Проблемы физики, математики и техники, № 4 (33), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОТДЕЛИМОСТЬ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, *Минск*

SEPARABILITY OF THE LATTICE OF τ-CLOSED TOTALLY ω-SATURATED FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V.G. Safonov, I.N. Safonova

Belarusian State University, *Minsk*

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс конечных групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-отделимой, если для любого терма $\nu(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap,\vee_\theta\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$ и любой группы $A\in\mathfrak{X}\cap\nu(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1\in\mathfrak{F}_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}_n$, что $A\in\nu(\theta\mathrm{form}A_1,\ldots,\theta\mathrm{form}A_n)$. В частности, если $\mathfrak{X}=\mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп, то решетку формаций θ называют $\mathfrak{G}$-отделимой или, кратко, отделимой. Доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

Ключевые слова: *формация конечных групп*, τ*-замкнутая формация*, *тотально* ω*-насыщенная формация*, *решетка формаций*, $\mathfrak{G}$*-отделимая решетка формаций.*

Let $\mathfrak{X}$ be a non-empty class of finite groups. A complete lattice θ of formations is said to be $\mathfrak{X}$-separable if for every term $\nu(x_1,\ldots,x_n)$ of signature $\{\cap,\vee_\theta\}$, θ-formations $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$, and every group $A\in\mathfrak{X}\cap\nu(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ exists $\mathfrak{X}$-groups $A_1\in\mathfrak{F}_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}_n$, such that $A\in\nu(\theta\mathrm{form}A_1,\ldots,\theta\mathrm{form}A_n)$. In particular, if $\mathfrak{X}=\mathfrak{G}$ is the class of all finite groups then the lattice θ of formations is said to be $\mathfrak{G}$-separable or, briefly, separable. It is proved that the lattice $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ of all τ-closed totally ω-saturated formations is $\mathfrak{G}$-separable for any subgroup functor τ.

Keywords: *formation of finite groups*, τ*-closed formation*, *totally* ω*-saturated formation*, *lattice of formations*, $\mathfrak{G}$*-separated lattice of formations.*

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы придерживаемся терминологии принятой в [1], [2].

Как было показано А.Н. Скибой [2, с. 159], для любого подгруппового функтора τ решетка l^{τ}_{n} всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{S}$-отделима. Там же был поставлен вопрос о $\mathfrak{G}$-отделимости решетки l^{τ}_{∞} [2, вопрос 4.1.17]. Положительный ответ на данный вопрос был получен В.Г. Сафоновым [3], [4]. Указанные результаты получили свое развитие в теории частично насыщенных формаций. Так, в совместной работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [5] была установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. Позднее, в работе [6] была анонсирована $\mathfrak{G}$-отделимость решетки l^{ω}_{∞} всех тотально ω-насыщенных формаций.

В данной статье мы докажем, что для любого подгруппового функтора τ решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

1 Определения и обозначения

Пусть ω – непустое подмножество простых чисел, ω' – дополнение к ω во множестве всех простых чисел. Всякую функцию вида

$$f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{\text{формации групп}\}$$

называют ω-локальным спутником. Для произвольного ω-локального спутника f полагают

$$LF_\omega(f)=\{G\mid G/G_{\omega d}\in f(\omega')\text{ и }G/F_p(G)\in f(p)\text{ для всех } p\in\omega\cap\pi(G)\},$$

где $G_{\omega d}$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd-группой. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=LF_\omega(f)$, то говорят, что она ω-локальна, а f – ω-локальный спутник этой формации. Формацию $\mathfrak{F}$ называют ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/L\in\mathfrak{F}$, где $L\subseteq\Phi(G)\cap O_\omega(G)$. Как известно [1] формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда она ω-локальна.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Формацию $\mathfrak{F}$ называют тотально ω-насыщенной, если она n-кратно ω-насыщенна для всех n.

Подгрупповым функтором называют отображение τ сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1) $G \in \tau(G)$; 2) для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ и любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Тотально ω-насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. Через $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ обозначают множество всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций. Формации из $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ называют $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формациями. Для любого множества групп $\mathfrak{X}$ через $l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Для любых τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$ обозначают пересечение всех тотально ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Относительно операций $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}$ и $\cap$ множество $l^{\tau}_{\omega_\infty}$, частично упорядоченное по включению, образует полную решетку формаций.

ω-Локальный спутник все значения которого – $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации называют $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значным спутником. Для произвольной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}$ обозначают ее минимальный внутренний $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают

$$\mathfrak{X}(F_p) = \mathrm{form}(G / F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

если $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(F_p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$.

Полную решетку формаций θ называют индуктивной, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^{\omega}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних θ-значных ω-локальных спутников, где f_i – ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\theta^{\omega}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_{\omega}(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-отделимой, если для любого терма $\nu(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\theta}\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \nu(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}_n$, что

$$A \in \nu(\theta\mathrm{form}A_1, \ldots, \theta\mathrm{form}A_n).$$

2 Вспомогательные результаты

***Лемма* 2.1** [1]. *Если* $\mathfrak{F} = \theta^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *и* f *– минимальный* ω*-локальный* θ*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = \theta\mathrm{form}(G / G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \theta\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *если* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *спутник* h θ*-значен и* p *– некоторое фиксированное число из* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *при любом* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ *и*

$$f_1(p) = \theta\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *при всех* $p \in \omega$.

***Лемма* 2.2** [1]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{H} = LF_{\omega}(h)$, $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(m)$ *и спутники* h *и* m *являются внутренними. Тогда формация* $\mathfrak{F}$ ω*-локальна и* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

***Лемма* 2.3** [7]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– непустая наследственная формация*, $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация. Тогда* $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая формация.*

***Лемма* 2.4** [8]. *Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.*

***Лемма* 2.5** [2, с. 162]. Пусть θ – индуктивная решетка формаций, $\upsilon(x_1, \ldots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\theta^l}\}$, f_i – внутренний θ-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда

$$\upsilon(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = LF(\overline{\upsilon}(f_1, \ldots, f_m)).$$

***Лемма* 2.6** [1]. Если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ и $G / O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 2.7** [2]. Решетка l^{τ}_{n} $\mathfrak{G}$-отделима, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{S}$-отделима.

***Лемма* 2.8** [2, с. 152]. *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k = Soc(G)$, *где* $k > 1$ *и* G *– группа с* $O_p(G) = 1$. *Пусть* M_i *– наибольшая нормальная в* G *группа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$, *но не содержащая* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого* $i \in \{1,\ldots,k\}$ *факторгруппа* G/M_i *монолитична и ее монолит* N_iM_i/M_i G*-изоморфен* N_i *и* $O_p(G/M_i)=1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$.

3 Основной результат

***Лемма* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс групп. Тогда если f – минимальный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_{\mathrm{p}}))$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *если h – произвольный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$ *и p – некоторое фиксированное число из* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *для всех* $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$,

$$f_1(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G)=1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$.

Доказательство. Утверждение леммы 3.1 является следствием леммы 2.1, поскольку $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ образует полную решетку формаций и, очевидно, $(l^{\tau}_{\omega_\infty})^{\omega} = l^{\tau}_{\omega_\infty}$. □

***Лемма* 3.2** [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация*, π *– такое множество простых чисел, что* $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$. *Тогда произведение* $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ *является* τ*-замкнутой тотально* ω*-насыщенной формацией.*

Доказательство. Покажем прежде, что формация $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ является тотально ω-насыщенной. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ и $G/L \in \mathfrak{M}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$. Поскольку $\pi(G/\Phi(G)) = \pi(G)$, то $\pi(G/L) = \pi(G)$ и $\pi(L) \subseteq \pi(G/L) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$. Понятно, что $\pi(\mathfrak{M}) = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому, а также ввиду условия $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$, имеем

$$\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega = (\pi \cup \pi(\mathfrak{F})) \cap \omega =$$
$$= (\pi \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) = \pi \cap \omega.$$

Следовательно, $\pi(L) \subseteq \pi$. Значит, $G^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{N}_{\pi}$. Но тогда $G \in \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}$. Однако, $\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Поэтому $G \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ – ω-насыщенная формация. Так как $\mathfrak{N}_{\pi}$ – тотально насыщенная формация, то она является тотально ω-насыщенной формацией. Согласно лемме 3.1 формация $\mathfrak{N}_{\pi}$ имеет такой ω-локальный спутник *t*, что $t(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi}$, $t(p) = (1)$ при $p \in \omega \cap \pi$ и $t(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus \pi$.

Поскольку $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}$, то по лемме 2.2 формация $\mathfrak{M}$ имеет такой ω-локальный спутник *m*, что $m(\omega') = \mathfrak{M}$ и $m(p) = t(p)\mathfrak{M} = (1)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ при $p \in \omega \cap \pi$ и $m(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus \pi$. Поэтому $\mathfrak{M}$ – *n*-кратно ω-насыщеная формация для любого натурального *n*. Следовательно, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-насыщенная формация. τ-Замкнутость формации $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ получаем, применяя лемму 2.3.□

***Лемма* 3.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}_i \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$, *где* $i \in I$. *Тогда* $f = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}^{\tau}_{i\omega_\infty} \mid i \in I)$ *– минимальный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F} = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i$. Тогда по лемме 3.1 имеем

$$\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}(\omega') = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X}) \text{ и}$$
$$\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_p)) \text{ для всех } p \in \omega.$$

Покажем, что $f(a) = \mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}(a)$ при любом $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Тогда

$$\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G/F_p(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i) =$$
$$= l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$
$$= l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}^{\tau}_{i\omega_\infty}(p)) = f(p).$$

Пусть теперь $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}(p) = \varnothing$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то для любого $i \in I$ имеем $p \notin \pi(\mathfrak{F}_i)$. Поэтому $\mathfrak{F}^{\tau}_{i\omega_\infty}(p) = \varnothing$. Следовательно, $f(p) = \varnothing$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}(\omega') = f(\omega')$. Действительно,

$$F^{\tau}_{\omega_\infty}(\omega') = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i) =$$
$$= l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$
$$= l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}^{\tau}_{i\omega_\infty}(\omega')) = f(\omega').$$

Таким образом, $\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty} = f$. □

***Лемма* 3.4.** *Решетка* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ *всех* τ*-замкнутых тотально* ω*-насыщенных формаций является частичной алгеброй формаций.*

Доказательство. Пусть p – произвольное простое число, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация. По лемме 2.3 формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также является τ-замкнутой формацией. Покажем, что формация $\mathfrak{M}$ является тотально ω-насыщенной.

Пусть $p \in \omega$. Тогда согласно лемме 3.1 формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник *m*, что $m(p) = (1)$, $m(\omega') = (1)$ и $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Ввиду леммы 2.2 формация $\mathfrak{M}$ имеет ω-локальный спутник *f*, удовлетворяющий условиям: $f(p) = \mathfrak{H}$, $f(\omega') = \mathfrak{M}$ и $f(q) = h(q)$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$. Поскольку

$\mathfrak{H} \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$, то $\mathfrak{M}$ является n-кратно ω-насыщенной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-насыщенная формация.

Пусть теперь $p \notin \omega$. По лемме 3.1 формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой ω-локальный спутник m, что $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega$ и $m(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Тогда, согласно лемме 2.2 формация $\mathfrak{M}$ имеет ω-локальный спутник f, такой, что $f(q) = h(q)$ для любого $q \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ – тотально ω-насыщенная формация. □

Из лемм 2.4 и 3.4 вытекает

***Лемма* 3.5.** *Решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ индуктивна.*

Из лемм 2.5 и 3.5 следует

***Лемма* 3.6.** *Пусть $\upsilon(x_1,\dots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$, f_i – внутренний $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1,\dots,n$. Тогда*

$$\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n) = LF_{\omega}(\upsilon(f_1,\dots,f_n)).$$

***Лемма* 3.7.** *Пусть $\upsilon(x_1,\dots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$. Тогда для любых τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n$ и всякого непустого подмножества простых чисел $\pi \subseteq \omega$ имеет место равенство*

$$\upsilon(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_\pi\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ в терм υ. Утверждение леммы очевидно, если $t = 0$. Пусть $t = 1$, $\mathcal{L}_1 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$, $\mathcal{L}_2 = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ содержатся в $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathcal{L}_1$, откуда следует $\mathcal{L}_2 = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathcal{L}_1$.

Допустим, что $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2 \neq \varnothing$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$. Тогда A – τ-минимальная монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathcal{L}_2}$.

Если P – неабелева группа или абелева π'-группа, то $A \in \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H} \subseteq \mathcal{L}_2$. Противоречие. Значит, P – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Так как $\mathcal{L}_2$ – ω-насыщенная формация и $p \in \omega$, то $P \nsubseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = F_p(A) = O_p(A)$.

Согласно лемме 3.1 формация $\mathfrak{N}_\pi$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник n, что $n(q) = (1)$ для любого $q \in \pi$. Тогда по лемме 2.2 формации $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ и $\mathcal{L}_1$ имеют такие ω-локальные спутники m, h и l_1 соответственно, что $m(q) = \mathfrak{M}$, $h(q) = \mathfrak{H}$ и $l_1(q) = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$ для всякого $q \in \pi$. Ввиду леммы 3.5 формация $\mathcal{L}_2$ имеет такой $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный ω-локальный спутник l_2, что $l_2(q) = m(q) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} h(q) = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$, где $q \in \pi$. Следовательно, $l_1(q) = l_2(q)$ для любого $q \in \pi$. Поскольку $A \in \mathcal{L}_1$ и $p \in \pi$, то $A / O_p(A) = A / F_p(A) \in l_1(p)$. Значит, $A / O_p(A) \in l_2(p) \subseteq \mathcal{L}_2$. Но тогда ввиду леммы 2.6 имеем $A \in \mathcal{L}_2$. Получили противоречие.

Положим теперь $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$, значит, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$.

Допустим теперь, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$ и B – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда B – τ-минимальная монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(B) = B^{\mathfrak{X}_1}$.

Если P – неабелева группа или абелева π'-группа, то из $B \in \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ следует, $B \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $B \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, P – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Поскольку $\mathfrak{X}_1$ – ω-насыщенная формация и $p \in \pi \subseteq \omega$, то $P \nsubseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = F_p(B)$ и $B = [P]H$ для некоторой максимальной подгруппы H из B. Так как $B \in \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ и $P = \mathrm{Soc}(B)$, то $H \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Отсюда $B^{\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_\pi$. Тогда $B \in \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Пусть теперь $t > 1$ и предположим, что лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из $\{\vee^{\tau}_{\omega_\infty}, \cap\}$. Пусть υ имеет вид

$$\upsilon_1(x_{i_1},\dots,x_{i_r})\Delta\upsilon_2(x_{j_1},\dots,x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\vee^{\tau}_{\omega_\infty}, \cap\}$ и $\{x_{i_1},\dots,x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1},\dots,x_{j_s}\} = \{x_1,\dots,x_n\}$. По индуктивному предположению для термов $\upsilon_1(x_{i_1},\dots,x_{i_r})$ и $\upsilon_2(x_{j_1},\dots,x_{j_s})$ утверждение леммы верно. Поэтому

$$\upsilon_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{N}_\pi\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_r}),$$
$$\upsilon_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}_\pi\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_s}).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
&\upsilon(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \\
&= \upsilon_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \\
&= \mathfrak{N}_\pi\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{N}_\pi\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_s}) = \\
&= \mathfrak{N}_\pi(\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_s})) = \\
&= \mathfrak{N}_\pi\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n).
\end{aligned}$$

□

***Лемма* 3.8.** *Пусть $\upsilon(x_1,\dots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$, $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{F}_i$ – такие $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации, что $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$, $i = 1,\dots,n$. Тогда*

$$\upsilon(\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n) \subseteq \upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ в терм υ. Утверждение леммы очевидно, если $t = 0$ или 1.

Пусть $t > 1$ и лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$. Пусть терм υ имеет вид $\upsilon_1(x_{i_1},\dots,x_{i_r})\Delta\upsilon_2(x_{j_1},\dots,x_{j_s})$, где $\Delta \in \{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ и $\{x_{i_1},\dots,x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1},\dots,x_{j_s}\} = \{x_1,\dots,x_n\}$. Положим

$$\mathfrak{M}_1 = \upsilon_1(\mathfrak{X}_{i_1},\dots,\mathfrak{X}_{i_r}),\ \mathfrak{M}_2 = \upsilon_2(\mathfrak{X}_{j_1},\dots,\mathfrak{X}_{j_s}),$$

$$\mathfrak{H}_1 = \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_r}),\ \mathfrak{H}_2 = \upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_s}).$$

По индуктивному предположению для термов $\upsilon_1(x_{i_1},\dots,x_{i_r})$ и $\upsilon_2(x_{j_1},\dots,x_{j_s})$ утверждение леммы верно, тогда $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$, $i = 1,2$. Если $\Delta = \cap$, то $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$. Аналогично, если $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$, то $\mathfrak{M}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}_2$. Поэтому $\mathfrak{M}_1\Delta\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1\Delta\mathfrak{H}_2$. Значит, выполняются включения

$$\upsilon_1(\mathfrak{X}_{i_1},\dots,\mathfrak{X}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{X}_{j_1},\dots,\mathfrak{X}_{j_s}) \subseteq$$

$$\subseteq \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_s}),$$

$$\upsilon(\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n) \subseteq \upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n). \qquad \square$$

***Теорема* 3.9.** Решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

Доказательство. Предположим противное, и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда найдутся терм $\upsilon(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ и $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n$, такие, что $G \in \upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$, но нет групп $A_1,\dots,A_n$ таких, что $A_1 \in \mathfrak{F}_1,\dots, A_n \in \mathfrak{F}_n$ и

$$G \in \upsilon(l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} A_1,\dots,l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} A_n).$$

Заметим, что $\Phi(G) \cap O_\omega(G) = 1$. Действительно, если $\Phi(G) \cap O_\omega(G) \neq 1$, то в силу индуктивного предположения для группы $G/(\Phi(G) \cap O_\omega(G))$ утверждение теоремы верно. Поскольку $G \in \upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$ и $\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$ – формация, то $G/(\Phi(G) \cap O_\omega(G)) \in \upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$. Значит, найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_1,\dots, B_n \in \mathfrak{F}_n$, что

$$G/(\Phi(G) \cap O_\omega(G)) \in \upsilon(l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} B_1,\dots,l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} B_n).$$

В силу ω-насыщенности формации

$$\upsilon(l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} B_1,\dots,l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} B_n)$$

имеет место $G \in \upsilon(l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} B_1,\dots,l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} B_n)$. Противоречие. Таким образом, $\Phi(G) \cap O_\omega(G) = 1$.

Пусть $\mathfrak{M} = \upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$. Покажем, что утверждение теоремы верно, если в терм υ входит всего один символ. Действительно, если $G \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $G \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1,2$. Значит,

$$G \in l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} G \cap l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} G.$$

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{M}$. Предположим, что G – монолитическая группа.

Пусть $P = \operatorname{Soc}(G)$ – неабелева группа или абелева ω'-группа. Тогда ввиду леммы 3.2 формация $\mathfrak{S}_\pi \tau \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ и $G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2 \subseteq \subseteq \mathfrak{S}_\pi \tau \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Из последнего включения следует, что $G \in \tau \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau} \mathfrak{F}_2$. По лемме 2.7 найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, что $G \in \tau \operatorname{form} A_1 \vee^{\tau} \tau \operatorname{form} A_2 \subseteq l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} A_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} A_2$.

Пусть теперь P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Поскольку $\Phi(G) \cap O_\omega(G) = 1$, то $P \not\subseteq \Phi(G)$ и $P = C_G(P) = = O_p(G) = F_p(G)$. Так как $G \in \mathfrak{M}$, в силу леммы 3.1 имеем $G/P = G/F_p(G) \in \mathfrak{M}^{\tau}_{\omega_\infty}(p)$. По лемме 3.3 справедливо равенство $\mathfrak{M}^{\tau}_{\omega_\infty}(p) = \mathfrak{F}^{\tau}_{1\omega_\infty}(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}^{\tau}_{2\omega_\infty}(p)$. Поскольку $|G/F_p(G)| < |G|$, то по индукции для группы $G/F_p(G)$ теорема верна. Поэтому найдутся такие группы $D_1 \in \mathfrak{F}^{\tau}_{1\omega_\infty}(p)$ и $D_2 \in \mathfrak{F}^{\tau}_{2\omega_\infty}(p)$, что

$$G/F_p(G) \in l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} D_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} D_2.$$

Пусть $C_i = D_i / O_p(D_i)$, $i \in 1,2$. Тогда

$$l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} D_i \subseteq \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_i,\ i \in 1,2, \text{ и}$$

$$l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} D_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} D_2 \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_2.$$

По лемме 3.7 имеет место равенство

$$\mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_2 =$$

$$= \mathfrak{N}_p (l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_2).$$

Значит,

$$G/P = G/F_p(G) \in \mathfrak{N}_p (l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_2).$$

Так как $P = O_p(G)$, то $O_p(G/P) = 1$. Поэтому $G/P \in l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_2$.

Пусть $R_i = Z_p \wr C_i = [K_i]C_i$, где Z_p – группа порядка p, K_i – база сплетения групп Z_p и C_i, $i = 1,2$. Понятно, что $O_p(R_i) = F_p(R_i) = K_i$. Так как $R_i / O_p(R_i) \simeq C_i \in l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} D_i \subseteq \mathfrak{F}^{\tau}_{i\omega_\infty}(p)$, в силу леммы 2.6 имеем $R_i \in \mathfrak{F}_i$. Пусть далее $\mathfrak{X}_i = l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} R_i$, $i = 1,2$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{X}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{X}_2$. По лемме 3.3 $\mathfrak{L}^{\tau}_{\omega_\infty} = \mathfrak{X}^{\tau}_{1\omega_\infty} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{X}^{\tau}_{2\omega_\infty}$. Следовательно,

$$\mathfrak{L}^{\tau}_{\omega_\infty}(p) = \mathfrak{X}^{\tau}_{1\omega_\infty}(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{X}^{\tau}_{2\omega_\infty}(p) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form}(R_1/F_p(R_1)) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form}(R_2/F_p(R_2)) =$$

$$= l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} l^{\tau}_{\omega_\infty} \operatorname{form} C_2.$$

Значит, $G/O_p(G) = G/P \in \mathfrak{L}^{\tau}_{\omega_\infty}(p)$. В силу леммы 3.2

$$G \in \mathcal{L} = l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} R_1 \vee_{\omega_\infty}^{\tau} l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} R_2.$$

Пусть теперь G не является монолитической группой и $\operatorname{Soc}(G) = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i = 1,\ldots,k$ $(k \geq 2)$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы G, содержащую $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$ и не содержащую N_i. В силу леммы 2.8 группа $B_i = G / M_i$ является монолитической и ее монолит $N_i M_i / M_i$ G-изоморфен N_i и $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$. Поскольку $B_i \in \mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_\infty}^{\tau} \mathfrak{F}_2$ и $|B_i| < |G|$, то по индукции для группы B_i найдутся такие группы $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1$ и $S_{i2} \in \mathfrak{F}_2$, что

$$B_i \in l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i1} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i2},\ i \in I = \{1,2,\ldots,k\}.$$

Положим $S_1 = S_{11} \times S_{21} \times \ldots \times S_{k1}$ и $S_2 = S_{12} \times S_{22} \times \ldots \times S_{k2}$. Поскольку $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1$ и $S_{i2} \in \mathfrak{F}_2$ при любом $i \in I$, то $S_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $S_2 \in \mathfrak{F}_2$. Так как $S_{i1} \in l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_1$ и $S_{i2} \in l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_2$ для любого $i \in I$, то $l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i1} \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_1$ и $l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i2} \subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_2$. Поэтому для всякого $i \in I$ имеет место включение

$$l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i1} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i2} \subseteq$$
$$\subseteq l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_1 \vee_{\omega_\infty}^{\tau} l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_2.$$

Из $B_i \in l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i1} \vee_{\omega_\infty}^{\tau} l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_{i2}$ в силу леммы 2.8 вытекает, что $G \in l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_1 \vee_{\omega_\infty}^{\tau} l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} S_2$ как подпрямое произведение групп, изоморфных группам $B_1,\ldots,B_k$. Противоречие.

Таким образом, мы можем считать, что число t вхождений символов из $\{\cap, \vee_{\omega_\infty}^{\tau}\}$ в терм $\upsilon(x_1,\ldots,x_n)$ больше 1 и при $t-1$ утверждение теоремы верно.

Допустим, что группа G монолитична. Пусть сначала $P = \operatorname{Soc}(G)$ – абелева p-группа, где $p \in \omega$. Поскольку $\Phi(G) \cap O_\omega(G) = 1$, то $P \not\subseteq \Phi(G)$ и $P = C_G(P) = O_p(G) = F_p(G)$. В силу леммы 3.6 $m = \upsilon(\mathfrak{F}_{1\omega_\infty}^{\tau},\ldots,\mathfrak{F}_{n\omega_\infty}^{\tau})$ – $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный спутник формации $\mathfrak{M} = \upsilon(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$. Ввиду того, что $G \in \mathfrak{M}$, из леммы 3.1 вытекает

$$G / P = G / F_p(G) \in m(p) = \upsilon(\mathfrak{F}_{1\omega_\infty}^{\tau}(p),\ldots,\mathfrak{F}_{n\omega_\infty}^{\tau}(p)).$$

Так как $|G / F_p(G)| < |G|$, то для группы $G / F_p(G)$ утверждение теоремы верно. Поэтому найдутся такие группы $T_1 \in \mathfrak{F}_{1\omega_\infty}^{\tau}(p),\ldots, T_n \in \mathfrak{F}_{n\omega_\infty}^{\tau}(p)$, что $G / F_p(G) \in \upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} T_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} T_n)$.

Положим $L_i = T_i / O_p(T_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Тогда $l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} T_i \subseteq \mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_i$ для любого $i = 1,\ldots,n$. В силу леммы 3.8 справедливо включение

$$\upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} T_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} T_n) \subseteq$$
$$\subseteq \upsilon(\mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_1,\ldots,\mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_n).$$

По лемме 3.7 имеет место равенство

$$\upsilon(\mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_1,\ldots,\mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_n) =$$
$$= \mathfrak{N}_p \upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_n).$$

Значит, $G / P \in \upsilon(\mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_1,\ldots,\mathfrak{N}_p l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_n)$. Поскольку $P = O_p(G)$, то $O_p(G / P) = 1$ и

$$G / P \in \upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_n).$$

Обозначим через R_i регулярное сплетение $Z_p \wr L_i$ группы Z_p порядка p и группы L_i, $i = 1,\ldots,n$. Тогда $R_i = [K_i]L_i$, где K_i – база сплетения. Имеет место $K_i = F_p(R_i) = O_p(R_i)$. Ввиду того, что $R_i / O_p(R_i) \simeq L_i \in \mathfrak{F}_{i\omega_\infty}^{\tau}(p)$, по лемме 2.6 имеем $R_i \in \mathfrak{F}_i$. Пусть $\mathfrak{X}_i = l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} R_i$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через $\mathcal{L}$ формацию $\upsilon(\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_n)$. По лемме 3.6 $l = \upsilon(\mathfrak{X}_{1\omega_\infty}^{\tau},\ldots,\mathfrak{X}_{n\omega_\infty}^{\tau})$ – $l_{\omega_\infty}^{\tau}$-значный спутник формации $\mathcal{L}$. Поскольку $\mathfrak{X}_{i\omega_\infty}^{\tau}(p) \subseteq \mathfrak{X}_i$, $i = 1,\ldots,n$, то в силу леммы 3.8 имеет место $l(p) = \upsilon(\mathfrak{X}_{1\omega_\infty}^{\tau}(p),\ldots,\mathfrak{X}_{n\omega_\infty}^{\tau}(p)) \subseteq \upsilon(\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_n)$. Поэтому спутник l является внутренним. Поскольку

$$l(p) = \upsilon(\mathfrak{X}_{1\omega_\infty}^{\tau}(p),\ldots,\mathfrak{X}_{n\omega_\infty}^{\tau}(p)) =$$
$$= \upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form}(R_1 / F_p(R_1)),\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form}(R_n / F_p(R_n))) =$$
$$= \upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} L_n),$$

то $G / O_p(G) = G / P \in l(p)$. По лемме 2.6

$$G \in \mathcal{L} = \upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} R_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} R_n).$$

Противоречие.

Пусть теперь $P = \operatorname{Soc}(G)$ – неабелева группа или абелева ω'-группа и терм υ имеет вид

$$\upsilon_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r}) \Delta \upsilon_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_{\omega_\infty}^{\tau}\}$ и

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\} = \{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Если $\Delta = \cap$, то $G \in \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,\mathfrak{F}_{i_r}) \cap \upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,\mathfrak{F}_{j_s})$. По индуктивному предположению для термов υ_1 и υ_2 утверждение теоремы верно, следовательно, найдутся группы $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1},\ldots,A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1},\ldots,B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$,

$$G \in \upsilon_1(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} A_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} A_r)$$
$$\text{и } G \in \upsilon_2(l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} B_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau} \operatorname{form} B_s).$$

Пусть $\Omega = \{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_m} = A_m$, если $x_{i_m} \notin \Omega$, $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$, если $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$ и $P_{j_k} = B_k$, если $x_{j_k} \notin \Omega$, $m = 1,\ldots,r$, $k = 1,\ldots,s$. Ясно, что $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$ и $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{i_m}$ формацию $l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}R_{i_m}$, а через $\mathfrak{M}_{j_k}$ – формацию $l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}P_{j_k}$, $m=1,\ldots,r$, $k=1,\ldots,s$. Поскольку для любых $m=1,\ldots,r$, $k=1,\ldots,s$ справедливы включения $l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_m\subseteq\mathfrak{M}_{i_m}$ и $l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_k\subseteq\mathfrak{M}_{j_k}$, в силу леммы 3.8 имеем:

$$\upsilon_1(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_r)\subseteq\upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ldots,\mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\upsilon_2(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_s)\subseteq\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ldots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$G\in\upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ldots,\mathfrak{M}_{i_r})\cap\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ldots,\mathfrak{M}_{j_s})=$$
$$=\upsilon(\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1,\ldots,n$.

Пусть $\Delta=\vee_{\omega_\infty}^{\tau}$. Тогда

$$G\in\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,\mathfrak{F}_{i_r})\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,\mathfrak{F}_{j_s}).$$

Положим $\mathfrak{H}_1=\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,\mathfrak{F}_{i_r})$ и $\mathfrak{H}_2=\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,\mathfrak{F}_{j_s})$. Тогда $G\in\mathfrak{H}_1\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\mathfrak{H}_2$ и по доказанному существуют такие группы $H_1\in\mathfrak{H}_1$ и $H_2\in\mathfrak{H}_2$, что

$$G\in l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}H_1\vee_{\omega_\infty}^{\tau}l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}H_2.$$

По индуктивному предположению найдутся такие группы $A_1\in\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,A_r\in\mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1\in\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,$ $B_s\in F_{j_s}$, что

$$H_1\in\upsilon_1(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_r),$$
$$H_2\in\upsilon_2(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_s).$$

Пусть теперь $\Omega=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\}\cap\{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_m}=A_m$, если $x_{i_m}\notin\Omega$, $R_{i_m}=P_{j_k}=A_m\times B_k$, если $x_{i_m}=x_{j_k}\in\Omega$ и $P_{j_k}=B_k$, если $x_{j_k}\notin\Omega$, $m=1,\ldots,r$, $k=1,\ldots,s$. Очевидно, что $R_{i_m}\in\mathfrak{F}_{i_m}$ и $P_{j_k}\in\mathfrak{F}_{j_k}$. Положим $\mathfrak{M}_{i_m}=l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}R_{i_m}$, $\mathfrak{M}_{j_k}=$ $=l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}P_{j_k}$, $m=1,\ldots,r$, $k=1,\ldots,s$. Поскольку для любых $m=1,\ldots,r$, $k=1,\ldots,s$ справедливы включения $l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_m\subseteq\mathfrak{M}_{i_m}$ и $l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_k\subseteq\mathfrak{M}_{j_k}$, то в силу леммы 3.8 имеем:

$$\upsilon_1(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_r)\subseteq\upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ldots,\mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\upsilon_2(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_s)\subseteq\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ldots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Значит, выполняется включение

$$\upsilon_1(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_r)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}$$
$$\upsilon_2(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_s)\subseteq$$
$$\subseteq\upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ldots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ldots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Так как

$$l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}H_1\vee_{\omega_\infty}^{\tau}l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}H_2\subseteq$$
$$\subseteq\upsilon_1(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}A_r)\vee_{\omega_\infty}^{\tau}$$
$$\upsilon_2(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_1,\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}B_s),$$

то справедливо включение

$$l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}H_1\vee_{\omega_\infty}^{\tau}l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}H_2\subseteq$$
$$\subseteq\upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ldots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ldots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Следовательно,

$$G\in\upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ldots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee_{\omega_\infty}^{\tau}\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ldots,\mathfrak{M}_{j_s})=$$
$$=\upsilon(\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1,\ldots,n$. Снова получили противоречие.

Предположим теперь, что группа G не является монолитической и $\operatorname{Soc}(G)=N_1\times\ldots\times N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i=1,\ldots,k$ $(k\geq 2)$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы G, содержащую $N_1\times\ldots\times N_{i-1}\times N_{i+1}\times\ldots\times N_k$ и не содержащую N_i. Ввиду леммы 2.8 $B_i=G/M_i$ – монолитическая группа с монолитом N_iM_i/M_i, G-изоморфным N_i, и $M_1\cap\ldots\cap M_k=1$. Имеем $B_i\in\upsilon(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$. Поскольку $|B_i|<|G|$, то по индукции для группы B_i найдутся такие группы $S_{i1}\in\mathfrak{F}_1,\ldots,S_{in}\in\mathfrak{F}_n$, что

$$B_i\in\upsilon(l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}S_{i1},\ldots,l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}S_{in}),$$
$$i\in I=\{1,\ldots,k\}.$$

Положим $\mathfrak{X}_{ij}=l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}S_{ij}$, $i\in I$, $j\in J=\{1,\ldots,n\}$, и пусть

$$\mathfrak{X}_j=l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}(S_{1j}\times\ldots\times S_{kj})=l_{\omega_\infty}^{\tau}\operatorname{form}S_j,$$

где $S_j=S_{1j}\times\ldots\times S_{kj}$. Так как $S_{ij}\in\mathfrak{F}_j$ при любом $i\in I$, то $S_j\in\mathfrak{F}_j$. Поскольку $S_{ij}\in\mathfrak{X}_j$ для любого $i\in I$, то $\mathfrak{X}_{ij}\subseteq\mathfrak{X}_j$. Поэтому для всякого $i\in I$ в силу леммы 3.8 имеет место включение

$$\upsilon(\mathfrak{X}_{i1},\ldots,\mathfrak{X}_{in})\subseteq\upsilon(\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_n).$$

Поскольку $B_i\in\upsilon(\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_n)$ для любого $i\in I$, то в силу леммы 2.8 группа G принадлежит формации $\upsilon(\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_n)$ как подпрямое произведение групп, изоморфных группам $B_1,\ldots,B_k$. Противоречие. □

Если $\omega=\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то из теоремы 3.9 получаем

***Следствие* 3.10** [4]. *Решетка l_∞^{τ} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

В случае когда τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 3.9 вытекает

***Следствие* 3.11** [6]. Решетка l_∞^{ω} всех тотально ω-насыщенный формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба*, *А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2 . – С. 114–147.

2. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн., Беларуская навука, 1997.

3. *Сафонов*, *В.Г.* К теории тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2008. – 34 с. (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 15).

4. *Сафонов В.Г.*, $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 5. – С. 692–704.

5. *Shemetkov*, *L.A.* On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 155–169.

6. *Safonov*, *V.G.* On $\mathfrak{G}$-separability of the lattice l_∞^ω of totally ω-saturated formations / V.G. Safonov, V.V. Shcherbina // The 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, July 5–12, 2011. – Luhansk Ukraine. – P. 125.

7. *Сафонов*, *В.Г.* Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Сиб. матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.

8. *Воробьев*, *Н.Н.*, Об индукивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 21–24.

Поступила в редакцию 14.11.17.