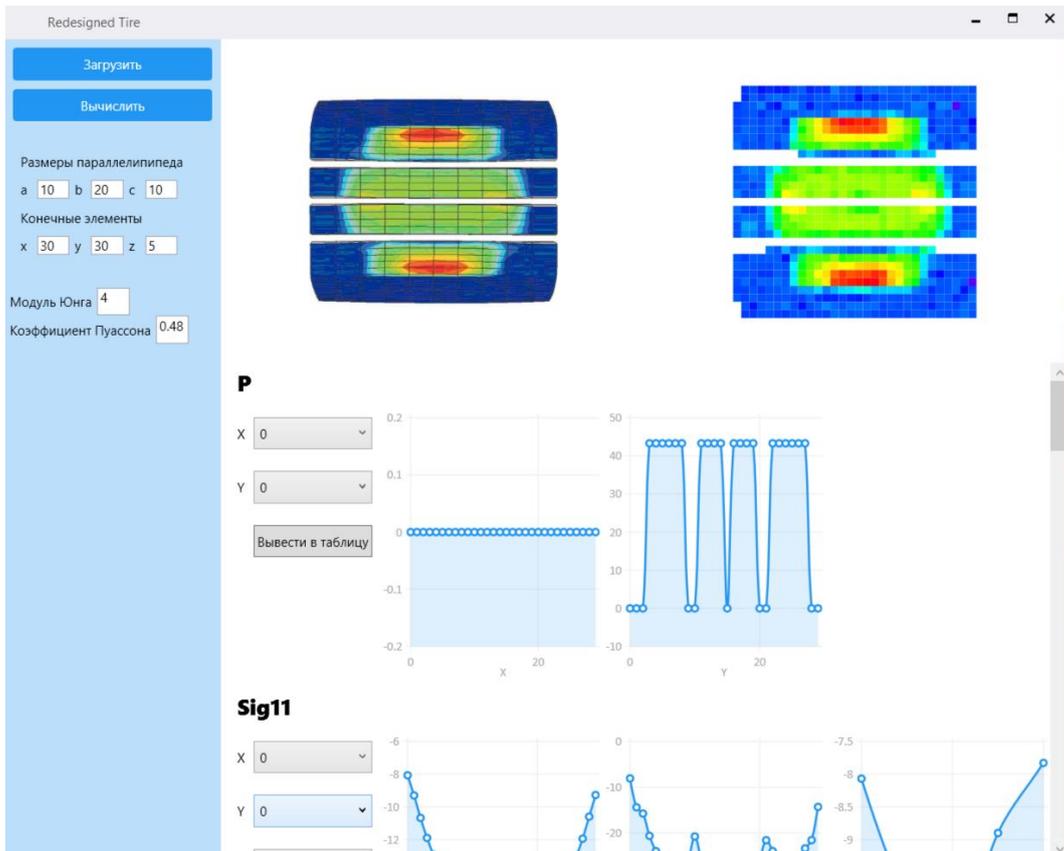


Рис. 5. Вывод результатов

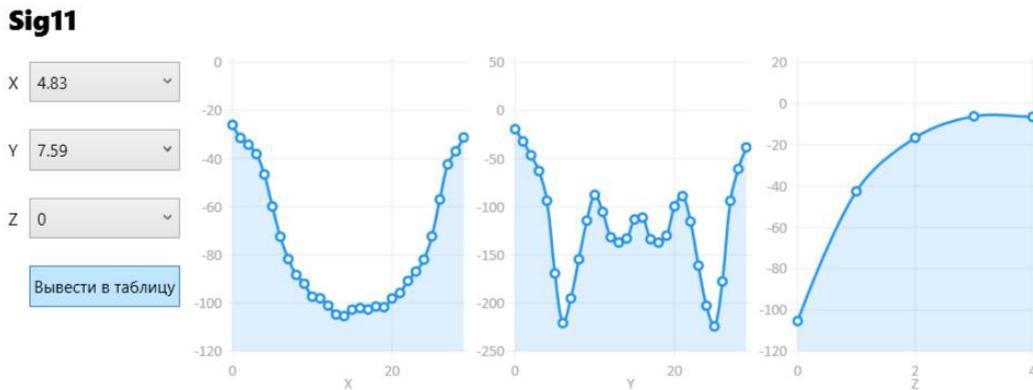


Рис. 6. Данные для выбранных срезов по разным осям

A1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	0	0.34	0.69	1.03	1.38	1.72	2.07	2.41	2.76	3.1	3.45	3.79	4.14	4.48	4.83	5.17	5.52	5.86	6.21	6.55	6.9	7.24	7.59	7.93	8.28	8.62	8.97	9.31	9.66	10	
2	0	-8.009	-9.3043	-10.6077	-11.901	-12.947	-13.874	-14.726	-15.524	-16.28	-17.003	-17.71	-18.41	-19.012	-19.547	-19.409	-19.345	-19.218	-19.006	-18.699	-18.276	-17.763	-17.164	-16.488	-15.74	-14.935	-14.035	-13.055	-11.949	-10.602	-9.2761
3	0.69	-14.388	-16.9739	-19.496	-22.48	-23.171	-24.4	-25.696	-26.818	-28.818	-29.643	-30.808	-31.457	-32.481	-32.544	-32.053	-31.549	-30.803	-32.214	-32	-31.116	-30.349	-28.401	-27.296	-25.979	-24.695	-23.025	-21.885	-21.251	-18.817	
4	1.38	-15.752	-22.425	-28.055	-30.271	-31.407	-32.398	-34.722	-36.491	-38.392	-39.863	-41.359	-43.455	-47.617	-48.376	-46.555	-46.283	-46.413	-46.005	-45.101	-44.091	-42.472	-41.024	-39.197	-37.43	-35.507	-33.628	-31.804	-30.276	-27.78	-21.945
5	2.07	-20.633	-26.6	-31.971	-36.048	-39.592	-37.584	-40.034	-47.024	-51.065	-49.762	-52.198	-55.969	-59.153	-61.496	-62.942	-63.54	-63.297	-62.391	-60.514	-58.164	-54.528	-53.077	-52.031	-47.859	-42.078	-42.57	-40.789	-34.497	-30.627	-24.71
6	2.76	-21.965	-29.967	-34.013	-39.457	-42.056	-41.907	-43.639	-53.935	-59.845	-62.412	-67.711	-74.798	-83.725	-90.706	-93.778	-94.769	-94.909	-93.478	-88.664	-83.76	-76.007	-67.991	-60.232	-55.902	-48.612	-46.85	-45.479	-37.994	-32.876	-26.495
7	3.45	-25.824	-32.21	-35.782	-38.439	-41.838	-44.843	-48.813	-57.14	-71.502	-87.772	-106.6	-125.44	-147.87	-163.15	-169.21	-170.08	-170.21	-169.36	-159.99	-140.03	-118.89	-94.648	-83.496	-70.402	-55.792	-46.799	-42.626	-39.502	-33.336	-28.212
8	4.14	-26.895	-33.408	-36.899	-39.662	-43.111	-46.458	-50.73	-62.408	-84.627	-112.21	-140.88	-186.96	-194.95	-213.3	-220.79	-221.42	-224.51	-226.68	-214.82	-182.77	-142.24	-119.81	-106.34	-88.445	-61.023	-48.513	-44.023	-41.043	-36.829	-29.987
9	4.83	-27.045	-33.727	-37.241	-40.161	-43.818	-47.361	-51.009	-68.311	-92.774	-118.86	-145.49	-186.21	-182.12	-188.83	-193.12	-201.74	-204.78	-204.81	-196.77	-179.61	-145.99	-127.86	-112.46	-88.385	-64.124	-50.966	-45.471	-42.021	-37.607	-30.289
10	5.52	-28.002	-34.78	-37.32	-40.14	-43.603	-46.427	-52.301	-73.311	-100.03	-137.96	-189.04	-149.64	-155.96	-153.73	-154.58	-160.02	-164.42	-162.44	-156.22	-154.09	-133.56	-122.07	-111.78	-91.91	-67.389	-51.26	-45.821	-42.611	-39.17	-31.842
11	6.21	-25.348	-30.813	-32.328	-35.669	-39.698	-43.025	-47.626	-64.818	-90.419	-104.25	-113.47	-110.15	-115.42	-113.92	-114.49	-115.12	-115.49	-114.95	-113	-110.99	-109.24	-105.42	-95.725	-85.383	-70.531	-52.085	-41.479	-37.389	-35.528	-29.503
12	6.9	-20.769	-24.166	-27.984	-32.524	-37.679	-43.505	-49.679	-66.844	-97.243	-117.647	-81.25	-83.796	-84.68	-86.45	-87.92	-88.111	-87.799	-86.834	-85.061	-83.198	-82.307	-80.217	-74.236	-68.842	-61.45	-52.795	-41.747	-34.794	-29.821	-25.455
13	7.59	-26	-31.417	-34.215	-38.131	-46.589	-59.886	-72.451	-81.726	-88.308	-91.988	-97.348	-98.033	-101.04	-104.76	-105.39	-102.77	-102.06	-102.69	-101.43	-101.71	-98.101	-95.808	-90.814	-86.908	-81.968	-72.293	-56.989	-42.392	-36.945	-31.218
14	8.28	-30.424	-37.708	-40.732	-43.974	-56.196	-60.236	-69.916	-105.82	-110.36	-116.66	-125.81	-128.61	-130.78	-131.6	-139.98	-152.22	-129.91	-128.48	-128.72	-126.53	-124.86	-116.66	-109.58	-105.53	-97.911	-78.615	-51.937	-42.294	-34.122	-28.448
15	8.97	-31.206	-38.794	-42.793	-46.967	-60.772	-66.515	-106.12	-114.86	-111.32	-127.1	-132.65	-134.6	-135.9	-136.59	-137.14	-137.23	-137.1	-137.11	-136.63	-136.2	-134.9	-135.06	-127.3	-111.32	-116.78	-107.94	-85.497	-59.557	-47.163	-38.845
16	9.66	-31.529	-39.044	-42.622	-47.128	-62.538	-68.701	-114.35	-130	-130.44	-125.71	-129.14	-133.12	-132.67	-132.93	-130.17	-129.8	-132.86	-135.95	-135.64	-132.51	-131.59	-135.44	-135.48	-124.95	-108.78	-87.482	-62.647	-47.744	-37.974	-30.24
17	10.34	-29.099	-35.433	-39.65	-45.906	-68.602	-78.65	-100.18	-114.84	-113.26	-108.1	-111.07	-114.48	-112.87	-113.22	-111.21	-110.28	-109.68	-111.04	-116.49	-116.48	-113.75	-113.12	-117.36	-117.25	-106.23	-91.907	-77.022	-68.531	-44.172	-34.848
18	11.02	-28.002	-34.78	-37.32	-40.14	-43.603	-46.427	-52.301	-73.311	-100.03	-137.96	-189.04	-149.64	-155.96	-153.73	-154.58	-160.02	-164.42	-162.44	-156.22	-154.09	-133.56	-122.07	-111.78	-91.91	-67.389	-51.26	-45.821	-42.611	-39.17	-31.842
19	11.71	-25.348	-30.813	-32.328	-35.669	-39.698	-43.025	-47.626	-64.818	-90.419	-104.25	-113.47	-110.15	-115.42	-113.92	-114.49	-115.12	-115.49	-114.95	-113	-110.99	-109.24	-105.42	-95.725	-85.383	-70.531	-52.085	-41.479	-37.389	-35.528	-29.503
20	12.4	-20.769	-24.166	-27.984	-32.524	-37.679	-43.505	-49.679	-66.844	-97.243	-117.647	-81.25	-83.796	-84.68	-86.45	-87.92	-88.111	-87.799	-86.834	-85.061	-83.198	-82.307	-80.217	-74.236	-68.842	-61.45	-52.795	-41.747	-34.794	-29.821	-25.455
21	13.1	-26	-31.417	-34.215	-38.131	-46.589	-59.886	-72.451	-81.726	-88.308	-91.988	-97.348	-98.033	-101.04	-104.76	-105.39	-102.77	-102.06	-102.69	-101.43	-101.71	-98.101	-95.808	-90.814	-86.908	-81.968	-72.293	-56.989	-42.392	-36.945	-31.218
22	13.8	-30.424	-37.708	-40.732	-43.974	-56.196	-60.236	-69.916	-105.82	-110.36	-116.66	-125.81	-128.61	-130.78	-131.6	-139.98	-152.22	-129.91	-128.48	-128.72	-126.53	-124.86	-116.66	-109.58	-105.53	-97.911	-78.615	-51.937	-42.294	-34.122	-28.448
23	14.5	-31.206	-38.794	-42.793	-46.967	-60.772	-66.515	-106.12	-114.86	-111.32	-127.1	-132.65	-134.6	-135.9	-136.59	-137.14	-137.23	-137.1	-137.11	-136.63	-136.2	-134.9	-135.06	-127.3	-111.32	-116.78	-107.94	-85.497	-59.557	-47.163	-38.845
24	15.2	-29.099	-35.433	-39.65	-45.906	-68.602	-78.65	-100.18	-114.84	-113.26	-108.1	-111.07	-114.48	-112.87	-113.22	-111.21	-110.28	-109.68	-111.04	-116.49	-116.48	-113.75	-113.12	-117.36	-117.25	-106.23	-91.907	-77.022	-68.531	-44.172	-34.848
25	15.9	-28.002	-34.78	-37.32	-40.14	-43.603	-46.427	-52.301	-73.311	-100.03	-137.96	-189.04	-149.64	-155.96	-153.73	-154.58	-160.02	-164.42	-162.44	-156.22	-154.09	-133.56	-122.07	-111.78	-91.91	-67.389	-51.26	-45.821	-42.611	-39.17	-31.842
26	16.6	-25.348	-30.813	-32.328	-35.669	-39.698	-43.025	-47.626	-64.818	-90.419	-104.25	-113.47	-110.15	-115.42	-113.92	-114.49	-115.12	-115.49	-114.95	-113	-110.99	-109.24	-105.42	-95.725	-85.383	-70.531	-52.085	-41.479	-37.389	-35.528	-29.503
27	17.3	-20.769	-24.166	-27.984	-32.524	-37.679	-43.505	-49.679	-66.844	-97.243	-117.647	-81.25	-83.796	-84.68	-86.45	-87.92	-88.111	-87.799	-86.834	-85.061	-83.198	-82.307	-80.217	-74.236	-68.842	-61.45	-52.795	-41.747	-34.794	-29.821	-25.455
28	18	-26	-31.417	-34.215	-38.131	-46.589	-59.886	-72.451	-81.726	-88.308	-91.988	-97.348	-98.033	-101.04	-104.76	-105.39	-102.77	-102.06	-102.69	-101.43	-101.71	-98.101	-95.808	-90.814	-86.908	-81.968	-72.293	-56.989	-42.392	-36.945	-31.218
29	18.7	-30.424	-37.708	-40.732	-43.974	-56.196	-60.236	-69.916	-105.82	-110.36	-116.66	-125.81	-128.61	-130.78	-131.6	-139.98	-152.22	-129.91	-128.48	-128.72	-126.53	-124.86	-116.66	-109.58	-105.53	-97.911	-78.615	-51.937	-42.294	-34.122	-28.448
30	19.4	-31.206	-38.794	-42.793	-46.967	-60.772	-66.515	-106.12	-114.86	-111.32	-127.1	-132.65	-134.6	-135.9	-136.59	-137.14	-137.23	-137.1	-137.11	-136.63	-136.2	-134.9	-135.06	-127.3	-111.32	-116.78	-107.94	-85.497	-59.557	-47.163	-38.845
31	20	-29.099	-35.433	-39.65	-45.906	-68.602	-78.65	-100.18	-114.84	-113.26	-108.1	-111.07	-114.48	-112.87	-113.22	-111.21	-110.28	-109.68	-111.04	-116.49	-116.48	-113.75	-113.12	-117.36	-117.25	-106.23	-91.907	-77.022	-68.531	-44.172	-34.848
32	20	-28.002	-34.78	-37.32	-40.14	-43.603	-46.427	-52.301	-73.311	-100.03	-137.96	-189.04	-149.64	-155.96	-153.73	-154.58	-160.02	-164.42	-162.44	-156.22	-154.09	-133.56	-122.07	-111.78	-91.91	-67.389	-51.26	-45.821	-42.611	-39.17	-31.842
33	20	-25.348	-30.813	-32.328	-35.669	-39.698	-43.025	-47.626	-64.818	-90.419	-104.25	-113.47	-110.15	-115.42	-113.92	-114.49	-115.12	-115.49	-114.95	-113	-110.99	-109.24	-105.42	-95.725	-85.383	-70.531	-52.085	-41.479	-37.389	-35.528	-29.503
34	20	-20.769	-24.166	-27.984	-32.524	-37.679	-43.505	-49.679	-66.844	-97.243	-117.647	-81.25	-83.796	-84.68	-86.45	-87.92	-88.111	-87.799	-86.834	-85.061	-83.198	-82.307	-80.217	-74.236	-68.842	-61.45	-52.795	-41.747	-34.794	-29.821	-25.455
35	20	-26	-31.417	-3																											

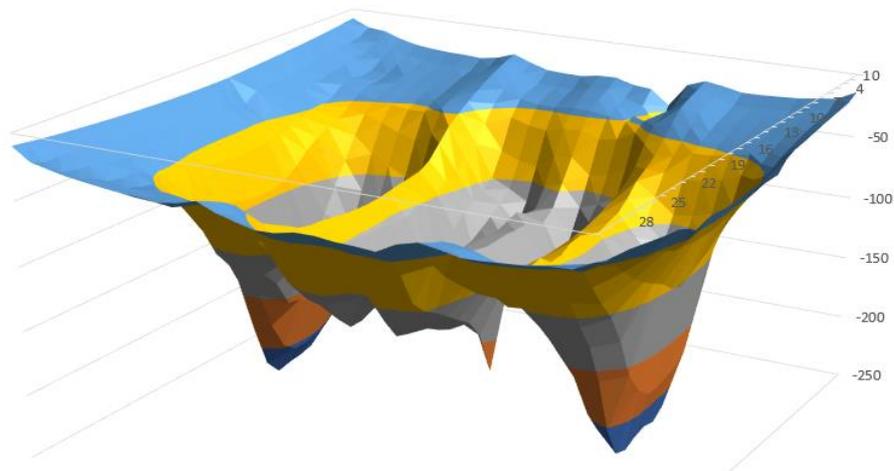


Рис. 8. Трехмерный график значений σ_{11} для $z = 0$

Выводы. Таким образом, приведенные в этой статье подход и результаты показали, возможность численного расчета контактного взаимодействия тел из композитов, определения напряженно-деформированное состояние при сложных граничных условиях, например, для исследования качения цилиндров из ортотропных материалов, что дает возможность инженерного расчета взаимодействия «шина–дорожное покрытие».

ЛИТЕРАТУРА

1. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский // Минск: Наука. – 1988. – С. 280.
2. Галин, Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 380 с.
3. Горячева, И. Г. Механика контактного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
4. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – М.: Наука, 1967. – 403 с.
5. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
6. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
7. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1975. – 690 с.
8. Новацкий, В. Теории упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 256 с.
9. Pleskachevsky, Yu. M. Computational Methods in Contact Mechanics III / Yu. M. Pleskachevsky, V. V. Mozharovsky, Yu. F. Rouba // Proc. Int. Conf., Madrid; July 3–5, 1997. – P. 363–372.
10. Рыжов, С. А. Проектирование шин с использованием программного комплекса ABAQUS / С. А. Рыжов, К. А. Ильин, А. Н. Варюхин // САПР и графика. – 2006. – № 1. – С. 20–40.
11. Шилько, С. В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / С. В. Шилько, В. В. Можаровский // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Мн., 2007. – С. 135–142.
12. Справочник по триботехнике / под ред. М. Хебды. – М: Машиностроение, 1990. – Т. 2.– 416 с.
13. Можаровский, В. В. Численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объемном теле применительно к техническим приложениям /

В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // Известия Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6(87). – С. 161–165.

14. Аргатов, И. И. Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев. – СПб.: Политехника, 2003. – 233 с.

Поступила: 26.01.2021