УДК 535.317.1

О СПЕКТРАЛЬНОЙ СЕЛЕКТИВНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ГОЛОГРАММ

В. Г. Сидорович и *В. В. Шкунов*

Исследованы количественные закономерности преобразования в трехмерной фазовой голограмме световых волн с волновым числом, отличающимся от такового для записывающей волны. В случае, когда при записи голограммы используется выделенная по яркости опорная волна, выведены формулы для расчета дифракционной эффективности и уровня искажений объектной волны, обусловленных изменением волнового числа, распространяющегося в голограмме излучения. Получена формула для расчета параметров эксперимента, при которых изменение волнового числа преобразуемого излучения не влияет на характер преобразования.

Способность трехмерных голограмм избирательно рассеивать излучение с определенным волновым числом была впервые показана в [1, 12]. При заданной постоянной составляющей диэлектрической проницаемости голограммы волновое число излучения, распространяющегося в ее объеме, определяется частотой излучения. Именно поэтому свойство, обнаруженное в [1, 12], обычно называют спектральной селективностью. В [2, 12] проведено количественное исследование спектральной селективности простейших трехмерных голограмм, созданных интерференцией двух плоских (а также плоской и сферической) световых волн. Однако до настоящего времени не был осуществлен количественный анализ эффектов, сопровождающих изменение волнового числа излучения, распространяющегося в голограмме, по сравнению с волновым числом записывающего излучения, имеющего сложную пространственную структуру. Между тем на практике обычно создаются условия для проявления указанных эффектов. Эти условия могут порождаться целым рядом факторов: освещение голограммы протяженного объекта излучением с широким временным спектром (например, от тепловых источников в случае голограмм, записанных по методу Ю. Н. Денисюка); изменение диэлектрической проницаемости светочувствительной среды в результате химической обработки голограммы (количественно определяемое различием диэлектрических проницаемостей неэкспонированной среды до и после проявления); усадка голограммы после обработки, эквивалентная в параксиальном приближении изменению волнового числа записывающего излучения; изменение средней диэлектрической проницаемости голограммы по сравнению с диэлектрической проницаемостью регистрирующей среды, обусловленное наличием постоянной составляющей в распределении плотности энергии записывающего излучения; необходимость существенной разницы частот записывающего и освещающего голограмму излучений (например, при использовании фотохромных стекол в качестве регистрирующей среды во избежание стирания голограммы [3]).

В данной работе проведен количественный анализ преобразования в трехмерной чисто фазовой голограмме световых волн с волновым числом, отличающимся от волнового числа записывающего излучения в регистрирующей среде. Рассмотрение ограничено случаем, когда объектная волна имеет протяженный дискретный угловой спектр и интенсивность плоской опорной волны существенно превышает интенсивность любого из плоских компонентов объектной волны. Чувствительность так называемых безопорных [4, 5] трехмерных фазовых голограмм к изменению волнового числа преобразуемого излучения будет исследована в следующем сообщении.

Проведенное исследование основано на представлении преобразуемых световых волн в виде суперпозиций мод трехмерной голограммы [6, 7]. При таком подходе проблема формально сводится к нахождению собственных векторов и собственных значений самосопряженной матрицы, возмущенной некоторой диагональной матрицей. Методика решения задач такого рода развита в работе [8], посвященной анализу влияния на процесс стимулированного усиления несовпадения частот стоксовской волны и пространственно неоднородной накачки. Использованный ниже подход удобен еще и тем, что позволяет наглядно объяснить все предсказываемые эффекты изменением амплитуд плоских компонентов мод и фазовых скоростей этих мод в объеме голограммы.

1. В скалярном приближении распространение световой волны в объеме фазовой голограммы описывается уравнением

$$\Delta E + k^2 (1 + \beta |E_0|^2/\varepsilon) E = 0, \tag{1}$$

где E и E_0 — амплитуды электрических полей распространяющейся и записывавшей голограмму волн; $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ и ω — волновое число и частота распространяющейся волны; c — скорость света в вакууме; ε — диэлектрическая проницаемость вещества голограммы на частоте ω в областях с нулевой экспозицией; β — коэффициент, характеризующий светочувствительность регистрирующей среды.

Пусть

$$E_0(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} a(\mathbf{q})\, e^{i\left(\mathbf{qr} + \sqrt{k_0^2 - |\mathbf{q}|^2}\, z\right)}, \tag{2}$$

где $a(\mathbf{q})$ — комплексные амплитуды плоских компонентов записывающей голограмму волны; $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ — поперечные составляющие волновых векторов этих компонентов; $\mathbf{r} = (x, y)$; x, y — поперечные координаты; z — продольная координата, направленная по нормали к поверхности внутрь голограммы; $k_0 = \omega_0 \sqrt{\varepsilon_0}/c$; ε_0 — диэлектрическая проницаемость регистрирующей среды при записи на частоте записывающей волны ω_0. Будем искать моды трехмерной голограммы в виде

$$E(\mathbf{r}, z) = \sum_{\mathbf{q}} c(\mathbf{q})\, e^{i\left[\mathbf{qr} + \left(k + \sqrt{k_0^2 - |\mathbf{q}|^2} - k_0\right) z + \int_0^z \mu\, dz'\right]}, \tag{3}$$

где $\mathbf{q}$ и $\sqrt{k_0^2 - |\mathbf{q}|^2}$ характеризуют соответственно поперечный и продольный масштабы распределения диэлектрической проницаемости в объеме голограммы; μ — эффективная продольная фазовая скорость моды как целого; суммирование в (3) проводится по тому же множеству $\mathbf{q}$, что и в (2). Возникновение в показателях экспонент (3) слагаемых $k + \sqrt{k_0^2 - |\mathbf{q}|^2} - k_0$ вместо $\sqrt{k^2 - |\mathbf{q}|^2}$ обусловлено необходимостью согласованности не только поперечных, но и продольных масштабов изменения плотности энергии всякой моды голограммы с соответствующими масштабами вариаций диэлектрической проницаемости этой голограммы.

Подстановка (2) и (3) в (1) дает систему уравнений для $c(\mathbf{q})$

$$\left[2(k_0 - k)\left(k_0 - \sqrt{k_0^2 - |\mathbf{q}|^2}\right) + 2\mu\left(k - k_0 + \sqrt{k_0^2 - |\mathbf{q}|^2}\right) + \mu^2 - i\frac{d\mu}{dz}\right] c(\mathbf{q}) =$$

$$= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \beta \left[c(\mathbf{q})\left(I - |a(\mathbf{q})|^2\right) + Da(\mathbf{q})\right] + S(\mathbf{q}, z), \tag{4}$$

где

$$I=\sum_{\mathbf{q}}|a(\mathbf{q})|^2,\quad D=\sum_{\mathbf{q}}c(\mathbf{q})\,a^*(\mathbf{q}),\quad S(\mathbf{q},z)=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\beta\times$$

$$\times\sum_{\mathbf{q}_1\neq\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{q}_2}\sum_{\mathbf{q}_3\neq\mathbf{q}}a(\mathbf{q}_1)\,a^*(\mathbf{q}_2)\,c(\mathbf{q}_3)\,\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathbf{q})\,e^{i[h(\mathbf{q}_1)-h(\mathbf{q}_2)+h(\mathbf{q}_3)-h(\mathbf{q})]z},$$

$$\delta(0)=1,\quad \delta(\mathbf{s})=0\quad\text{при}\quad \mathbf{s}\neq 0,\quad h(\mathbf{q})=\sqrt{k_0^2-|\mathbf{q}|^2}.$$

2. Дальнейшее рассмотрение проведем при следующих предположениях.

1. Записывающий и освещающий голограмму пучки считаются параксиальными, т. е. $\sqrt{k_0^2-|\mathbf{q}|^2}\simeq k_0-|\mathbf{q}|^2/(2k_0)$ и $d\mu/dz\ll k\mu$. Это допустимо при $k\theta^4 l\ll 8$, где θ — порядок величины расходимости названных пучков, l — толщина голограммы.

2. $\beta k\tilde{I}\lesssim k_0\theta^2$ ($\tilde{I}$ — среднее геометрическое интенсивностей объектной и опорной волн, определяющее глубину модуляции диэлектрической проницаемости в голограмме), что позволяет отбросить в (4) осциллирующие члены $S(\mathbf{q},z)$ [9, 10]. Кроме того, поскольку при соизмеримых интенсивностях объектной и опорной волн $\mu\sim k\beta\tilde{I}$, то член μ^2 в левой части (4) оказывается $\ll(k_0\theta^2)^2$ и им можно пренебрегать по сравнению с членами, имеющими порядок $k^2\beta\tilde{I}$.

3. $(k_0-k)/k_0\gg\Theta^2$, так как в противоположном случае искомые спектральные искажения были бы сравнимы с искажениями, обусловленными отклонением записывающего пучка от параксиальности, между тем последние не учитываются в соответствии с п. 1. При выполнении указанных предположений система (4) приобретает вид

$$\left[e+|a(\mathbf{q})|^2+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}|}{k}\right)^2\right]c(\mathbf{q})=Da(\mathbf{q}),\tag{5}$$

где $e=(2\mu\varepsilon/\beta k)-I$; $\alpha=(k_0-k)/k_0$ — величина, характеризующая разницу волновых чисел записывающей и распространяющейся в голограмме волн. Если записывающая волна состоит из N плоских волн, то матрица системы (5) имеет N линейно независимых собственных векторов с элементами $c_i(\mathbf{q})$, соответствующих собственным значениям e_i ($i=1, 2, \ldots, N$). Элементы векторов $\mathbf{c}_i$ задают соотношения амплитуд плоских компонентов искомых мод голограммы. Эффективные фазовые скорости мод в объеме голограммы определяются формулой $\mu_i=\beta k(e_i+I)/2\varepsilon$.

При $\alpha=0$ исследование (5) проведено в [6, 7]. При $\alpha\neq 0$ часть полученных там соотношений остается в силе, если заменить $|a(\mathbf{q})|^2$ на $|a(\mathbf{q})|^2+(\alpha\varepsilon/\beta)(|\mathbf{q}|/k)^2$. Покажем это. Если

$$|a(\mathbf{q}_i)|^2+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_i|}{k}\right)^2\neq|a(\mathbf{q}_j)|^2+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_j|}{k}\right)^2\tag{6а}$$

при любых $i, j=1, 2, \ldots, N$, то

$$e_m\neq-\left[|a(\mathbf{q}_n)|^2+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_n|}{k}\right)^2\right]\tag{6б}$$

при $m, n=1, 2, \ldots, N$ [7]. Так как вероятность выполнения равенства в (6а) в эксперименте равна нулю, то достаточно рассмотреть случай, когда (6б) справедливо. При этом решение (5) формально записывается в виде

$$c(\mathbf{q})=\frac{Da(\mathbf{q})}{e+|a(\mathbf{q})|^2+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}|}{k}\right)^2},\tag{7}$$

а уравнение для e, получаемое подстановкой (7) в формулу, определяющую D, имеет вид

$$\sum_{\mathbf{q}}\left\{|a(\mathbf{q})|^2\Big/\left[e+|a(\mathbf{q})|^2+\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}|}{k}\right)^2\right]\right\}=1.\tag{8}$$

Корни этого уравнения определяют все собственные значения матрицы системы (5).

Для нахождения поправок к собственным значениям матрицы системы (5), обусловленных отличием α от нуля, удобно воспользоваться развитым в [8] методом, основанным на теории возмущений. Роль возмущения в рассматриваемом случае играет диагональная эрмитова матрица $\hat{V}$ с элементами

$$V_{nn} = -\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_n|}{k}\right)^2 \simeq -\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\theta_n^2, \tag{9}$$

где θ_n — угол, образованный волновым вектором с поперечной составляющей $\mathbf{q}_n$ и осью oZ. Поправки 1-го и 2-го порядков к наибольшему и наименьшему невозмущенным собственным значениям $e_{1,N} = \frac{1}{2}\left(J_s \pm \sqrt{J_s^2 + 4J_s|a_1|^2}\right)$ [6, 11] имеют вид

$$\Delta e_{1,N}^{(1)} = \langle\psi_{1,N}|\hat{V}|\psi_{1,N}\rangle = -\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\,\frac{\theta_1^2|a_1|^2 + \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle(e_{1,N} + |a_1|^2)}{e_{1,N} + 2|a_1|^2}, \tag{10а}$$

$$\Delta e_{1,N}^{(2)} = \sum_{m\neq 1,N}\frac{|\langle\psi_{1,N}|\hat{V}|\psi_{1,N}\rangle|^2}{e_{1,N} - e_m} = \pm\left(\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\right)^2\left(\sqrt{J_s^2 + 4J_s|a_1|^2}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left[(\langle\!\langle\theta^4\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle^2) + \frac{|a_1|^2}{J_s + 4|a_1|^2}(\theta_1^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle)^2\right], \tag{10б}$$

где $a_1 = a(\mathbf{q}_1)$ и θ_1 — амплитуда плоской опорной волны и угол, образуемый ее волновым вектором с осью $0Z$; $|a_1|^2 \gg |a(\mathbf{q}_i)|^2$, $i \neq 1$;

$$\psi_{1,N}(\mathbf{q}) = \{a_1\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1) + \gamma_{1,N}a(\mathbf{q})[1-\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1)]\}/\sqrt{|a_1|^2 + |\gamma_{1,N}|^2 J_s}$$

элементы нормированных собственных векторов матрицы невозмущенной системы (5), соответствующих собственным значениям $e_{1,N}$; $\gamma_{1,N} = (e_{1,N} + |a_1|^2)/e_{1,N}$; $J_s = \sum_{i\neq 1}|a(\mathbf{q}_i)|^2$ — интенсивность объектной волны;

$$\langle\!\langle\theta^n\rangle\!\rangle = J_s^{-1}\sum_{i\neq 1}|a(\mathbf{q}_i)|^2\theta_i^n.$$

Для расчета собственных векторов матрицы системы (5), соответствующих ее возмущенным максимальному и минимальному собственным значениям $e_{1,N}^b \simeq e_{1,N} + \Delta e_{1,N}^{(1)} + \Delta e_{1,N}^{(2)}$, подставим $e_{1,N}^{(b)}$ в (7)

$$\psi_{1,N}^b(\mathbf{q}) = \rho_{1,N}\{a_1\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1) + [1-\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1)]\gamma_{1,N}a(\mathbf{q})[1 + f_{1,N}(\mathbf{q})]\}, \tag{11}$$

где $\rho_{1,N}$ — нормировочные множители,

$$f_{1,N}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left[\frac{1}{e_{1,N}}(\theta^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle) - \frac{e_{1,N} - |a_1|^2}{e_{1,N} + 2|a_1|^2}(\theta_1^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle)\right] +$$

$$+\left(\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\right)^2\left[\frac{1}{e_{1,N}^2}(\theta^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle)^2 - \frac{|a_1|^2}{e_{1,N}^2(e_{1,N} + 2|a_1|^2)}(\langle\!\langle\theta^4\rangle\!\rangle - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle^2) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{e_{1,N}^2}(\theta^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle)(\theta_1^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle) + \frac{|a_1|^2(e_{1,N} + |a_1|^2)^2}{e_{1,N}^2(e_{1,N} + 2|a_1|^2)^3}(\theta_1^2 - \langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle)^2\right], \tag{12}$$

где θ — угол между oZ и волновым вектором с поперечной составляющей $\mathbf{q}$.

Чтобы оценить влияние возмущения на оставшиеся собственные значения матрицы системы (5), пронумеруем величины $-\left[|a(\mathbf{q})|^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta}(|\mathbf{q}|/k)^2\right]$ в порядке возрастания. При этом из (8) следует цепочка неравенств

$$-\left[|a(\mathbf{q}_1)|^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_1|}{k}\right)^2\right] < e_1 < -\left[|a(\mathbf{q}_2)|^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_2|}{k}\right)^2\right] < e_2 < \ldots < e_{N-1} <$$

$$< -\left[|a(\mathbf{q}_N)|^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\left(\frac{|\mathbf{q}_N|}{k}\right)^2\right] < e_N. \tag{13}$$

Так как в рассматриваемом случае $|a_1|^2 \gg |a(\mathbf{q}_i)|^2$ $(i \neq 1)$, то длина отрезка $[-|a(\mathbf{q}_2)|^2, 0]$, на котором сосредоточены невозмущенные собственные значения e_i $(i = 2, 3, \ldots, N-1)$, мала по сравнению с $|e_1|$ и e_N. Соответствующие невозмущенные собственные векторы ψ_i в силу эрмитовости матрицы системы (5) ортогональны к $\psi_{1, N}$ и к нормированному вектору $\mathbf{B}$ амплитуд плоских компонентов опорной волны $[B(\mathbf{q}_1) = 1,\ B(\mathbf{q}_i) = 0$ при $i \neq 1]$. Ортогональность ψ_i и $\mathbf{B}$ приводит к тому, что при $\alpha = 0$ моды с векторами амплитуд плоских компонентов ψ_i не возбуждаются в голограмме, освещаемой опорной волной. Возмущение приводит, как видно из (13), к расплыванию отрезка, содержащего e_i $(i \neq 1, N)$, на величину $\sim(\alpha\varepsilon/\beta)\langle\langle\theta^2\rangle\rangle$. Вследствие эрмитовости матрицы $\hat{V}$ возмущенные собственные векторы ψ_i^b $(i = 2, 3, \ldots, N-1)$ сохраняют ортогональность как между собой, так и к $\psi_{1, N}^b$, но утрачивают ортогональность к $\mathbf{B}$.

3. Трансформация поля опорной волны в голограмме при $\alpha \neq 0$ описывается формулой

$$\Phi(\mathbf{q}, z) = \langle \mathbf{B} | \psi_1^b \rangle \psi_1^b(\mathbf{q})\, e^{i\mu_1^b z} + \langle \mathbf{B} | \psi_N^b \rangle \psi_N^b(\mathbf{q})\, e^{i\mu_N^b z} + \\ + \left[B(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{B} | \psi_1^b \rangle \psi_1^b(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{B} | \psi_N^b \rangle \psi_N^b(\mathbf{q})\right] e^{i\mu^b z}, \tag{14}$$

где $\Phi(\mathbf{q}, z)\, e^{-i\frac{|\mathbf{q}|^2}{2k_0}z}$ — амплитуды плоских компонентов распространяющейся в голограмме волны; $\mu_{1, N}^b = (\beta k/2\varepsilon)(e_{1, N}^b + I)$; $\mu^b \simeq (\beta k/2\varepsilon)(e_j^b + I) \simeq (\beta k/2\varepsilon) I$ — эффективная фазовая скорость группы мод с векторами амплитуд ψ_j^b $(j \neq 1, N)$. Пренебрежение разницей фазовых скоростей мод с векторами амплитуд ψ_j^b $(j \neq 1, N)$ в (14) допустимо, так как эта разница приводит к эффектам по меньшей мере третьего порядка по α. Действительно, во-первых, разница e_j $(j \neq 1, N)$ составляет $\sim\alpha(\varepsilon/\beta)\langle\langle\theta^2\rangle\rangle$, а во-вторых, доля энергии, приходящаяся на эти моды, имеет второй порядок по α.

Обозначим $\mathbf{A}$ нормированный вектор амплитуд объектной волны с элементами $A(\mathbf{q}_1) = 0$; $A(\mathbf{q}_i) = a(\mathbf{q}_i)/\sqrt{J_s}$, $i \neq 1$. Соотношение (14) позволяет рассчитать дифракционную эффективность, определяемую формулой $\eta(z) = |\langle \mathbf{\Phi} | \mathbf{A} \rangle|^2$,

$$\eta(z) = \frac{2|a_1|^2}{J_s + 4|a_1|^2}\left\{1 - \cos\left[(\mu_1^b - \mu_N^b) z\right]\right\}\left\{1 - \frac{2\alpha\varepsilon}{\beta(J_s + 4|a_1|^2)}(\theta_1^2 - \langle\langle\theta^2\rangle\rangle) + \right. \\ + \left(\frac{\alpha\varepsilon}{\beta J_s}\right)^2 \frac{J_s(3J_s - 4|a_1|^2)}{(J_s + 4|a_1|^2)^2}(\theta_1^2 - \langle\langle\theta^2\rangle\rangle)^2 - \\ \left. - 4\left(\frac{\alpha\varepsilon}{J_s}\right)^2 \frac{J_s}{J_s + 4|a_1|^2}(\langle\langle\theta^4\rangle\rangle - \langle\langle\theta^2\rangle\rangle^2)\right\}. \tag{15}$$

При $\alpha = 0$ соотношение (15) сводится к полученной ранее в [6] формуле для дифракционной эффективности трехмерной фазовой голограммы. Анализ (15) показывает, что отличие α от нуля может в некоторых случаях приводить к возрастанию дифракционной эффективности. Это связано с возможностью уже в первом по α порядке получить более благоприятное с точки зрения дифракционной эффективности соотношение опорной и объектной волн [6] в возмущенных модах с векторами амплитуд плоских компонентов $\psi_{1, N}^b$. Однако этот фактор не является существенным для практики, так как недостаток энергии в восстановленной волне можно восполнить некоторым увеличением интенсивности восстанавливающей волны. Важным является появление искажений восстановленной волны при $\alpha \neq 0$. Искажения связаны с тем, что часть $1 - \eta(z)$ энергии поля, которая не воспроизводит объектную волну, при $\alpha \neq 0$ частично распространяется в направлении опорной волны, а частично — в направлении объектной. Интенсивность этих искажений $p(z)$, т. е. уровень шумов голограммы, связанных с изменением волнового числа распространяющегося в ней излучения, определяется формулой

$$p(z)=1-|\langle\boldsymbol{\Phi}|\mathbf{A}\rangle|^2-|\langle\boldsymbol{\Phi}|\mathbf{B}\rangle|^2=2\left(\frac{\alpha\varepsilon}{\beta}\right)^2(J_s|a_1|^2)^{-1}\times$$

$$\times(\langle\!\langle\theta^4\rangle\!\rangle-\langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle^2)\left\{\left[1-\frac{|a_1|^2}{e_1+2|a_1|^2}\cos[(\mu_1^b-\mu^b)z]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{|a_1|^2}{e_N+2|a_1|^2}\cos[(\mu_N^b-\mu^b)z]\right]+\eta_0[1-\cos[(\mu_1^b-\mu_N^b)z]]\right\}, \tag{16}$$

где $\eta_0=2|a_1|^2/(J_s+4|a_1|^2)$.

Из (16) следует, что уровень шумов не зависит от угла между опорной и объектной волнами, а определяется угловым спектром объектной волны, точнее фактором $\langle\!\langle\theta^4\rangle\!\rangle-\langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle^2$ (этот же фактор является количественной мерой эффектов, обусловленных разницей частот пространственно неоднородной накачки и стоксовской волны, усиливаемой в поле этой накачки [8]. Это связано с предположением о том, что голограмма освещается плоской волной с такой же поперечной составляющей волнового вектора, как у опорной волны. Если частота освещающей плоской волны изменилась, то ее волновой вектор должен быть повернут таким образом, чтобы проекция на поверхность голограммы в соответствии с предположением осталась неизменной. Поэтому формула (16) описывает только те эффекты изменения частоты, которые нельзя устранить поворотом опорной волны, и наклон этой волны не должен фигурировать в (16).

Укажем происхождение различных членов в (16). Слагаемое без множителя η_0 соответствует искажениям, которые обусловлены присутствием в объеме голограммы мод с фазовой скоростью μ^b и векторами амплитуд плоских компонентов ψ_i^b ($i\neq 1, N$). Указанные моды возбуждаются в голограмме из-за того, что возмущенные векторы ψ_i^b в отличие от невозмущенных не ортогональны вектору $\mathbf{B}$. Слагаемое с множителем η_0 в (16) связано с тем, что возмущенные векторы $\psi_{1,N}^b$ перестают быть точными линейными комбинациями векторов амплитуд объектной $\mathbf{A}$ и опорной $\mathbf{B}$ волн.

4. Отношение интенсивности искажающих волн к интенсивности восстановленной волны $p(z)/\eta(z)$ определяет качество создаваемого голограммой изображения. Если число χ является критерием достаточного качества изображения, то из соотношения $p(z)/\eta(z)=\chi$ можно по угловому спектру объектной волны, интенсивностям объектной и опорной волн, светочувствительности среды и толщине голограммы найти максимальное допустимое значение α. Для грубой оценки параметров эксперимента, при которых можно пренебрегать изменением волнового числа распространяющегося в голограмме излучения, пригодна формула

$$3\left(\frac{\alpha\varepsilon}{\beta\sqrt{J_s|a_1|^2}}\right)^2(\langle\!\langle\theta^4\rangle\!\rangle-\langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle)\leqslant 1, \tag{17}$$

получаемая из (15) и (16) при малых по сравнению с $\pi/2$ значениях $(\mu_1^b-\mu_N^b)z$. Для того чтобы сделать использование формул (15)—(17) более удобным, приведем значения $F=\langle\!\langle\theta^4\rangle\!\rangle-\langle\!\langle\theta^2\rangle\!\rangle^2$ для ряда простейших угловых спектров объектной волны.

Если $|a(\theta)|^2=(\pi\gamma^2)^{-1}$ при $|\theta-\theta'|\leqslant\gamma$ и $|a(\theta)|^2=0$ при $|\theta-\theta'|>\gamma$, то

$$F=\frac{1}{12}\gamma^4+|\theta'|^2\gamma^2.$$

Если $|a(\theta)|^2=e^{-|\theta-\theta'|^2/\rho^2}$, то

$$F=\rho^4+2\rho^2|\theta'|^2.$$

Для параболического углового спектра $|a(\theta)|^2=1-(\theta-\theta')^2/t^2$ при $|\theta-\theta'|\leqslant 1$, $|a(\theta)|^2=0$ и $|\theta-\theta'|>t$ справедлива оценка

$$F=\frac{1}{18}t^4+\frac{2}{3}t^2|\theta'|^2,$$

где $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{q}/k$.

До сих пор рассмотрение велось применительно к случаю соизмеримых по интенсивности объектной и опорной волн. Если интенсивность опорной волны существенно превышает интенсивность объектной, то общий сдвиг волновых чисел всех мод $\beta kI/(2\varepsilon)$, обусловленный однородной засветкой регистрирующей среды, значительно больше разницы этих волновых чисел $\beta k(e_i - e_j)/(2\varepsilon)$. В таком случае предположение п. 2 из разд. 2 обеспечивает возможность пренебрегать в (4) не членами $\sim (k\beta/2\varepsilon)(e+I)\ |\mathbf{q}|^2/2k_0$ и μ^2, а только их частями, пропорциональными соответственно e и e^2. Учет в (4) $k\beta I|\mathbf{q}|^2/4\varepsilon k_0$ приводит к замене α в (5) на $\tilde{\alpha} = [(k_0 - k)/k_0] - [\beta I/(2\varepsilon)]$, а учет слагаемого μ^2, равного $(\beta k/2\varepsilon)^2 (I^2 + 2Ie)$, — к преобразованию формулы, связывающей e и μ, к виду

$$e = 2\mu(\varepsilon/\beta k)[1 + (\beta I/2\varepsilon)] - I\left(1 + \frac{\beta I}{4\varepsilon}\right).$$

Таким образом, развитая в данной работе методика позволяет оценить искажения восстановленной волны, обусловленные изменением диэлектрической проницаемости голограммы под действием однородной засветки регистрирующей среды опорной волной. Для этого следует заменить в (15)—(17) величину α на $\tilde{\alpha}$.

В заключение отметим, что развитая теория пригодна и для исследования эффектов усадки материала голограммы после соответствующей химической обработки. В параболическом приближении обусловленное усадкой изменение продольного масштаба голограммы описывается некоторым изменением волнового числа записывающей волны: $\alpha = (k_0 S - k_0)/(k_0 S) = (S-1)/S$, где $S = l/l' > 1$ — коэффициент усадки голограммы, l и l' — толщина светочувствительной среды до и после обработки соответственно. Поскольку при выполнении предложений п.п. 1—3 из разд. 2 искажения восстановленной волны определяются отличием от нуля величины

$$\tilde{\alpha} = \frac{S\omega_0\sqrt{\varepsilon_0} - \omega\sqrt{\varepsilon}}{\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}\,S} - \frac{\beta I}{2\varepsilon},$$

то становится очевидным путь устранения этих искажений. А именно, следует добиваться выполнения равенства

$$l\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\beta I}{2\varepsilon}\right) = l'\omega\sqrt{\varepsilon}.$$

Авторы благодарны Ю. Н. Денисюку за поддержку данной работы, Б. Я. Зельдовичу за ценные обсуждения.

Литература

[1] Ю. Н. Денисюк. ДАН СССР, *144*, 1275, 1962.
[2] H. Kogelnik. Bell Syst. Techn. J., *48*, 2909, 1969.
[3] Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин. Оптическая голография. «Мир», М., 1973.
[4] P. J. Van Heerden. Appl. Opt., *2*, 393, 1963.
[5] В. В. Аристов, В. Ш. Шехтман. Усп. физ. наук, *104*, 51, 1971.
[6] В. Г. Сидорович. ЖТФ, *46*, 1306, 1976.
[7] В. Г. Сидорович. Опт. и спектр., *42*, 693, 1977.
[8] Б. Я. Зельдович, В. В. Шкунов. Квант. электрон., *4*, 1090, 1977.
[9] В. Г. Сидорович. ЖТФ, *46*, 2168, 1976.
[10] Б. Я. Зельдович, В. В. Шкунов. Препринт ФИАН, № 35, 1977.
[11] Б. Я. Зельдович, В. В. Шкунов. Препринт ФИАН, № 62, 1977.
[12] Ю. Н. Денисюк. Опт. и спектр., *15*, 522, 1963.

Поступило в Редакцию 19 сентября 1977 г.