

ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК

О. В. Константинов, М. М. Панахов и Ю. Ф. Романов

Определена спектральная зависимость коэффициента отражения света от диэлектрической пластины, показатель преломления которой модулирован в направлении, перпендикулярном ее поверхности. Рассмотрена произвольная поляризация падающей волны. В случае малой модуляции найдено общее аналитическое выражение для коэффициента отражения. Установлено, что результаты, полученные ранее методом связанных волн, соответствуют случаю «пустой» решетки, который физически реализуется при падении света под углом Брюстера. В случае преломляющей решетки в спектральной зависимости коэффициента отражения наряду с брэгговским максимумом существуют максимумы, обусловленные переотражением света от границ пластины.

Фазовые отражательные решетки с плоскостями пучностей, параллельными поверхности, интенсивно изучались в связи с анализом свойств объемных голограмм, для которых модуляцию показателя преломления среды можно считать малой. Результаты исследований и библиография содержатся в работах [1, 2]. Аналитические выражения для коэффициента отражения были получены в приближении связанных волн [3], которое, как будет показано ниже, соответствует лишь случаю «пустой» решетки. В работе [4] была дана теория распространения света в слоистой среде без поглощения со ступенчатой модуляцией показателя преломления. Показано, что решение в среде имеет вид блоховской волны. Однако при получении коэффициента отражения света от пластины конечной толщины не было учтено существование отраженной блоховской волны, приходящей от второй границы пластины. В связи с этим формула для коэффициента отражения света от пластины конечной толщины, полученная в работе [4], не переходит в обычное выражение для коэффициента отражения однородной пластины, когда частота света далека от значений, соответствующих запрещенной зоне.

В настоящей статье используется метод расчета, развитый в нашей работе [5], который позволяет анализировать случай малой модуляции показателя преломления. В работе [5] был определен коэффициент отражения света от полубесконечной слоистой среды, тогда как ниже рассматривается отражение света от пластины конечной толщины.

Коэффициент отражения света
от пластины из слоистого диэлектрика

Пусть свет из среды 1, являющейся однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ_1 , падает на слоистую пластину толщиной T (рис. 1). Периодическое изменение диэлектрической проницаемости пластины происходит в направлении, перпендикулярном ее поверхности,

$$\epsilon_2(x) = \epsilon_2 - \Delta\epsilon(x). \quad (1)$$

Здесь ϵ_2 — среднее значение $\epsilon_2(x)$, $\Delta\epsilon(x)$ — периодически меняющаяся часть, которая описывается рядом Фурье

$$\Delta\epsilon(x) = \epsilon_2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta_s e^{-i2sx(x+x_0)}, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_s = \delta_{-s}, \quad (2)$$

где $2\kappa = 2\pi/d$ — основной вектор обратной решетки, связанный с периодом d модуляции $\varepsilon_2(x)$, x_0 — параметр, характеризующий начальную фазу модуляции при $x=0$.

Будем определять коэффициент отражения R от границы такой решетки для двух поляризаций падающей волны: TE -поляризации, когда электрический вектор падающей волны E_i перпендикулярен плоскости падения (рис. 1, а), и TM -поляризации, когда магнитный вектор падающей волны H_i перпендикулярен этой плоскости (рис. 1, б). Отличными от нуля компонентами полей при TE -поляризации будут E_z , H_x и H_y , а при TM -поляризации H_z , E_x и E_y . Если считать, что E_i и H_i пропор-

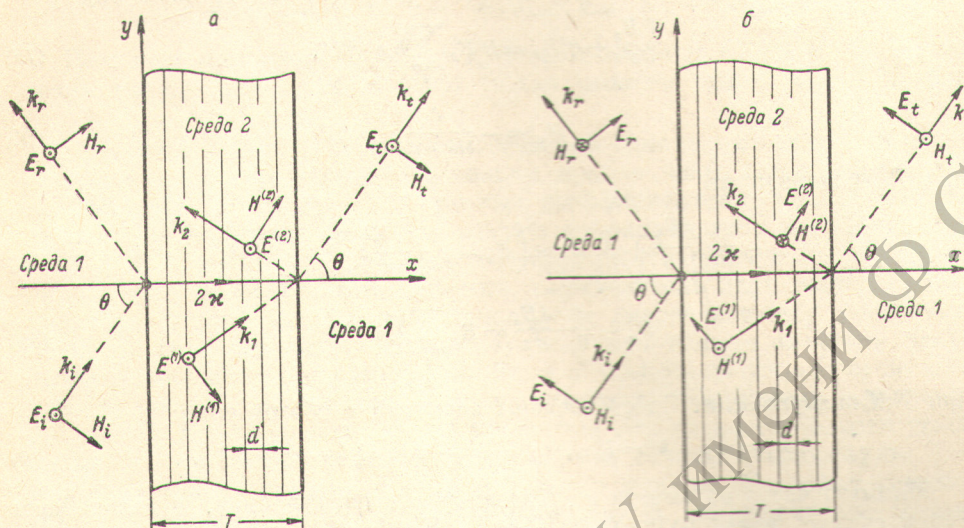


Рис. 1. Схематическое изображение решетки и электромагнитных волн.
а — случай TE -поляризации падающей волны, б — случай TM -поляризации падающей волны.
Волновые векторы k_1 и k_2 в среде 2 — величины условные.

циональны $\exp[i(\tau y - \omega t)]$, то электрическое и магнитное поля отраженной волны E_r , H_r , проходящей волны E_t , H_t , а также волны, распространяющейся в слоистой среде 2 — E , H , будут пропорциональны этой экспоненте. Используя граничные условия Максвелла при $x=0$, получаем следующие выражения для амплитудного коэффициента отражения R :

$$R_{TE} = -\frac{1 - \sqrt{\varepsilon_1} \xi_{TE} \cos \theta}{1 + \sqrt{\varepsilon_1} \xi_{TE} \cos \theta}, \quad R_{TM} = -\frac{\cos \theta - \sqrt{\varepsilon_1} \xi_{TM}}{\cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1} \xi_{TM}}, \quad (3)$$

где θ — угол падения, а величины

$$\xi_{TE} = -(E_z/H_y)_{x=0}, \quad \xi_{TM} = (E_y/H_z)_{x=0} \quad (4)$$

поверхностные импедансы среды 2 для TE - и TM -поляризации соответственно. Они зависят от свойств решетки, ее толщины, частоты света ω и касательной составляющей τ волнового вектора (или угла падения θ). Электрическое и магнитное поля в решетке представим в виде

$$E(x) = E^{(1)}(x) + uE^{(2)}(x), \quad H(x) = H^{(1)}(x) + uH^{(2)}(x). \quad (5)$$

Если среда 2 является однородной пластиной, то $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ соответствуют волне, уходящей от границы $x=0$, $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ — волне, приходящей к этой границе. Коэффициент u определяется с помощью граничных условий Максвелла на второй поверхности пластины, где $x=T$. В результате

получаем

$$u_{TE} = - \left[\frac{E_z^{(1)} + (\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta)^{-1} H_y^{(1)}}{E_z^{(2)} + (\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta)^{-1} H_y^{(2)}} \right]_{x=T},$$

$$u_{TM} = - \left[\frac{E_y^{(1)} - (\cos \theta H_z^{(1)} / \sqrt{\varepsilon_1})}{E_y^{(2)} - (\cos \theta H_z^{(2)} / \sqrt{\varepsilon_1})} \right]_{x=T}. \quad (6)$$

Решение уравнений Максвелла в решетке

Электрическое и магнитное поля в решетке находятся из уравнений Максвелла, которые при учете выражений (1) и (2) приобретают вид

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + q^2 E_z = k^2 E_z \sum_s \delta_s e^{-i2sx}, \quad (7a)$$

$$H_y = -\frac{1}{ik} \frac{dE_z}{dx} \quad (7b)$$

при TE -поляризации,

$$-\frac{1}{ik_0} \frac{dE_y}{dx} + \frac{q}{k^2} H_z = \left(H_z - \frac{1}{ik_0} \frac{dE_y}{dx} \right) \sum_s \delta_s e^{-i2sx}, \quad (8a)$$

$$E_y - \frac{1}{ik_0} \frac{dH_z}{dx} = E_y \sum_s \delta_s e^{-i2sx} \quad (8b)$$

при TM -поляризации. Здесь введены следующие обозначения:

$$k_0 = \omega/c, \quad k^2 = k_0^2 \varepsilon_2, \quad q^2 = k^2 - \tau^2 = k_0^2 \varepsilon_2 - \tau^2 + ik_0^2 \varepsilon_2'', \quad (9)$$

Мнимую часть параметра q^2 , связанную с поглощением, в дальнейшем будем считать малой величиной ($\varepsilon_2'' \ll 1$). Кроме того, параметр x_0 , опущенный в уравнениях (7) и (8) для краткости записи, будем учитывать лишь в конечных результатах путем замены x на $x + x_0$. Уравнения (7) и (8) являются системами уравнений с периодическими коэффициентами. Согласно теореме Флоке—Блоха^[6], их решения должны иметь вид

$$E_z^{(1)} = E_0 e^{ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(p) e^{in\pi x}, \quad E_z^{(2)} = E_0 e^{-ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n(p) e^{-in\pi x}, \quad (10a)$$

$$H_y^{(1)} = -E_0 e^{ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\pi + p}{k_0} f_n(p) e^{in\pi x}, \quad H_y^{(2)} = E_0 e^{-ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\pi + p}{k_0} \tilde{f}_n(p) e^{-in\pi x} \quad (10b)$$

при TE -поляризации и

$$E_y^{(1)} = E_0 e^{ipx} \sum_n g_n e^{in\pi x}, \quad E_y^{(2)} = E_0 e^{-ipx} \sum_n \tilde{g}_n e^{-in\pi x}, \quad (11a)$$

$$H_z^{(1)} = E_0 e^{ipx} \sum_n h_n e^{in\pi x}, \quad H_z^{(2)} = E_0 e^{-ipx} \sum_n \tilde{h}_n e^{-in\pi x} \quad (11b)$$

при TM -поляризации. Величина p — это квазиимпульс электромагнитной волны в слоистой среде. Его вещественная часть p' определена в интервале, соответствующем первой зоне Бриллюэна: $-\pi \leq p' \leq \pi$. Если $E_z^{(1)}$ из (10a) подставить в уравнение (7), то получим систему уравнений для определения коэффициентов f_n при TE -поляризации

$$[q^2 - (n\pi + p)^2] f_n = k^2 \sum_s \delta_s f_{n+2s}. \quad (12)$$

В случае TM -поляризации подставим $E_y^{(1)}$ и $H_z^{(1)}$ из (11) в уравнение (8) и получим две системы уравнений для определения коэффициентов g_n и h_n

$$[q^2 - (nx + p)^2] g_n = -k^2 \sum_s \delta_s \frac{nx + p}{(n + 2s)x + p} \sum_{s'} \delta_{s'} g_{n+2s+2s'} + \\ + \sum_s \delta_s \left[q^2 - (nx + p)(nx + 2sx + p) + \frac{k^2 (nx + p)}{nx + 2sx + p} \right] g_{n+2s}, \quad (13a)$$

$$h_n = \frac{k_0 \varepsilon_2}{nx + p} \left(g_n - \sum_s \delta_s g_{n+2s} \right). \quad (13b)$$

Обращаясь к (10) и (11), можно убедиться, что уравнения для $\tilde{f}_n$ и $\tilde{g}_n$, $\tilde{h}_n$ получаются соответственно из систем (12) и (13) путем замены

$$p \rightarrow -p, \quad n \rightarrow -n, \quad s \rightarrow -s, \quad f_{-n}, \quad g_{-n}, \quad h_{-n} \rightarrow \tilde{f}_n, \quad \tilde{g}_n, \quad \tilde{h}_n. \quad (14)$$

При этом уравнения для $\tilde{f}_n$ и $\tilde{g}_n$ точно совпадают с (12) и (13a), уравнение для $\tilde{h}_n$ отличается от (13b) только знаком в правой части. Поэтому $\tilde{f}^n = f_n$, $\tilde{g}^n = g_n$, $\tilde{h}_n = h_n$.

Система (12) или (13) является системой однородных зацепляющихся алгебраических уравнений. Поскольку правая часть связывает данный коэффициент f_n (или g_n , h_n) с другими коэффициентами, номера которых отличаются на четное число, то следует сохранить либо коэффициенты f (или g , h) с четным n , полагая все коэффициенты с нечетным n равными нулю, либо наоборот. Как известно, определитель этих систем должен равняться нулю. Это условие приводит к дисперсионному уравнению, из которого определяется квазиимпульс p при данном значении непрерывно меняющегося параметра q^2 . Если q^2 принимает только вещественные значения, то система (12) эквивалентна известному уравнению Хилла [6]. На плоскости (q^2, δ_s) уравнение Хилла имеет области устойчивых и неустойчивых решений. В первом случае квазиимпульс p — величина вещественная, во втором — чисто мнимая. В теории твердого тела эти области называются разрешенными и запрещенными зонами. Системы (12) и (13) аналитически решаются только тогда, когда модуляция диэлектрической проницаемости мала ($\delta_s \ll 1$). Существующие в литературе решения [6] имеют два недостатка: во-первых, они неприемлемы для области, где q^2 является комплексным, во-вторых, разложения по степеням δ_s , в виде которых даются эти решения, расходятся вблизи границ зон. Нами предложен метод [5], свободный от указанных недостатков, который позволяет получить в случае малой модуляции выражения для коэффициентов f , g , h , остающиеся конечными вблизи границ зон. Этот метод используется ниже.

ТЕ-поляризация. Если $q \approx mx$, то наибольшими коэффициентами в системе (12) будут f_m и f_{-m} , поскольку стоящие перед ними множители в квадратных скобках в левой части (12) близки к нулю. Только эти коэффициенты следует сохранить и в правой части (12), что при $n=m$ соответствует члену с $s=-m$

$$[q^2 - (mx + p)^2] f_m = k^2 \delta_{-m} f_{-m}. \quad (15a)$$

Уравнение с f_{-m} в левой части имеет аналогичный вид

$$[q^2 - (-mx + p)^2] f_{-m} = k^2 \delta_m f_m. \quad (15b)$$

Из (15a) и (15b) получается дисперсионное уравнение

$$[q^2 - (mx + p)^2][q^2 - (-mx + p)^2] = k^4 \delta_m^2, \quad (16)$$

из которого следует, что

$$p^2 \approx (q - mx)^2 - (k^2 \delta_m / 2mx)^2. \quad (17)$$

Согласно (9), параметр q^2 , имеющий мнимую часть, связанную с поглощением, можно записать так:

$$q^2 = x^2 (\alpha^2 + i2\alpha\gamma), \quad (18a)$$

где

$$\alpha^2 = (k_0^2 \varepsilon_2' - \tau^2)/\kappa^2, \quad \gamma = k_0^2 \varepsilon_2''/2\alpha\kappa^2, \quad (186)$$

Поскольку решетка является фазовой, то $\varepsilon_2'' \ll 1$, $\gamma^2 \ll \alpha^2$ и

$$q \approx \kappa(\alpha + i\gamma). \quad (19)$$

Таким образом, получаем

$$p \approx \kappa \sqrt{(\alpha - m + i\gamma)^2 - \Delta^2}, \quad \Delta = k^2 \delta_m / 2m\kappa^2. \quad (20)$$

Радикал в (20) определен в смысле главного значения, т. е. всегда имеет положительную мнимую часть. Выражение (20) описывает зависимость квазиимпульса p от частоты света ω и угла падения Θ (через параметр α). Для идеальной решетки, когда $\gamma = 0$, между разрешенной ($p^2 > 0$, $|\alpha - m| > \Delta$) и запрещенной зоной ($p^2 < 0$, $|\alpha - m| < \Delta$) существует резкая граница при $|\alpha - m| = \Delta$. В случае конечного затухания эта граница размывается.

Полагая $f_m = 1$, из уравнения (15б) можно определить коэффициент f_m

$$f_{-m} = (\alpha - m + i\gamma)/\Delta - \sqrt{[(\alpha - m + i\gamma)/\Delta]^2 - 1}. \quad (21)$$

Если подставим коэффициенты f и $\bar{f}$ в выражение (10), то получим следующие выражения для электрического и магнитного полей в решетке при TE -поляризации:

$$E_z^{(1)} = E_0 e^{ip(x+x_0)} [e^{imx(x+x_0)} + f_{-m} e^{-imx(x+x_0)}], \quad (22a)$$

$$H_y^{(1)} = -\frac{q}{k_0} E_0 e^{ip(x+x_0)} [e^{imx(x+x_0)} - f_{-m} e^{-imx(x+x_0)}], \quad (22b)$$

$$E_z^{(2)}(x+x_0) = E_z^{(1)}(-x-x_0), \quad H_y^{(2)}(x+x_0) = -H_y^{(1)}(-x-x_0). \quad (22в)$$

Используя формулы (3)–(6) и (22), находим коэффициент отражения в виде

$$R = \frac{R_0(1 - e^{2isT}) + f(1 - e^{2ipT})(e^{-i\varphi} + R_0^2 e^{i\Theta}) + f^2 R_0(e^{i\psi} - e^{2ipT})}{1 - R_0^2 e^{2isT} + f R_0(1 - e^{2ipT})(e^{-i\varphi} + e^{i\Theta}) + f^2(R_0^2 e^{i\psi} - e^{2ipT})}, \quad (23)$$

где R_0 — френелевский коэффициент отражения от поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью ε_2 . Для краткости записи в формуле (23) положено, что $\bar{f} \equiv f_{-m}$. Фазы φ , ψ и Θ определяются выражениями

$$\varphi = 2m\kappa x_0, \quad \psi = 2m\kappa T, \quad \Theta = \varphi + \psi. \quad (24)$$

Квазиимпульс p в случае TE -поляризации дается выражением (20), а волновое число s следующей формулой:

$$s = p + m\kappa. \quad (25)$$

Вдали от брэгговского максимума s совпадает с x -компонентой волнового вектора k в среде.

б. TM -поляризация. При значении параметра q , удовлетворяющего условию $q \approx m\kappa$, наибольшими коэффициентами в (13а) будут g_m и g_{-m} . Если ввести

$$\bar{\delta}_m = \delta_m(2q^2 - k^2)/k^2, \quad (26)$$

то уравнения для g_m и g_{-m} будут аналогичны (15) с заменой $f \rightarrow g$ и $\delta \rightarrow \bar{\delta}$. Коэффициент h_m находится из (13б)

$$h_m = g_m k_0 \varepsilon_2 / (m\kappa + p). \quad (27)$$

Положим $g_m = 1$, тогда для коэффициента $\bar{g}_{-m}$ получается выражение, аналогичное (21), с заменой Δ на $\bar{\Delta}$, причем

$$\bar{\Delta} = k^2 \bar{\delta}_m / 2m\kappa = \Delta(q^2 - \tau^2)/k^2. \quad (28)$$

Отсюда видно, что $\tilde{\Delta} = 0$, когда $q^2 = \tau^2$. Поскольку параметр q является x -компонентой волнового вектора света, когда среда 2 однородна, то это условие выполняется при угле преломления в решетке, равном 45° . В этом случае брэгговское отражение исчезает, что было отмечено ранее [3].

Можно показать, что электрическое и магнитное поля в решетке при ТМ-поляризации падающего света определяются формулами

$$E_y^{(1)} = E_0 e^{ip(x+x_0)} [e^{imx(x+x_0)} + \xi_- e^{-imx(x+x_0)}], \quad (29a)$$

$$H_z^{(1)} = \frac{k_0 \varepsilon_2}{q} E_0 e^{ip(x+x_0)} [e^{imx(x+x_0)} - \xi_- e^{-imx(x+x_0)}], \quad (29б)$$

$$E_y^{(2)}(x+x_0) = E_y^{(2)}(-x-x_0), \quad H_z^{(2)}(x+x_0) = -H_z^{(2)}(-x-x_0). \quad (29в)$$

Подставляя (29) в (3)–(6), можно убедиться, что коэффициент отражения при ТМ-поляризации также описывается формулой (23), если в последней заменить f на g и считать, что R_0 — соответствующий френелевский коэффициент отражения, при этом квазиимпульс p будет определяться формулой (20) с заменой Δ на $\tilde{\Delta}$.

Вдали от брэгговского максимума величина f обращается в нуль, и формула (23) переходит в известное выражение для коэффициента отражения однородной пластины. Если толщина пластины значительно превышает длину затухания света, определяемую мнимой частью p (или s), то формула (23) переходит в полученное нами ранее [5] выражение для коэффициента отражения света от полубесконечной решетки

$$R_\infty = \frac{R_0 + f(e^{-i\varphi} + R_0^2 e^{i\theta}) + f^2 R_0 e^{i\varphi}}{1 + f R_0 (e^{-i\varphi} + e^{i\theta}) + f^2 R_0^2 e^{i\varphi}} = \frac{R_0 + f e^{i\varphi}}{1 + R_0^2 e^{i\varphi}}. \quad (30)$$

Коэффициент отражения от «пустой» решетки

Общая формула (23) для коэффициента отражения довольно громоздка. Она существенно упрощается, если френелевский коэффициент отражения R_0 равен нулю. Это может осуществиться в двух случаях: во-первых, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ для обеих поляризаций, во-вторых, при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ для ТМ-поляризации, когда свет падает под углом Брюстера $\theta = \theta_B$, $\tan \theta_B = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{1/2}$.

Введем следующие обозначения:

$$Y = (x - m)/\Delta, \quad \Gamma = \gamma/\Delta, \quad D = 2\pi T\Delta = 2\pi N\Delta, \quad (31)$$

где $N = T/d$ — число слоев в пластине, величина Δ определяется, согласно (20) или (28), для ТЕ- или ТМ-поляризаций. Тогда выражение (23) примет вид

$$R = \frac{[Y + i\Gamma + \sqrt{(Y + i\Gamma)^2 - 1}] [1 - e^{iD\sqrt{(Y + i\Gamma)^2 - 1}}] - e^{-2imx_0}}{[Y + i\Gamma + \sqrt{(Y + i\Gamma)^2 - 1}]^2 - e^{iD\sqrt{(Y + i\Gamma)^2 - 1}}}. \quad (32)$$

Очевидно, что в случае «пустой» решетки начальная фаза модуляции не влияет на энергетический коэффициент отражения $r = |R|^2$. Радикал в (32) определен в смысле главного значения; поэтому $r(Y)$ является четной функцией относительно расстройки частоты Y . На рис. 2 изображены семейства кривых $|R|^2$ для различных толщин D . В каждом семействе при фиксированном D изменяется параметр затухания Γ . При увеличении затухания максимальное значение коэффициента отражения r_0 в центре запрещенной зоны ($Y = 0$) уменьшается. Значение r_0 дается формулой

$$r_0 = \left[\frac{(\sqrt{1 + \Gamma^2} + \Gamma)(1 - e^{-D\sqrt{1 + \Gamma^2}})}{(\sqrt{1 + \Gamma^2} + \Gamma)^2 + e^{-D\sqrt{1 + \Gamma^2}}} \right]^2. \quad (33)$$

С увеличением затухания происходит также подавление осциллирующей части кривой при $|Y + \Gamma^2| > 1$. Уменьшение толщины D влияет на форму кривой качественно так же, как увеличение затухания. Оба фактора

искажают идеальную «столообразную» форму кривой, соответствующую полубесконечной среде без поглощения.

Определим ширину $Y_{1/2}$ центрального пика на половине его максимального значения r_0 , исходя из (32) и (33). В пределе, когда $\Gamma \rightarrow 0$ и $r_0 = \text{th}^2(D/2)$, имеем

$$\frac{\sin^2\left(\frac{D}{2}\sqrt{Y_{1/2}^2 - 1}\right)}{Y_{1/2}^2 - \cos^2\left(\frac{D}{2}\sqrt{Y_{1/2}^2 - 1}\right)} = \frac{1}{2} \text{th}^2 \frac{D}{2}. \quad (34)$$

Как показывает численный расчет, эта формула дает погрешность, не превышающую несколько процентов, вплоть до значения $\Gamma = 1$. Таким

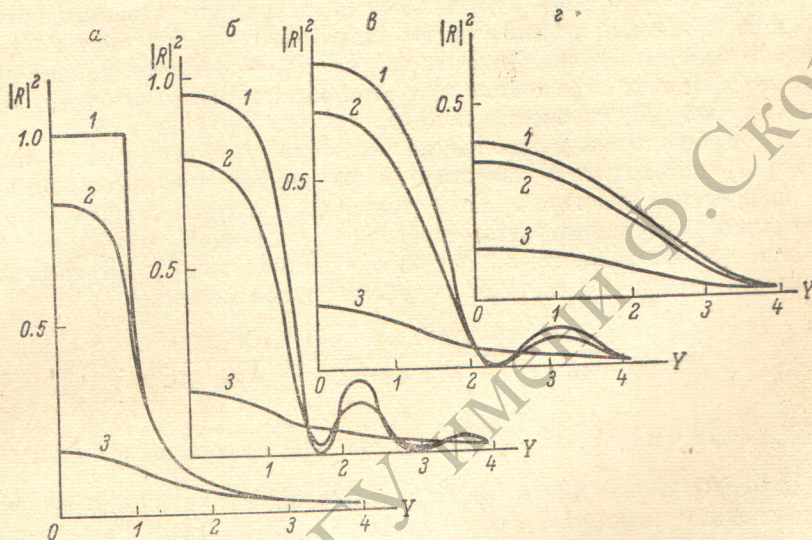


Рис. 2. Зависимость энергетического коэффициента отражения $|R|^2$ от относительной расстройки частоты Y при разных приведенных толщинах решетки D и параметрах затухания Γ .

$a - D = \infty$, $b - 4.5$, $v - 3.0$, $z - 1.5$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\Gamma = 0, 0.1, 1.0$.

образом, формула (34) связывает разрешающую способность фазовой решетки $Y_{1/2}$ с приведенной толщиной. Решетка, имеющая N слоев с глубиной модуляции $\Delta \epsilon_m = \epsilon_2 \delta_m$ на m -й гармонике, характеризуется параметром D , равным

$$D = 2\pi N \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_2} m \delta_m. \quad (35)$$

Это выражение соответствует ТМ-поляризации при угле Брюстера. Для случая $\epsilon_1 = \epsilon_2$ параметр D видоизменяется

$$D = 2\pi N m \delta_m / 2 \cos^2 \theta. \quad (36)$$

Приведенная ширина запрещенной зоны Δ выражается через D следующим образом:

$$\Delta = D / 2\pi N. \quad (37)$$

Итак, на основании исходных данных формула (34) позволяет найти относительную полуширину пика, при этом абсолютная частотная полуширина определяется формулой

$$2(\omega_{1/2} - \omega_m) = 2\omega_m Y_{1/2} \Delta / m, \quad (38)$$

где ω_m — брэгговская частота, соответствующая $Y = 0$,

$$\omega_m = mc / \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}. \quad (39)$$

Брэгговская частота характеризует положение центра запрещенной зоны. Из рис. 2, а (кривая 1) видно, что коэффициент отражения света от полубесконечной решетки без затухания равен единице в интервале частот $-1 \leq Y \leq 1$, т. е. когда $|\omega - \omega_m| \leq \omega_m \Delta/m$. Указанный интервал и является запрещенной зоной для световой волны. Внутри него свет испытывает недиссипативное затухание, которое оказывается максимальным при брэгговской частоте. В запрещенной зоне интенсивность света спадает в глубь решетки экспоненциально, причем длина b недиссипативного затухания на брэгговской частоте равна $(2\kappa\Delta)^{-1}$. Из анализа выражения (32) следует, что влияние диссипативного затухания сильнее всего сказывается на максимальной дифракционной эффективности при брэгговской частоте. Физически ясно, что это влияние станет сильным, когда длина поглощения света l будет меньше или порядка величины b . Если учесть, что параметр Γ равен b/l , то становится очевидным распывание пика отражения при $\Gamma > 1$ (см. кривую 3 на рис. 2, а). При $l=b$ коэффициент отражения $|R|^2$ для полубесконечной среды равен всего лишь 17%.

Конечность толщины пластины сказывается сильнее всего на полупрозрачности $Y_{1/2}$ брэгговского пика отражения, что видно из рис. 2, б, в и г. Из физических соображений следует ожидать существенного падения разрешающей способности, когда длина недиссипативного затухания b становится меньше толщины пластины T . Заметим, что параметр D равен $2T/b$, т. е. разрешающая способность должна сильно ухудшаться при $D < 2$, что видно из рис. 2, г.

Коэффициент отражения преломляющей решетки

Проведенный выше анализ «пустой» решетки показал, что спектральная зависимость ее коэффициента отражения характеризуется отчетливым брэгговским максимумом, который тем острее, чем меньше поглощение и чем меньше модуляция показателя преломления. Положением максимума можно управлять благодаря зависимости его положения от угла падения. Однако осуществление такой возможности осложняется тем обстоятельством, что в реальной решетке переотражение света отсутствует лишь при одном угле падения — угле Брюстера при ТМ-поляризации. В иных случаях наличие переотражения приводит к возникновению в разрешенной зоне последовательности максимумов, в которой «тонет» брэгговский максимум. Высота этих максимумов, как видно из формулы (23), тем больше, чем больше френелевский коэффициент отражения $|R_0|$. Положение максимумов зависит от фазовых сдвигов φ и ψ [формула (24)]. Если для определенности сдвиги φ и ψ принять кратными 2π , то формула (23) несколько упрощается

$$R = (1 - e^{2ipT}) \frac{(1 + fR_0)(R_0 + f)}{(1 + fR_0)^2 - (R_0 + f)^2 e^{2ipT}}. \quad (40)$$

В отсутствие затухания коэффициент отражения обращается в нуль в следующих местах разрешенной зоны:

$$2pT = D\sqrt{Y_l^2 - 1} = 2\pi l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (41)$$

Эти нули обусловлены множителем $1 - \exp(2ipT)$. Отметим, что существует дополнительный нуль, обусловленный другим множителем $R_0 + f$, который приходится на следующую точку:

$$Y_{\text{доп}} = -(1 + R_0^2)/2R_0. \quad (42)$$

Такого рода нуль коэффициента отражения имеет место и для полубесконечной решетки, что было нами подробно рассмотрено в работах [5, 7].

Высота брэгговского максимума преломляющей решетки несколько больше, чем пустой при одном и том же D . Если толщина пластины ве-

лика ($D \gg 1$), то ширина брэгговского максимума составляет величину, примерно равную двум в шкале Y . В этом случае ширины максимумов, связанных с переотражением, будут гораздо меньше ширины брэгговского максимума, как это следует из формулы (41). Таким образом, для пластины большой толщины ($D > 10$) широкий брэгговский максимум отчетливо выделяется на фоне узких интерференционных максимумов. Осцилляционная картина иллюстрируется на рис. 3, который относится к случаю $D=15$. При построении принято: $R_0 = -0.6$, $\Gamma = 0$. Асимметрия

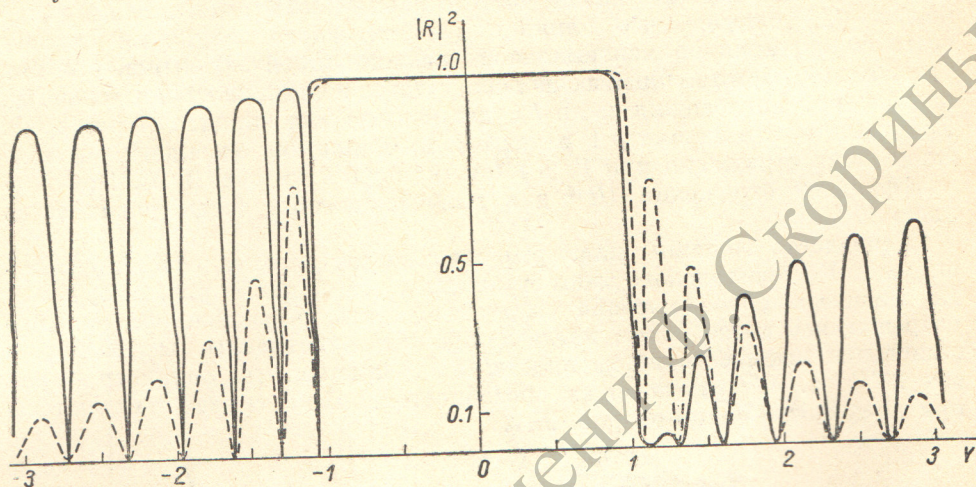


Рис. 3. Сравнение спектральных зависимостей коэффициента отражения для преломляющей (сплошная кривая) и «пустой» (штриховая кривая) решеток.

картины обусловлена минимумом, связанным со средой, при $Y_{\text{доп.}} = 1.13$. Когда $Y \gg 1$, амплитуда и период осцилляций становятся постоянными и характеризуют осцилляционную картину для однородной пластины. На рис. 3 кривая для «пустой» решетки при $D=15$ изображена штрихами.

Вид спектральной зависимости коэффициента отражения изменяется при учете поглощения. Если длина поглощения будет много меньше как длины недиссипативного затухания в центре запрещенной зоны, так и толщины пластины, то, очевидно, исчезнет вся структура спектра, и коэффициент отражения будет соответствовать полубесконечной однородной среде со средним показателем преломления ϵ_2 . Следует особо отметить случай, когда длина поглощения много больше длины недиссипативного затухания, но много меньше толщины пластины. При этом брэгговский максимум сохраняется, тогда как максимумы переотражения исчезают, что соответствует случаю полубесконечной фазовой решетки, рассмотренному в работах [5, 7]. Вдали от брэгговской частоты коэффициент отражения будет равен френелевскому значению для полубесконечной однородной среды со средним показателем преломления ϵ_2 .

Литература

- [1] Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин. Оптическая голография. «Мир», М., 1973.
- [2] С. Elachi. Proc. IEEE, 64, 1666, 1976.
- [3] H. Kogelnik. Bell Syst. Tech. J., 48, 2909, 1969.
- [4] P. Yeh, A. Yariv, Chi-Shain Hong. J. Opt. Soc. Am., 67, 423, 1977.
- [5] О. В. Константинов, М. М. Панахов, Ю. Ф. Романов. ФТТ, 19, 1798, 1977.
- [6] Н. В. Мак-Лаклан. Теория и приложение функций Матье. ИЛ, М., 1953.
- [7] Ю. В. Жилев, О. В. Константинов, М. М. Панахов, Ю. Ф. Романов. ФТТ, 19, 1798, 1977.

Поступило в Редакцию 19 сентября 1977 г.